

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXXIX

1932 (X)

---

SERIE SESTA

---

RENDICONTI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XV



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1932 (X)

Digitized by the Internet Archive  
in 2023



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

Seduta del 3 gennaio 1932 (Anno X)

Presidenza del prof. sen. A. GARBASSO

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. G. FANO.

Consideriamo una  $V_3$  algebrica, regolare e a generi tutti nulli, la quale ammetta un gruppo continuo *finito*  $G$  di trasformazioni birazionali (gruppo dipendente cioè da un numero finito di parametri). Questo gruppo lascerà invariati entro  $V_3$  infiniti sistemi lineari (ampi quanto si vuole) di superficie algebriche: partendo infatti da un qualsiasi sistema continuo  $S$ , lineare o no, di superficie algebriche, i sistemi trasformati di questo mediante le operazioni del gruppo formeranno complessivamente un *corpo* di superficie, di un certo ordine  $n$ ; e il minimo sistema lineare contenente questo corpo, e così pure il minimo sistema lineare completo determinato dal medesimo gruppo base, saranno sistemi invarianti rispetto al gruppo  $G$  (cioè nuovi corpi). Fra questi sistemi ve ne saranno certo di quelli *semplici*, tali cioè che le superficie del sistema passanti per un punto generico di  $V_3$  non passeranno di conseguenza per altri punti variabili col primo, bastando all'uopo che sia semplice il sistema  $S$ . La varietà  $V_3$  potrà così rappresentarsi birazionalmente sopra un'altra varietà algebrica  $\Phi_3$ , sulla quale il gruppo continuo corrispondente a  $G$  risulterà *proiettivo*.

Nel gruppo proiettivo totale  $G_0$  della varietà  $\Phi_3$  vi è certamente qualche sottogruppo continuo  $\infty^1$  *algebrico* (cioè a traiettorie algebriche, e quindi, come è noto da tempo, *razionali*). Invero, se  $G_0$  è un gruppo non integra-

(1) Presentata nella seduta del 3 gennaio 1932.

bile, e contiene perciò almeno un sottogruppo  $\infty^3$  semplice, sono algebrici tutti i gruppi continui  $\infty^1$  contenuti nel precedente  $\infty^3$  (1). Se  $G_0$  è integrabile, si possono da esso staccare algebricamente sottogruppi invarianti di dimensioni decrescenti di un'unità per volta, e quindi anche certo un sottogruppo algebrico  $\infty^1$  (2). Le traiettorie di questo gruppo  $\infty^1$  formeranno, entro  $\Phi_3$ , una congruenza  $C$  del 1° ordine di curve razionali, dotata di varietà (superficie, linea, punto) unisecante (3); e perciò, con procedimento già usato ripetutamente nella Memoria cit. Enriques-Fano,  $\Phi_3$  potrà a sua volta trasformarsi birazionalmente in una nuova varietà, sulla quale alle linee della congruenza  $C$  corrispondano rette; in particolare in un cono  $I_3$  di uno spazio conveniente (sul quale a  $G_0$  corrisponderà un gruppo in generale non proiettivo).

*Ogni  $V_3$  algebrica regolare a generi tutti nulli, la quale ammetta un gruppo continuo finito di trasformazioni birazionali, è dunque riferibile birazionalmente a un cono.*

Questo cono  $I^3$  rappresenta d'altra parte l'insieme delle  $\infty^3$  coppie di punti appartenenti l'uno dei due a una curva razionale (generatrice del cono), l'altro alla superficie  $F$  sezioni iperpiana generica di  $I^3$ . Indicati con  $p_a, p_g$  i generi aritmetico e geometrico di  $F$ , sarà (4)  $I^3$  di genere geometrico  $P_g = 0$  (essendo qui  $p = 0$ ), genere aritmetico  $P_a = -p_a$  e irregolarità superficiale  $q_2 = p_g - p_a$ . Nel caso presente ( $V_3, I_3$  regolari a generi nulli) sarà dunque  $p_a = p_g = 0$ ; e la superficie  $F$ , sezione del cono  $I^3$ , sarà razionale, e razionali perciò anche  $I^3$  e  $V_3$ , oppure una superficie regolare di genere zero e bigenere  $> 0$ . Viceversa, ogni cono  $I^3$  proiettante una superficie a generi nulli e bigenere  $\geq 0$  ha tutti i generi nulli.

Il cono  $I_3$  proiettante una superficie regolare di genere zero e bigenere  $> 0$  ammette bensì gruppi continui proiettivi, ma non è razionale. Non è razionale infatti il sistema  $\infty^2$  delle sue generatrici: mentre d'altra parte entro una  $V_3$  razionale, ossia entro uno spazio  $S_3$ , ogni congruenza algebrica del 1° ordine di curve algebriche è razionale. Invero, entro  $S_3$ , queste curve incontrano un piano generico secondo i gruppi di punti di un'involuzione piana, che è appunto razionale. Per la stessa ragione, il detto cono  $I^3$  non è nemmeno riferibile a un'involuzione di  $S_3$ ; infatti una congruenza del 1° ordine sulla  $V_3$  rappresentativa di questa involuzione ha per immagine nello spazio  $S_3$  (che è in corrispondenza  $[n, 1]$  con quella involuzione) una congruenza anche del 1° ordine, e perciò razionale, generalmente appartenente alla detta involuzione; e anche se l'immagine in  $S_3$

(1) Ciò risulta dalle equazioni dei vari tipi di gruppo semplice proiettivo  $\infty^3$ , date in una mia Memoria del 1896 («Mem. R. Accad. di Torino», serie 2ª, t. 46; § 3).

(2) Per dettagli, v. la Memoria ENRIQUES-FANO negli «Annali di Matematica», ser. 2ª, t. 24, 1897; n. 9.

(3) ENRIQUES-FANO, Mem. cit., n. 7.

(4) SEVERI, «Rend. Circolo Matem. di Palermo», vol. 28, 1909; n. 28.



di ogni curva della prima congruenza si spezzasse in più curve staccate, sarebbero pur sempre razionali entrambe le congruenze. Questi coni  $\Gamma^3$  costituiscono dunque un tipo di  $V_3$  a generi nulli distinto dalle varietà semirazionali e pseudorazionali considerate in una mia comunicazione al Congresso Internazionale di Bologna (1928)<sup>(1)</sup>.

Concludiamo dunque: Una varietà algebrica  $V_3$  regolare e a generi tutti nulli, la quale ammette un gruppo continuo finito di trasformazioni birazionali, è razionale, oppure riferibile a un cono proiettante una superficie regolare di genere zero e bigenere  $> 0$ . Viceversa, una  $V_3$  algebrica regolare a generi nulli, non razionale nè riferibile a un cono del tipo suindicato (p. es. una varietà semirazionale), può ammettere trasformazioni birazionali, e anche schiere continue di trasformazioni birazionali, ma non gruppi continui finiti di tali trasformazioni.

Una involuzione di  $S_3$  è razionale o irrazionale secondo che, come varietà  $V_3$ , ammette o non ammette gruppi continui finiti di trasformazioni birazionali. In particolare un'involuzione irrazionale in  $S_3$  non può essere trasformata in sè da un gruppo continuo finito di trasformazioni cremoniane.

**Meccanica.** — *Di una condizione di sicurezza nell'avvitamento dei velivoli.* Nota<sup>(2)</sup> del Corrisp. G. A. CROCCO.

Malgrado gli studi teorici e sperimentali che proseguono da quindici anni su questo argomento, purtroppo ancora nella pratica del volo si verificano casi di mancata ripresa dall'avvitamento, anche da parte di piloti addestratissimi.

A nostro avviso ciò non si deve, come da qualcuno si è pensato, alla esistenza di misteriose forme di avvitamento sconosciute o irriducibili; poichè teoria, esperimenti, e rilievi hanno ormai perfettamente inquadrato il problema dinamico in tutta la sua estensione; ma soltanto alla mancanza di una precisa norma di costruzione e di collaudo che assicuri in ogni caso negli organi di comando la capacità sufficiente alla manovra di ripresa.

La presente nota ha lo scopo di indicare la via per concretare una simile condizione di sicurezza; e, frattanto, di formularne una approssimata.

Per lo scopo anzidetto immagineremo il fenomeno dell'avvitamento ridotto alla sua fase uniforme, e supporremo l'aria animata da una velocità verticale eguale e contraria a quella di caduta del velivolo. Per maggior semplicità supporremo fermo o a rilento il propulsore.

(1) « Atti del Congresso internaz. dei Matematici » (VI), Bologna 1928; vol. 4°, p. 115.

(2) Presentata nella seduta del 3 gennaio 1932.



L'avvitamento può allora immaginarsi come una rotazione *orizzontale* uniforme del centro di gravità del velivolo attorno a un asse verticale che diremo *asse della vite* e sul quale adageremo il vettore velocità del vento relativo,  $V$ ; mentre il velivolo ruota con pari velocità angolare, di vettore  $\Omega$ , attorno a un asse verticale baricentrico che tal vettore contiene.

Se  $R$  è il raggio vettore del moto circolare del baricentro, la posizione del velivolo, cui sono solidali nel solito modo tre assi  $XYZ$  che immagineremo coincidenti coi tre assi principali di inerzia, potrà riferirsi al piano ruotante verticale  $\Omega R$  ed all'asse verticale contenente  $\Omega$ .

Diremo perciò  $\alpha$  l'angolo di  $X$  con  $\Omega$ ;  $\varphi$  l'angolo diedro tra il piano  $X\Omega$  e il piano di simmetria del velivolo  $XZ$ ; e  $\psi$  l'angolo tra questo piano di simmetria e il piano  $\Omega R$ .

Ciò posto, riducendo le *azioni aerodinamiche* sul velivolo ruotante ad una unica forza baricentrica  $\mathfrak{F}$  ed ad una unica coppia  $\mathfrak{C}$ , basterà per definire il moto esprimere la condizione che esse dovranno opporsi alle *forze e alle coppie di massa*.

Chiamando pertanto  $\mathfrak{F}_G, \mathfrak{F}_R, \mathfrak{F}_O$  le tre componenti di  $\mathfrak{F}$  secondo la verticale, il raggio e la orizzontale, il moto del baricentro resterà condizionato dalle

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}_G = Q \\ \mathfrak{F}_R = m\Omega^2 R \\ \mathfrak{F}_O = \text{zero} \end{cases}$$

nelle quali  $Q$  ed  $m$  sono il peso e la massa del velivolo.

Dette poi  $p, q, r$  le componenti di  $\Omega$  secondo  $X, Y, Z$  si avrà

$$\begin{aligned} p &= \Omega \cos \alpha \\ q &= \Omega \sin \alpha \sin \varphi \\ r &= \Omega \sin \alpha \cos \varphi; \end{aligned}$$

onde, chiamando con  $A, B, C$  i tre momenti principali d'inerzia e con  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  le componenti della coppia aerodinamica  $\mathfrak{C}$  secondo  $X, Y, Z$ , la rotazione del velivolo attorno al baricentro sarà condizionata dalle

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = (B - C) \Omega^2 \sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \\ \mathfrak{M} = (C - A) \Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi \\ \mathfrak{N} = (A - B) \Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi. \end{cases}$$

Come è agevole verificare dalle (2) la coppia  $\mathfrak{C}$  risulterà in un piano orizzontale,

Nelle condizioni, (1) e (2), le tre componenti di  $\mathfrak{F}$  e le tre componenti di  $\mathcal{C}$  sono funzioni di  $V, \Omega, R, \alpha, \varphi, \psi$ ; nonchè di tre parametri  $\chi, \xi, \delta$  dipendenti dalla posizione dei tre comandi: alettoni, equilibratore, timone. Fissati dalla volontà del pilota questi tre parametri, rimangono sei equazioni con sei incognite; e la soluzione, se esiste, risulta *determinata*.

Teoria ed esperienze sono concordi nello stabilire che il campo delle soluzioni possibili dell'avvitamento è dominato dal valore dell'angolo  $\alpha$ , che continueremo a chiamare angolo d'incidenza; e corrisponde al campo cosiddetto dell'*autorotazione*, pel quale la coppia generata dalla rotazione  $p$  nel piano  $YZ$ , *favorisce* la rotazione stessa. Anche la coppia generata nel piano  $YZ$  dalla componente laterale della velocità relativa diviene notevole per forti valori di  $\alpha$  e può risultare in senso cospirante. All'infuori di quel campo, per valori di  $\alpha$  corrispondenti al volo normale, la prima delle coppie suddette risulta sempre in senso *contrario* alla rotazione, mentre la seconda tende a zero con  $\alpha$ ; cosicchè l'avvitamento non è più possibile ed il moto si riduce ad una discesa a spirale con valori di  $R$  ed  $\Omega$  di ordine di grandezza assai diverso.

Le più recenti e brillanti esperienze al vero di avvitamento <sup>(1)</sup> han permesso di precisare i vari valori con grande attendibilità e con posizioni diverse dei comandi. Per un biplano di 10 metri di apertura alare  $R$  è stato trovato tra 1 e 2 metri;  $\Omega$ , in radianti al secondo, tra 2 e 3 circa. Il campo dell'angolo  $\alpha$  oscillò tra 39° e 51°.

La relazione tra  $\Omega, V$  e l'apertura  $b$ , formulata da Glauert,

$$(3) \quad \Phi = \frac{\Omega b}{2V}$$

e che con gli americani chiameremo *coefficiente di avvitamento*, risultò tra 0.443 e 0.622. Furono infine calcolati, *consuntivamente*, i valori di  $\mathfrak{F}$  e  $\mathcal{C}$ .

Queste esperienze non insegnano però nulla dal punto di vista *preventivo*.

Nè i tentativi teorici per riavvicinare  $\mathfrak{F}$  e  $\mathcal{C}$  ai valori  $F$  e  $C$ , calcolati in autorotazione <sup>(2)</sup> dalle polari ordinarie del modello, han dato risultati attendibili in ogni caso <sup>(3)</sup>.

Nel fatto  $\mathfrak{F}$  e  $\mathcal{C}$  non dipendono soltanto da  $V, \Omega$  e  $\alpha$ ; ma altresì da  $R, \varphi, \psi$ .

È stato quindi proposto di ricavarli da un modello rotante in condizioni di « similitudine » entro gallerie di vento verticale ascendente.

(1) « N. A. C. A. », Report, n. 377.

(2) GLAUERT, « British R & M », n. 595.

(3) « American Air Corps Inform. Circ. », nn. 609 e 613.



Per tale similitudine occorre tuttavia non soltanto che le masse del modello sieno similmente disposte ma altresì che il suo peso stia a quello del velivolo come il cubo delle dimensioni e che il vento della galleria stia a quello relativo al velivolo come la radice quadrata delle rispettive dimensioni. Soltanto in gallerie a pressione diversa dalla atmosferica potrebbero venir variati questi rapporti.

Ad ovviare le difficoltà connesse con queste condizioni restrittive e tenendo presente lo scopo di questa Nota noi proponiamo invece il metodo seguente sufficientemente approssimato.

Il modello, in scala di similitudine geometrica, sarà libero di ruotare attorno ad un asse verticale baricentrico, il quale asse formerà il lato di un parallelogrammo articolato di cui il lato opposto, anch'esso verticale costituirà *l'asse della vite*.

Tutto il parallelogramma articolato rimarrà libero di ruotare attorno a quest'ultimo asse; e si intenderà contrappesato a tutti gli effetti di massa e protetto dalle azioni aerodinamiche.

Il peso del modello, che dovrà essere sostenuto dal vento ascendente della galleria verticale, sarà scelto come più conviene e tale da consentire velocità di vento superiori a quelle che risulterebbero dalla condizione di similitudine dianzi accennata.

Per quanto riguarda invece la sua forza centrifuga, la massa del modello verrà contrappesata orizzontalmente in modo da corrispondere alla citata legge del cubo delle dimensioni. Così facendo, per ogni posizione angolare del modello, è agevole dimostrare che il raggio della vite risulterà automaticamente in proporzione colle dimensioni.

La posizione angolare del modello, anzichè libera, come nel metodo di similitudine anzidetto, verrà fissata secondo i criteri seguenti.

È anzitutto da tener presente che lo scopo della ricerca non è già la riproduzione in scala di un particolare avvitaumento, ma bensì la determinazione della capacità dei comandi nella ripresa: e soprattutto, come chiariremo più innanzi, del momento raddrizzante  $\mathfrak{M}_1$ , fornito dall'equilibratore. Cosicchè, piuttosto che precisare le varie posizioni angolari corrispondenti a varie posizioni dei comandi, interessa conoscere l'influenza delle più svariate attitudini angolari del modello sul corrispondente valore del massimo  $\mathfrak{M}_1$ .

D'altra parte le relazioni tra l'angolo  $\alpha$  e l'angolo  $\varphi$  sono così variabili in uno stesso aeroplano appena si variano le condizioni di carico a bordo che il prefissarli entrambi accresce la generalità della ricerca, anzichè restringerla. Nel prefissare perciò, contemporaneamente, i parametri  $\chi$  e  $\delta$ , si presuppone implicitamente che a ciò corrisponda nel velivolo al vero un appropriato valore dei momenti precessionali d'inerzia.

In base a tali considerazioni si escluderanno dagli esperimenti i momenti dovuti alle masse, facendo rigorosamente eguali nel modello i tre momenti principali d'inerzia; e si fisserà la posizione angolare del modello



e quella dei comandi, disponendo così, in vari gruppi, le cinque variabili  $\alpha, \varphi, \chi, \delta, \xi$ ; alle quali corrisponderanno automaticamente nella corrispondente autorotazione del modello, se esistente, le variabili  $V, \Omega, R, \psi$ .

Si misureranno allora, per ogni gruppo delle variabili, i valori di  $\Omega, V, \mathfrak{M}_r$ ; ottenendo così, è vero, d'includere nell'esperimento anche soluzioni non corrispondenti alla realtà; ma riuscendo a misurare  $\mathfrak{M}_r$  nelle più svariate condizioni aerodinamiche.

Ci riserviamo di concretare e di applicare questo metodo nella nostra galleria verticale didattica della Scuola di Ingegneria Aeronautica di Roma.

Il metodo precedente consente dunque di determinare nei più svariati casi possibili il valore della coppia raddrizzante  $\mathfrak{M}_r$  dalla quale unicamente dipende la ripresa dall'avvitamento.

Se, infatti, la coppia raddrizzante  $\mathfrak{M}_r$  ottenuta dal modello predisponendo l'equilibratore nella sua massima posizione a *picchiare* e riportata in vera grandezza, risulta *in ogni caso* superiore in valore assoluto al corrispondente momento precessionale di inerzia del velivolo, non v'ha dubbio che così operando si creerà nella seconda delle (2) una disequaglianza tendente a generare una accelerazione angolare *nel senso di  $\alpha$  decrescente* ed a ridurre quindi tale angolo, dopo un periodo variabile più o meno lungo, quanto basta per sopprimere la possibilità di ogni coppia motrice nel piano YZ e fermare di conseguenza l'avvitamento.

Per ottenere pertanto la richiesta condizione di sicurezza, basterà formulare la disequaglianza suddetta.

Porremo a questo scopo, in valore assoluto:

$$(4) \quad \mathfrak{M}_r = \dot{C}_m^* \rho S V^2 l_m$$

dove  $\dot{C}_m^*$  si intende ricavato dagli esperimenti sul modello secondo i criteri suaccennati;  $\rho, S, l_m$  sono rispettivamente la densità dell'aria alla quale si suppone avvenga l'avvitamento del velivolo, la superficie delle ali e la loro corda media aerodinamica.

Inoltre dalle misure di  $\Omega$  e  $V$  del modello ricaveremo il *coefficiente di avvitamento*  $\Phi$ .

Poichè la seconda delle (2) durante la ripresa deve fornire

$$(5) \quad \mathfrak{M}_r > (C - A) \Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi;$$

introducendo nella (5) la (3) e la (4) si potrà scrivere la precedente condizione sotto la forma:

$$(6) \quad \frac{\dot{C}_m^*}{4 \Phi^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi} > \frac{C - A}{\rho S l_m b^2};$$

nella quale entrambi i membri sono ridotti a coefficienti adimensionali: il primo ricavato dalle esperienze sul modello per ciascun gruppo di variabili; il secondo risultante dalle caratteristiche geometriche e di massa del velivolo al vero.

Ove la (6) riesca verificata in tutti i casi praticamente possibili, essa rappresenterà la cercata *condizione di sicurezza* per la ripresa dall'avvitamento.

In attesa che le esperienze forniscano i valori di  $\dot{C}_m^*$  su indicati si potrà sostituirli con valori approssimati ricavati in autorotazione semplice, cioè per  $R = 0$ ;  $\varphi = 0$ : o calcolando  $\Phi$  ed  $\mathfrak{N}_1$  col metodo di Glauert dalle caratteristiche del modello non rotante, estese da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ .

Utili ragguagli daranno anche i valori ordinari di  $C_m$  del modello non rotante, considerandoli in contrapposto ai coefficienti  $C_F$  della totale azione aerodinamica allo scopo di esaminare l'influenza della posizione del baricentro.

Infine, e sempre in tema di approssimazioni, si potrà valutare  $\dot{C}_m^*$  in base alle portanze massime dell'ala e della coda, o meglio ai massimi coefficienti della totale azione aerodinamica, raggiungibili per angoli elevati.

In tal caso, detti  $C_F$  e  $c_F$  questi coefficienti per l'ala e per la coda; detta  $x_g$  la distanza del baricentro dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica; ed  $x_p$  la distanza del centro di pressione del sistema alare per i grandi angoli d'incidenza, potremo scrivere

$$\mathfrak{N}_1 = \rho V^2 [C_F S (x_p - x_g) + c_F sa]$$

ove  $s$  è la superficie della coda orizzontale ed  $a$  la distanza della cerniera dal baricentro.

Ne ricaveremo il valore

$$(7) \quad \dot{C}_m^* \cong C_F \frac{x_p - x_g}{l_m} + c_F \frac{sa}{Sl_m}$$

nel quale appare lo spostamento relativo del centro di pressione ed il *rapporto volumetrico di coda*,  $Sl_m : sa$ .

In corrispondenza a questa ipotesi limite, si assumerà per  $\cos \alpha \sin \alpha$  il massimo valore, 0.5; e per  $\Phi^2$  il massimo valore, anch'esso eguale a 0.5, sinora riscontrato; cosicchè, ritenuto  $\cos \varphi = 1$ , si porrà

$$4 \Phi^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi \cong 1$$

e la condizione di sicurezza diverrà

$$(8) \quad \dot{C}_m^* > \frac{C - A}{\rho Sl_m b^2}.$$



Per i monopiani si potrà ritenere  $C_F = 0.7$  e  $x_p = 0.5 l_m$ ; per i biplani *non scalati*  $C_F = 0.5$ ;  $x_p = 0.4 l_m$ . Cosicchè, posto  $c_F = 0.5$ , la (8) determinerà il *rapporto volumetrico di coda* ritenuto necessario ad assicurare la ripresa, in corrispondenza della posizione,  $x_g$ , del baricentro e del momento precessionale d'inerzia,  $C - A$ .

S'intende infine che la condizione (6) sarà tanto meno severa quanto più la capacità degli altri comandi sarà tale da favorire la manovra di ripresa.

### **Chimica.** — *Azione del carbonato di soda sulla cellulosa.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio E. PATERNÒ.

L'azione dell'acqua e degli alcali, particolarmente dell'idrato di sodio, è stata largamente studiata da parecchi chimici — basti citare il lavoro di M. Robinoff (1912) — ed è stato variamente discusso sui fenomeni che accompagnano queste azioni dal punto di vista della imbibizione, dell'adsorbimento, della plasmolisi e delle varie reazioni chimiche, ma non si è pervenuti a risultati concludenti e precisi ed anche in questi studi si è avvertito quello che osserva il Karrer (Polymere Kohlenhydrate, p. 198) che nello studio della cellulosa non è possibile riprodurre esattamente una esperienza.

Ma pur tuttavia può dirsi che i fenomeni dell'assorbimento di liquidi da parte della cellulosa sono sufficientemente noti per quanto singolarmente discutibili. L'assorbimento è generalmente accompagnato da rigonfiamento della cellulosa; ma non tutti i liquidi danno luogo a questo fenomeno, per esempio l'etere, l'alcool e l'acido acetico.

Abbiamo creduto utile di studiare il comportamento della cellulosa anche con le soluzioni di carbonato di sodio. Il nostro studio non può dirsi completo in tutte le sue parti, perchè non abbiamo studiato il fenomeno con soluzioni a concentrazione diversa ed a varie temperature.

Abbiamo operato, seguendo le indicazioni di Flusin, tagliando dai fogli di cellulosa dei dischi circolari del diametro di cca. 10 cm., che dissecati a 100° e pesati, si immergono nella soluzione e vi si lasciano per tre ore alla temperatura ambiente (10°–12° C); poscia si lasciano sgocciolare rapidamente, si collocano sopra carta da filtro, e si opera una leggera pressione con un rapido movimento della palma della mano; si rinnova la carta e si ripete questa operazione per altre due volte. Si pesa allo stato umido in un adatto pesafiltri tarato, e si ripesa nuovamente dopo essiccamento a 100°.

Abbiamo adoperato sempre la stessa soluzione contenente il 10.36 % di carbonato. Le esperienze sono state estese alla cellulosa di abete di diverse fabbriche, a quella di sparto (di Pomilio e di Bussi), a quelle di paglia ed a quella di canapoli.

I risultati ottenuti sono raccolti nel seguente quadro:

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.



	Farsag	Borregard V. S.	Borregard S. I.	KYRK-BYN	Toble	Tolen	Kyrkbyn Sylk	Kirchby	Sparto	Paglia	Cana-poli
N. 1 - Umidità a 100° . . . . .	8.2	7.6	7.6	8.4	8.0	7.9	7.3	7.4	7.4	9.2	9.3
N. 2 - Cenere . . . . .	0.46	0.40	0.34	0.43	0.50	0.40	0.26	0.12	1.04	1.60	2.0
N. 3 - Assorbimento di acqua in 4 ore . .	118.0	142.0	126.0	125.0	158.0	98.0	126.7	125.0	100.0	152.0	116.0
N. 4 - Assorbimento di acqua in 4 ore a 55°											
N. 5 - Assorbimento di soluzione di Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> al 10.65 % in 3-4 ore a 12° . . . .	122.5	144.0	139.0	127.0	163.0	90.0	127.0	—	—	—	—
N. 6 - Perdita di peso per immersione nell'acqua a 10°-12° . . . . .	0.43	—	0.34	0.51	0.57	0.53	—	—	—	—	—
N. 7 - Percentuale di Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> trattenuto dopo l'azione a 12° . . . . .	10.2	12.5	11.2	10.8	14.6	20.1	—	—	—	—	—
N. 8 - Perdita di peso per immersione nell'acqua a 55° . . . . .	1.71	1.08	2.36	2.01	—	0.76	—	—	—	—	—

In una esperienza colla cellulosa Kyrkebyn, nella quale era stata adoperata soluzione di carbonato al 9.14 % e si era operato a 15°, si ebbe un assorbimento di gr. 7.39 di soluzione, ed il carbonato di sodio trattenuto (dopo disseccamento) ascendeva a gr. 0.57. I gr. 7.39 di soluzione, ne contengono gr. 0.619; la differenza fa credere che adsorbimento del sale non sia avvenuta.

Da queste esperienze e da altre, risulta che la cellulosa delle varie origini, per tre ore di immersione in acqua alla temperatura ordinaria, perde 0.5 % del suo peso, e che tale perdita si raddoppia a 50°. Risulta pure che nelle varie cellulose l'assorbimento di acqua e di soluzione di carbonato può, alla temperatura di 10°-12°, considerarsi come eguale e caratteristica per una data cellulosa. Esso varia dal 98 al 152 % nelle differenti cellulose di legno al solfito, e negli stessi limiti è compreso anche quello della cellulosa di paglia, sparto e canapoli preparata al cloro.

Senza ricorrere a calcoli che non hanno valore, risulta pure che l'assorbimento dell'acqua e della soluzione di carbonato corrispondono completamente per ogni varietà di cellulosa, e che il maggior peso della soluzione di carbonato assorbito è soltanto in dipendenza del peso specifico diverso, onde può concludersi che si tratta di una semplice imbibizione dovuta alla porosità.

Osserveremo pure che la proporzione del carbonato di sodio a 10° o 50° muta di poco, perchè oscilla fra 6.67 e 6.62 gr.

Questa esperienza abbiamo esteso anche alle soluzioni di fosfato bisodico al 5 %, ed abbiamo trovato che una striscia di cellulosa di fabbrica del peso di gr. 6.8 e dello spessore di 0.72, dopo tre ore di immersione a temperatura ambiente, pesava gr. 20.75 e presentava lo spessore di 1.02. La stessa cellulosa con acqua raddoppia lo spessore ed il peso aumenta quanto con la soluzione (circa gr. 21).

Nelle esperienze con acido acetico abbiamo operato con acido glaciale e con acido diluito al 50 e al 25 %. Il peso della cellulosa con la sola acqua da gr. 16.10 salì a gr. 26.20.

	Peso della cell.	Aumento peso	Aumento spessore in % dello spess. primitivo
Con acido glaciale	gr. 16	30.63	11.4
»    »    50 %	» 16.11	31.04	11.9
»    »    25 %	» 15.71	32.04	12.8

Il peso dunque si raddoppia all'incirca e lo spessore rimane praticamente il medesimo aumentando ad es. con l'acido acetico da mm. 0.58 a 0.68.

Un'altra serie di esperienze sull'azione del carbonato di sodio sulla cellulosa abbiamo fatto con cellulosa dei linters, con cellulosa esaurita e con

cellulosa di fabbrica, operando con soluzioni di carbonato al 10, al 15, al 20 e al 25 %, facendo bollire in un pallone per tre ore, lasciando raffreddare, filtrando e determinando col bicromato di potassio la quantità di sostanza organica disciolta (emicellulosa con termine di fabbrica). I risultati furono i seguenti:

	10 %	15 %	20 %	25 %
Linters	2.46	2.59	2.72	2.92
Cell. esaurita	1.26	1.67	1.53	2.07
Seta (chappe)	2.04	2.21	2.59	2.46
Cell. Fabbrica	7.36	7.31	7.85	8.26

Da queste esperienze consegue che la differenza fra la concentrazione del carbonato da 10 a 25 %, ha un'influenza assai limitata e che i prodotti esaminati possono così graduarsi per rapporto alla loro solubilità in soluzione di carbonato di sodio:

- 1° Cellulosa esaurita (solubilità minima).
- 2° Seta.
- 3° Linters.
- 4° Cellulosa di Fabbrica (solubilità massima).

Mentre, come vedremo in altra occasione, con la soluzione di idrato sodico, la scala è diversa:

- 1° Cellulosa esaurita (solubilità minima).
- 2° Linters.
- 3° Cellulosa di Fabbrica.
- 4° Seta (solubilità massima).

In altre esperienze si è fatto un primo ed un secondo trattamento con soluzione di carbonato sodico al 15 % sempre a caldo, ed il prodotto così ottenuto fu trattato con idrato sodico al 18 %, per determinarne l'emicellulosa, la  $\beta$ -cellulosa e la  $\gamma$ -cellulosa:

	E-cellulosa	B-cellulosa	G-cellulosa
Cell. di Fabrica	7.30	3.69	3.61
» esaurita	2.97	2.53	0.44
Linters	1.84	1.56	0.28
Seta (chappe)	22.10	22.04	0.06

Dai quali dati risulta evidente che il prodotto sciolto dal carbonato è esclusivamente quel miscuglio indefinito che è stato indicato col nome di G-cellulosa. Ed è degno di nota che la seta artificiale, che può dirsi non ceda nulla al carbonato, contiene perciò esclusivamente quella sostanza che viene indicata col nome di  $\beta$ -cellulosa. Anche i Linters e la cellulosa



esaurita contengono pochissima  $\gamma$ -cellulosa, mentre la cellulosa di Fabbrica contiene la  $\beta$ -cellulosa e la  $\gamma$ -cellulosa in proporzioni che possono dirsi eguali.

Osserviamo pure che in una cellulosa di Fabbrica, che prima del trattamento con soluzione di carbonato sodico conteneva 9.63 % di emicellulosa e 2.26 % di pentosani, dopo il trattamento con soluzione di carbonato di sodio al 15 % all'ebollizione, forniva 5.18 % di emicellulosa e 1.04 % di pentosani, cioè la metà circa di prima. Osserveremo pure che in una esperienza di preparazione della viscosa con cellulosa di fabbrica, prima e dopo il trattamento con carbonato di sodio, si ebbe per la viscosità nel primo caso 7" e nel secondo 12".

Mettendo in relazione questo risultato con altre esperienze relative alla preparazione della Viscosa con una cellulosa contenente notevole proporzione di  $\gamma$ -cellulosa e di pentosani (cellulosa di sparto) con la quale si ebbe una Viscosa molto fluida, risulta che la  $\gamma$ -cellulosa ed i pentosani sono dannosi alla preparazione di una Viscosa adatta.

Ora il procedimento da noi escogitato del trattamento preventivo della cellulosa con carbonato sodico, suggerisce un metodo per depurare la cellulosa il quale forse rende possibile la preparazione di una buona Viscosa con cellulose che finora sono state dichiarate non adatte, oltre a dare la certezza di operare sempre con cellulosa di notevole grado di uniformità. La maggiore o minore proporzione della  $\beta$ -cellulosa non è dannosa nella preparazione della Viscosa, anzi può essere utile perchè diminuisce la durata della maturazione dell'alcali-cellulosa e dello stesso xantogenato.

Il risultato di queste esperienze avrà senza dubbio una notevole importanza nella industria della seta artificiale e contribuirà a rendere questa industria indipendente dall'impiego della materia prima estera.

Non crediamo inutile di fornire alcuni dei risultati analitici ottenuti sulle varie cellulose adoperate dalla Chatillon:

Provenienza	Data	Peso per mq.	Spessore medio	Quellung	H <sub>2</sub> O %	Ceneri %	A-cell. %	Emicell. %	N. cellulosa	N. C. corr.
		gr.	mm.							
Rattimau . . . . .	11-4-1924	570	7.0	455	8.73	0.28	87.10	11.50	0.32	1.8
Rattimau . . . . .	14-5-1924	—	—	555	6.70	0.20	86.50	11.50	0.40	2.3
Toten . . . . .	12-7-1924	480	6.5	450	9.79	0.24	86.27	12.73	0.35	2.3
Kirkessilk . . . . .	9-9-1924	530	6.75	420	6.76	0.21	87.74	11.15	0.28	1.8
Kipana . . . . .	15-9-1924	560	—	370	9.08	0.17	90.01	9.46	0.19	1.6
» . . . . .	20-9-1924	565	6.8	430	7.76	0.16	89.08	10.72	0.50	1.99
Kirkessilk . . . . .	15-10-1924	535	8.2	430	9.63	0.19	88.42	9.37	0.25	1.51
Wolsinn . . . . .	22-10-1924	640	8.3	470	9.50	0.25	86.10	11.06	0.38	2.02
Ekmann . . . . .	10-11-1924	480	8.5	330	8.75	0.25	88.58	11.05	0.03	1.99
Kirkessilk . . . . .	12-11-1924	570	7.5	350	9.61	0.20	88.30	11.19	0.20	1.71
» . . . . .	18-11-1924	545	7.5	450	8.31	0.20	89.36	10.36	0.13	1.66
» . . . . .	28-11-1924	540	6.5	420	7.32	0.23	86.03	12.90	0.25	1.78
» . . . . .	30-12-1924	530	7.5	430	8.20	0.22	—	12.30	0.32	1.75
» . . . . .	13-1-1925	540	7.85	425	7.39	0.23	86.38	13.54	0.16	1.75
» . . . . .	20-1-1925	565	7.8	430	8.84	0.29	88.13	11.16	0.20	1.78
» . . . . .	22-1-1925	525	7.02	450	8.90	0.28	87.90	12.60	0.25	1.74
» . . . . .	31-1-1925	595	6.8	460	11.57	0.27	88.84	10.60	0.30	1.70
» . . . . .	11-2-1925	600	6.5	500	9.3	0.27	87.32	11.91	0.24	1.44
Rottweil . . . . .	11-2-1925	450	7.8	360	11.08	0.22	89.89	9.03	0.21	1.20

Diamo inoltre i risultati di un'analisi più dettagliata della cellulosa Kirke-Silk :

Umidità . . . . .	7.30
Ceneri . . . . .	0.16
A-cellulosa . . . . .	82.02
B-cellulosa . . . . .	1.99
Mannano . . . . .	2.30
Gallatano . . . . .	—
Pentosani . . . . .	2.99
Grassi e resine . . . . .	1.16

## Chimica. — *Cellulosa esaurita*. Nota <sup>(1)</sup> del Socio E. PATERNÒ.

L'azione dell'idrato sodico sulla cellulosa è stata largamente studiata sulle varie qualità di cellulosa tenendo conto della concentrazione della soluzione, della durata dell'azione, della temperatura ed anche della pressione. Gli studi principali sono stati però rivolti alla formazione e composizione dell'alcali cellulosa ed alla sua natura chimica. A noi non interessa occuparci di queste estese ed ampie ricerche, nè contiamo in questa occasione occuparci del dibattito sulla natura chimica dell'alcali-cellulosa, neanche per discutere le considerazioni che ci confortano nella supposizione che l'alcalicellulosa non sia un vero e proprio composto, ma debba invece considerarsi come un prodotto di adsorbimento. Noi ci siamo limitati per ora al miglior esame dei prodotti secondari che accompagnano la cellulosa del legno e di talune piante, mentre mancano quasi del tutto nel cotone, e che vengono comunemente indicati col nome di emicellulosa, ed abbiamo diretto principalmente il nostro esame a stabilire se veramente tali prodotti siano originalmente contenuti nelle piante, o se piuttosto non si formino nei trattamenti a cui sono sottoposte per estrarne e purificarne la cellulosa.

Il complesso di prodotti indicati col nome di emicellulosa contiene essenzialmente due corpi abbastanza definiti che sono i pentosani e la  $\beta$ -cellulosa.

Le nostre prime esperienze sono state dirette a conoscere se nel trattamento della cellulosa con soda al 18% insieme alla sodiocellulosa si forma una emi-cellulosa. A questo scopo abbiamo trattato la cellulosa ripetutamente con soda al 18%. Una prima serie di esperienze fu fatta mercerizzando la cellulosa con soluzione di soda a circa 18%, nella stessa proporzione durata e temperatura che si usa in fabbrica per preparare la sodio-cellulosa; dopo 45 minuti si preleva una porzione della soda e si sostituisce con un egual volume di nuova soda, si ripete l'operazione fino a che la soda prelevata non trasporti più materia organica. Dopo 10 o 12 operazioni la soda non conteneva che 0,2% di sostanza organica calcolata come  $C_6H_{10}O_5$ , quantità che può dirsi dovuta a tracce di fibra trasportata meccanicamente. La cellulosa rigenerata dopo la 12ª operazione si torna a trattare con soda al 18%, e sono allora sufficienti 5 trattamenti perchè non passi più nulla in soluzione. Si rigenera la cellulosa per una 2ª volta e si sottopone per una 3ª volta al trattamento con soda. Non daremo i singoli risultati, ci basti notare che la emicellulosa estratta fu trovata:

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

nella 1 <sup>a</sup> serie (12 trattamenti)	12.06 %
» 2 <sup>a</sup> » (5 » )	1.55
» 3 <sup>a</sup> » (5 » )	0.59
Totale di emicellosa	14.20 %

La cellulosa così ottenuta, come vedremo, deve considerarsi, come *cellulosa pura* e la chiameremo, col nome di *cellulosa esaurita*, per distinguerla dalla cellulosa pura o standard preparata da Carey e Bray (Cell. Chem. 1923,4) e dalla cellulosa A di Hess. Diremo intanto che operando (come abbiamo fatto colla cellulosa di legno) con cellulosa di cotone non siamo mai riusciti ad estrarre più del 2 % di sostanza solubile in soda. Per formarsi un concetto più preciso del fenomeno abbiamo voluto ripetere le precedenti esperienze con idrocellulosa, preparata col processo Girard dalla cellulosa di fabbrica o dall'ovatta. I risultati furono:

	Idrocellulosa dalla cellulosa di fabbr.	Idrocellulosa dall'ovatta
1 <sup>a</sup> serie	11.32	11.88
2 <sup>a</sup> »	0.37	0.48
3 <sup>a</sup> »	0.46	0.59
Totale . . .	12.15	12.95

Queste esperienze sono importanti, perchè l'identità pratica dei risultati ottenuti con l'idrocellulosa dal cotone e con l'idrocellulosa dalla cellulosa di fabbrica prova che il 12.95 % di sostanza solubile in soda è prodotta nella trasformazione del cotone in idrocellulosa, ed esse mostrano che le idrocellulose non differiscono dalla cellulosa soltanto perchè contengono acqua, ma hanno una costituzione essenzialmente diversa, che non può svelarsi con l'analisi organica, perchè il prodotto che si forma ha una composizione eguale a quella della cellulosa, o almeno assai vicina ad essa. Questo risultato getta nuova luce sulla natura delle idrocellulose, e quanto è stato scritto finora su di esse perde ogni significato ed ogni valore.

Della cellulosa esaurita non abbiamo avuto il tempo di fare uno studio completo. Ma ci siamo assicurati che essa poteva facilmente alterarsi e dare nuovo prodotto solubile in soda (emicellosa).

La cellulosa esaurita, dopo che è rimasta per parecchi giorni esposta all'aria, contiene nuovamente proporzioni notevoli di parte solubile in soda. Un campione che ne conteneva 4.19 % riscaldato per 10 ore a 100° in corrente di ossigeno, ne conteneva 11.43 %; scaldato a 200° lo stesso in corrente di ossigeno, ne conteneva 30.69 %.



Ritourneremo su queste esperienze, e diremo però che sebbene la cellulosa esaurita fosse stata lavata sino a reazione neutra alla fenolfaleina, sono mancate le determinazioni delle ceneri.

Finalmente abbiamo studiato la idrolisi della cellulosa esaurita in confronto all'ovatta. Per la idrolisi abbiamo seguito il procedimento di Willstätter e Zechmeister, operando con acido cloridrico al 42 % (soluzione satura a 0°).

Abbiamo fatto precedere un breve studio di confronto delle determinazioni del glucosio coi procedimenti di Schandrock di Bertrand, e gravimetrico. In una soluzione di glucosio puro che, secondo i pesi della preparazione, conteneva 10.08 % di glucosio, abbiamo trovato:

Al polarimetro. . . . .	10.18 %
Col processo gravimetrico . . .	9.93 - 10.05
» » Schandrock . . .	9.73 - 10.10
» » Bertrand . . . .	10.68 - 10.68

Esperienze comparative con ovatta, cellulosa esaurita e cellulosa di fabbrica:

	Ovatta	Cell. esaurita	Cell. di Fabbr.
Polarimetro. . .	107 %	102 %	108 %
Processo gravim. .	116	121	—
» Bertrand . . .	115	117	—

Nelle idrocellulose sembra che il rendimento sia minore perchè si è avuto:

con l'idrocellulosa di Knotz al polarimetro. . . . .	76.6 %
con la seta (chappe) . . . . .	97.8

Il teorico, per la trasformazione integrale della cellulosa in glucosio è 111.11. Prendendo la media dei tre processi si ha:

Ovatta . . . . .	112.66	} non fu operato con prodotti dis-
Cellulosa esaurita . . . .	113.33	

La differenza fra l'ovatta e la cellulosa esaurita è assai piccola; resta solo a spiegare il piccolo aumento che si è ottenuto rispetto al risultato teorico.

Dal complesso di queste esperienze risulta:

1°) Che la cellulosa esaurita è una forma di cellulosa pura.

2°) Che alcuni dei prodotti chiamati col nome complessivo di emicellulosa, siano o no preesistenti nel legno, si formano anche per l'azione dell'aria, specialmente in presenza di acqua o di sali, e tanto più in presenza di alcali.

Vedremo in un'altra Nota la natura di questi prodotti; intanto non dimentichiamo che la identità nella proporzione ottenuta di glucosio non è una prova assoluta, perchè anche una cellulosa mischiata ad un possibile amiloide, o ad una destrina, darebbe la stessa quantità di glucosio.

**Chimica.** — *Ossi-cellulosa e sua identità con la  $\beta$ -cellulosa e la cellodestrina.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio E. PATERNÒ.

Non faremo la storia delle numerose ossicellulose descritte, la quale rappresenta uno degli esponenti più caratteristici delle confusioni e delle incertezze che predominano nello studio chimico della cellulosa; ed anche della ostinazione di molti chimici a non volersi svincolare da vecchi pregiudizi. Così si cominciò dal supporre che, essendo la formula più semplice della cellulosa  $C_6H_{10}O_5$ , e presentando essa le caratteristiche dei gruppi aldeidico, alcoolico e chetonico, potesse per ossidazione trasformarsi in acido, e questo pregiudizio fu avvalorato dal fatto che l'ossicellulosa è solubile nella soda diluita ed è riprecipitata dagli acidi. Al pregiudizio si aggiunse l'errore di supporre che i vari mezzi ossidanti producessero altrettante ossicellulose diverse, fondandosi su caratteri differenziali che si riscontrano largamente in una stessa sostanza, e che sono dovuti allo stato di aggregazione più che ad altro.

Non si può negare che lo studio della cellulosa presenta delle grandi difficoltà per la variabilità dei risultati e per la giusta osservazione del Karrer che difficilmente si riesce a riprodurre, in questo campo, una stessa esperienza cogli stessi risultati.

I corpi appartenenti ai tre regni della natura, animale vegetale e minerale, pure essendo costituiti dagli stessi elementi, presentano però dei gruppi di sostanze fondamentali e caratteristici per ciascuno che si distinguono dagli altri composti chimici per la multiforme apparenza e la facilità di trasformazione continua e blanda. Noi alludiamo alla silice, alla cellulosa ed agli albuminoidi, che formano diremo il fondamento sul quale si erigono i minerali, le piante e gli animali, pure avendo tra di loro strette relazioni e talvolta presentando qualche aspetto comune.

Del resto anche nelle trasformazioni dei corpi che la nostra natura presenta, si procede per gradi e si trovano delle forme di transizione.

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.



La silice nel regno minerale presenta analogie con la cellulosa, amido, pentosani in quello vegetale, gli albuminoidi, le lecitine, i peptoni e via dicendo in quello animale. Troppo per le lunghe ci porterebbe questo confronto, e ci basti averlo accennato. Ma un accenno, anche sommario, alle analogie fra silice, cellulosa e albuminoidi, non è inutile per coloro che vogliono studiare la cellulosa con larghezza di pensiero, e può servire da guida e giudice nelle ricerche sperimentali.

Ma fermiamoci all'ossicellulosa. Nella nostra mente è chiaro il pensiero che la cellulosa delle più svariate origini convenientemente purificata sia un idrato di carbonio  $C_6H_{10}O_5$  fortemente polimerizzato. Essa è un corpo però polimorfo e tanto essa quanto taluni dei suoi derivati più complessi possono avere caratteri ed apparenza diversi, secondo lo stato di aggregazione, e possono assumere, come ogni colloide, la forma di *sol*, di *gel*, e quella di masse insolubili per quanto alterabili per l'azione degli agenti atmosferici e della temperatura. Essa è una sostanza integralmente idrolizzabile in glucosio, ma che con determinati agenti e condizioni speciali, prima di trasformarsi in glucosio forma dei prodotti intermedi di idrolisi parziale o di depolimerizzazione fra i quali una specie di destrina, l'amiloide, il cellobiosio ecc.

La cellulosa è un corpo ossidabile, e ne è prova il suo potere riduttore rispetto al bicromato, al permanganato, all'acqua ossigenata e via dicendo.

Noi abbiamo preparato l'ossicellulosa con molti dei metodi proposti, come ad es. quello di Knotz (permanganato in soluzione alcalina), quello di Witz e Nastukoff (ipoclorito) ecc., ed abbiamo comparato questi prodotti con quelli di Ekström ottenuti per azione dell'acido solforico sulla cellulosa e con i seguenti:

1°) Beta-cellulosa ottenuta precipitando con un acido la soda servita alla preparazione della sodio-cellulosa di fabbrica;

2°) prodotti che si ottengono precipitando con acidi le soluzioni di cellulosa nel liquido di Schweitzer, sia soluzioni recenti sia soluzioni « mature » o trattate con ossigeno;

3°) prodotti estratti dalla seta artificiale con soda al 18 % e riprecipitati con acidi;

4°) prodotti estratti con calce e barite dalle varie cellulose e dalla seta artificiale (cellodestrina);

5°) prodotti ottenuti precipitando la viscosa con acidi (idrocellulosa di Knövenagel e Busch) o a mezzo della corrente elettrica;

6°) prodotti di ossidazione dell'alcali cellulosa mediante ossigeno a temperature varie, ecc. ecc.

Non abbiamo creduto necessario di controllare l'affermazione di Hess che l'ossicellulosa (« Cell. Chem. », 1925, p. 78) non sia altro che *Cellulosa*  $\alpha$  mischiata meccanicamente con prodotti della sua ossidazione, perchè ci sembra in contraddizione con tutti i fatti conosciuti, che cioè si rigeneri della cellulosa (anche distinguendola con la lettera  $\alpha$ ) da un acetato cristallizzato.

Rammenteremo, ma solo a titolo di cronaca, che Heuser e Schütte («Cell. Chem.», marzo 1926) hanno dedotto recentemente dalla determinazione del numero di rame, che le ossicellulose ottenute per ossidazione con permanganato, ipoclorito ed acido nitrico, non sono corpi omogenei, perchè crediamo questa conclusione conseguenza di esperienze affrettate. Anche la osservazione di Hilbert e Pearson («Cell. Chem.», 1926, p. 74) che l'ossicellulosa sia un miscuglio nel quale predomina la cellulosa, ci sembra egualmente affrettata.

Come ci sembra azzardata la distinzione di diverse ossicellulose fatta da Bintwall, Clibbens e Rindge («Abstracts», 1925, p. 234) fondata sulle differenze di affinità pel bleu di metilene e per il differente numero di rame. Quest'ultimo dà numeri fallaci, e l'assorbimento delle materie coloranti è in relazione con lo stato di aggregazione dei corpi.

Dai nostri studi, dei quali crediamo ozioso fornire i singoli particolari, risulta che tutti i corpi ottenuti nelle ossidazioni sopra indicate, siano lo stesso identico corpo, allo stato di purezza un poco diversa.

Così in certi casi si ottenne un prodotto che viene colorato in bleu dallo jodio, ma basta farlo bollire con acido solforico al 2 % perchè perda questa proprietà, senza subire apprezzabile perdita di peso. Questi prodotti contengono tracce di amiloide facilmente idrolizzabile, mentre essi resistono e restano inalterati per azione degli acidi diluiti.

Tutti i prodotti accennati — ossia le diverse ossicellulose, la  $\beta$ -cellulosa e la cellodestrina — sono allo stato umido solubili in soda all'8-10 %, vengono precipitate da un acido in forma di una gelatina trasparente (lo stesso avviene con la silice gelatinosa) che si raccoglie e deposita lentamente e che, lavata sino a reazione neutra, costituisce una massa molle che, disseccata sopra carta all'aria o in stufa a 100°, si raggrinza e si fende in piccoli pezzi leggermente colorati in bruno, traslucidi che hanno la consistenza e la durezza delle sostanze cornee e che si lasciano difficilmente polverizzare. Se invece la gelatina si spalma sopra una lastra di vetro sottilmente scanellata e si lascia disseccare a temperatura non superiore a 40°, si può distaccare sotto forma d'una polvere appena colorata in giallo, costituita da minuti frammenti duri. Se la gelatina si tratta replicate volte con alcool concentrato, perde l'acqua e si trasforma in polvere bianca molto sottile.

La sostanza disseccata si scioglie difficilmente e parzialmente nella soda anche concentrata, mentre prima del disseccamento si scioglie facilmente nella soda al 10 %. Allo stato secco si può fare bollire lungamente con acido solforico al 50 % senza che venga idrolizzata; solo perde, quando prima l'aveva, la proprietà di colorarsi con l'jodio, e si disgrega trasformandosi in polvere sottile, come se la sostanza amiloide servisse da cemento.

L'ossicellulosa gelatinosa alla temperatura ambiente si scioglie in acido solforico imbrunendo, a 0° la soluzione resta incolore; ma in tutti i due casi aggiungendo acqua resta tutto disciolto, indizio di una completa idrolisi.



Con soluzione di acido fosforico al 45 %, anche in presenza di acido solforico al 40 %, non si scioglie nemmeno a caldo.

Con un miscuglio di anidride ed acido acetico, aggiunto di qualche goccia di acido solforico, si scioglie tanto quella allo stato umido che allo stato secco.

Nell'acido nitrico per leggero riscaldamento si scioglie con formazione di vapori rutilanti e si trasforma in acido ossalico.

Degno di osservazione è il fatto che l'ossicellulosa ottenuta per ossidazione con permanganato non subisce ulteriore ossidazione per un nuovo trattamento. Con quella di altra provenienza non abbiamo ancora sperimentato. Ma è chiaro che noi non faremo nessun inutile tentativo per confermare la esistenza di ossi-cellulosa  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  ammessa da Kostüköff.

Questi caratteri abbiamo confermato nelle ossicellulose preparate coi più diversi processi, ed anche nelle così dette idrocellulose della viscosa, comprese quelle ottenute dalla seta, onde crediamo di poter affermare che una sola ossicellulosa esiste, e che la sua influenza è preponderante nel processo di preparazione della seta viscosa, come vedremo meglio in un'altra comunicazione.

A tutto questo dobbiamo aggiungere che le soluzioni di ossicellulosa in soda sono soltanto delle sospensioni, e che l'ossicellulosa è un vero colloide.

Una soluzione di soda che congelava a  $-4^{\circ}.72$  nella quale fu lasciata in sospensione della seta artificiale per tre ore, pure avendo sciolto apparentemente e contenendo notevole proporzione di sostanza organica, non ha subito alcuna variazione nel punto di congelamento.

Altre esperienze dirette confermano il fatto:

Abbiamo prima di tutto determinato il punto di congelamento di una soluzione di idrato contenente dal 7 a più del 10 % di NaOH ottenendo i numeri seguenti:

NaOH%	Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> %	Acqua%	t° di congelamento
7.09	0.33	92.58	— 8°.03
7.66	0.33	92.01	— 8°.56
7.93	0.40	91.67	— 8°.84
8.57	0.47	90.96	— 9°.94
9.02	0.50	90.48	— 10°.42
9.45	0.60	89.95	— 11°.00
10.05	0.65	89.29	— 11°.63
10.50	0.65	88.84	— 12°.40

Ma poichè la ossicellulosa secca non si scioglie nella soda diluita siamo stati obbligati ad adoperare quella umida; ma abbiamo da essa calcolata

quella secca, e la diluizione della soluzione determinandone il titolo dopo l'aggiunta della ossicellulosa.

I nostri dati si riferiscono a soluzioni contenenti dall'1 al 3 % di ossicellulosa secca, e sono i seguenti:

Ossicellulosa secca	Concentr. soda	t° di congelamento
1.0 %	10.05 %	- 11°.60
1.5	8.76	- 10°.17
2.9	8.16	- 9°.28
3.3	7.37	- 8°.20

Cosicchè il punto di congelamento della soda che si abbassa da — 8°.03 a — 12°.40 per concentrazioni variabili da 7.34 a 11.15 % (soda e carbonato) si abbassa da — 8°.20 a 11°.63 per concentrazioni da 7.37 a 10.05 %, e tracciando i diagrammi si vede che la presenza della ossicellulosa non esercita alcuna sensibile influenza; perciò l'ossicellulosa non si scioglie nella soluzione di soda ed è pertanto un corpo colloide.

La ossicellulosa da noi impiegata in queste esperienze proveniva dall'ossidazione dell'alcalicellulosa.

Abbiamo anche fatto una serie di combustioni della ossicellulosa, e quantunque esse dovranno essere ripetute con maggiori precauzioni, pure sono degne di osservazioni. Con l'ossicellulosa di Knotz abbiamo avuto:

	I	II	Media
Carbonio	42.30	42.46	42.38
Idrogeno	5.47	5.75	5.61

e con l'ossicellulosa ( $\alpha$ -cellulosa) estratta dalla seta con soda al 18 %:

	I	II	Media
Carbonio	42.78	42.88	42.83
Idrogeno	5.76	6.07	5.91

Nastükoff (Ber. XXXIII, 2237) per l'ossicellulosa di Knotz aveva trovato:

VII	
Carbonio	42.68
Idrogeno	6.19



e per quella ottenuta con l'ipoclorito :

	VIII	IX	X	XI
Carbonio	43.54	43.75	43.32	43.13
Idrogeno	6.17	6.24	5.98	6.08

Come si osserva, l'analisi della ossicellulosa di Knotz corrisponde completamente a quella nostra; per quella dall'ipoclorito vi è un leggero aumento nel carbonio e nell'idrogeno, ma certamente non tale da preoccupare quando si pensa che per la cellulosa  $C_6H_{10}O_5$  si calcola :

Carbonio	44.42
Idrogeno	6.22

e per l'ossicellulosa ipotetica  $C_6H_{10}O_6$ :

Carbonio	40.44
Idrogeno	5.62

Per quello che riguarda la costituzione di questa ossicellulosa che esercita tanta influenza su tutti i derivati della cellulosa e che ha i caratteri di un composto relativamente assai stabile, noi diremo soltanto, che essa è un derivato della molecola complessa della cellulosa che non sembra venga idrolizzata o depolimerizzata nella trasformazione, nella quale uno solo o pochi gruppi  $C_6H_{10}O_5$  sono ossidati: può perciò rappresentarsi con la formula generale  $(C_6H_{10}O_5)_n + (C_6H_{10}O_6)_m$  nella quale il valore di  $n$  è molto superiore a quello di  $m$  (che però non crediamo non possa essere = 1), ma nei composti finora ottenuti che costituiscono la ossicellulosa tipica, i due valori  $n$  ed  $m$  hanno un rapporto costante. Ne è prova il fatto che l'ossicellulosa non è ulteriormente ossidata dal permanganato, e la identità dei prodotti ottenuti dalle più diverse vie.

L'ossicellulosa di Knotz riossidata ha fornito:

Carbonio	42.20
Idrogeno	6.0

Se i risultati dell'analisi elementare consentissero calcoli di precisione, dall'aumento dell'ossigeno, si potrebbe risalire al rapporto fra  $n$  ed  $m$  e trarre dei criteri importanti sulla complessità della molecola della cellulosa  $(C_6H_{10}O_5)_n$ .

I fatti e le considerazioni da noi esposti in questi studi fanno vedere sotto ben altra luce il recentissimo lavoro di Gault ed Ehrmann sugli eteri cellulosici solubili (« Bulletin », giugno 1926) e lasciano spiegare la ragione per la quale quella che è chiamata *cellulosa non modificata* (cotone idrofilo) ed il cotone semplicemente *mercerizzato*, danno composti insolubili, mentre la cellulosa precipitata dalla soluzione cupro-ammoniacale e quella di Girard danno composti in parte solubili, specialmente quella preparata con acido solforico al 3 %, il cui rendimento raggiunge sino a circa l'85 %. Sol tanto c'è dubbio che la cellulosa precipitata dalla Viscosa si comporti come il cotone, e che la solubilità degli eteri sia vera solubilità e non dispersione (soluzione colloidale).

Importante è lo studio della nitratura dell'ossicellulosa e della idrocellulosa, e le esperienze di Berle Klage, quelle di Cros Bevan e Behale e quelle di Vignon meritano di essere ripetute e completate anche in vista della possibilità di formazione di colloidi misti.

Non deve essere obliato il lavoro di V. Zanetti pubblicato nel 1899 (« Rendic. della Soc. Chim. di Milano ») che preparò la ossicellulosa per ossidazione con acido cloridrico e clorato potassico, con acido cromico e acido solforico, con permanganato ed acido solforico, e che diede alla analisi:

	dal clorato	dall'acido cromico	dal permanganato
Carbonio	43.66	42.26	42.52
Idrogeno	8.60	6.52	6.56

Egli trattando queste ossicellulose con potassa al 10 % separò la parte indisciolta dalla soluzione e raccolse il precipitato ottenuto da essa con acido cloridrico, coi seguenti risultati:

	acido cromico in KOH 10 %	permanganato KOH 10 %	KOH 5 %
Parte insolubile	61.90	73.88	78.86
» precip. con HCl	3.30	4.22	1.85
» rimasta in soluzione	34.80	22.40	19.29

La parte indisciolta contiene:

Carbonio	43.08
Idrogeno	6.60

e quella precipitata dalla soluzione alcalina:

Carbonio	41.75
Idrogeno	6.25

**Chimica (Elettrochimica).** — *L'azione di alcune sostanze organiche nella deposizione elettrolitica dello zinco*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> del Corrisp. L. CAMBI e G. DEVOTO.

In una precedente comunicazione<sup>(3)</sup> uno di noi ha brevemente riferito sul processo di deposizione elettrolitica dello zinco da soluzioni di solfato notevolmente impure, soprattutto per *nicel* e *cobalto*, in presenza di alcune basi piridiche od analoghe: processo applicato fin dal 1929 nell'impianto elettrolitico della Società Miniere di Monteponi<sup>(4)</sup>.

Come è noto, non è possibile avere una deposizione del metallo con rese di corrente soddisfacenti senza procedere a trattamenti costosi di depurazione degli elettroliti impuri, quali ad es. si ottengono da alcuni minerali italiani, come le calamine di Campo Pisano trattate nell'impianto predetto.

Tali elettroliti, anche dopo le depurazioni generalmente compiute dal rame, cadmio, arsenico, antimonio, ferro, presentano una composizione compresa nei limiti seguenti, riferiti ad 1 litro:

Zn	gr.	65 ÷ 70	;	Mg	gr.	10 ÷ 12	;	Mn	gr.	2 ÷ 4	;
Ni	mgr.	15 ÷ 20	;	Co	mgr.	20 ÷ 30	;	Cl	mgr.	110 ÷ 120	.

Il tenore cioè di impurezze supera di gran lunga i limiti generalmente ammessi come compatibili per un buon risultato economico dell'elettrolisi.

Col processo su accennato si introducono nell'elettrolito, della composizione riportata, basi piridiche od alcune sostanze analoghe che, in percentuali relativamente piccole, elevano i rendimenti di corrente, in misura tale da potersi trascurare ogni depurazione preventiva per il nichel ed il cobalto.

Nella pratica industriale attualmente si consumano circa 100 gr. di oli piridici per 1000 kg. di catodi prodotti.

In una batteria di elettrolizzatori in cascata si è appunto osservato che l'aggiunta delle basi piridiche eleva soprattutto le rese di corrente delle prime celle a più bassa acidità. La resa di corrente complessiva di sei celle in cascata si è elevata da una media del 70 % fino all'80-90 %.

A questo punto è opportuno chiarire che l'aggiunta di colloidi (colla-gelatina, amido, ecc.), generalmente praticata nelle celle industriali per zinco, anche nei casi che discutiamo, influenza la compattezza dei depositi catodici, ed in particolare nelle celle acide, ma non è sufficiente da sola a determi-

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 3 gennaio 1932.

(3) L. CAMBI e V. TOJA, «Giornale di Chim. Ind. Appl.», 12 (1930), p. 96.

(4) L. CAMBI, brev. ital. n. 287.498 del 12 febbraio 1930; L. CAMBI e SOC. MINIERE DI MONTEPONI, brev. francese n. 711.029 del 16 giugno 1931.



nare quelle rese di corrente che esige l'andamento economico degli impianti. I più bassi rendimenti cui accenniamo si riferiscono appunto all'elettrolito predetto con aggiunta di colla-gelatina.

L'influenza di sostanze organiche sulla deposizione dei metalli e sulla polarizzazione catodica relativa è stata ripetutamente indagata e discussa. Non intendiamo riandare qui alla vasta letteratura in merito. Ci limitiamo a ricordare le note osservazioni di Le Blanc sull'innalzamento della polarizzazione catodica provocata da alcaloidi vari in alcuni elettroliti <sup>(1)</sup>. Richiamiamo inoltre le analoghe ricerche di A. Mazzucchelli riguardanti sali di zinco, dalle quali per altro risultava che l'anilina e la piridina non offrivano influenze notevoli <sup>(2)</sup>.

I fatti cui accenniamo richiamano inoltre le azioni dei cosiddetti « inibitori » più recentemente studiati. Fra gli inibitori più attivi nella corrosione del ferro da parte degli acidi sono appunto le basi piridiche del catrame, e la loro azione è stata attribuita ad un incremento della sopratensione dell'idrogeno provocata alla superficie dell'acciaio <sup>(3)</sup>.

Da quanto esporremo risulta però che nel caso di cui ci occupiamo le basi piridiche svolgono azioni specifiche di altra natura, che non si possono ricondurre al meccanismo su citato.

Aggiungiamo che negli elettroliti per zinco della composizione complessa su indicata le diverse sostanze organiche più volte proposte (fenoli e derivati ad es.) si sono mostrate affatto inefficaci ed in qualche caso nocive.

Per chiarire l'influenza dei predetti composti azotati, abbiamo nuovamente indagato se essi provocassero una variazione sullo stato di sopratensione dell'idrogeno sul catodo di zinco. Le nostre indagini eseguite con vari metodi non ci hanno dato però risultati significativi e conclusivi.

Recentemente invece abbiamo applicato l'analisi polarografica allo studio di questo fenomeno e abbiamo osservato che le tensioni di decomposizione sul catodo a goccia di mercurio, delle soluzioni 0.1 m. dei solfati puri di zinco e di nichel vengono abbassate in varia misura in presenza di piridina.

E precisamente questo abbassamento, per aggiunta di 0.4 gr. di piridina nel litro, è per

$\text{ZnSO}_4$  0.1 m. . . . . 0.10 V.

$\text{NiSO}_4$  0.1 m. . . . . 0.25 V.

Analogamente si comportano soluzioni di solfato di cobalto <sup>(4)</sup>.

(1) *Die elektromotorischen Kräfte der Polarisation*, (Knapp) 1910, p. 58.

(2) Questi « Rendic. », 1914, II, p. 503. La piridina in notevoli concentrazioni era stata proposta per rendere il deposito catodico più omogeneo da alcuni bagni di zincatura al cloruro di zinco. Vedi SCHLÖTTER, *Galvanostegie*, (Knapp) 1910, p. 11.

(3) F. H. ROBERTS e W. KUHN, « Journ. Ind. Eng. Chem. », 21 (1929), p. 1066; I. C. WARNER, « Trans. Am. Electrochem. Soc. », 55 (1929), p. 221.

(4) Per quanto concerne il metodo polarografico di Heyrovsky rimandiamo alla pubblicazione recente riassuntiva di W. KEMULA, « Zeitschr. Elektrochemie », 37 (1931), p. 779.

Tali alterazioni del potenziale di deposizione sono specifiche per la piridina e per le basi piridiche sostituite e non si riscontrano ad esempio nella piperidina, sostanza che anche nell'applicazione tecnica non ha dimostrato alcuna influenza sulle rese di corrente.

È da notare che in opportuni saggi da noi eseguiti, in soluzioni di solfato d'ammonio 0.1 m., il potenziale di riduzione della piridina all'analisi polarografica è risultato assai più elevato di quello di deposizione dello zinco. Fatto del resto già osservato da altri autori <sup>(1)</sup>. Inoltre lo stesso potenziale di deposizione tende ad elevarsi con l'aggiunta di altre sostanze riducibili, che hanno un potenziale di riduzione vicino a quello della piridina, come ad es. l'acetofenone.

Tentativi di svelare sui diagrammi tensione-intensità di corrente la stessa azione con elettrodi di altri metalli, non hanno portato a conclusioni definite: questo si può spiegare con la irreversibilità ben nota dei fenomeni catodici in tali condizioni.

Dal punto di vista termodinamico i dati polarografici si possono interpretare agevolmente: la tensione reversibile di decomposizione delle soluzioni saline è inferiore a quella riscontrata sperimentalmente: fenomeno questo spiegabile con le varie azioni ritardatrici alle superfici metalliche. Nulla vieta di supporre che l'azione di piccole quantità di basi piridiche, esplicantesi per fenomeni di adsorbimento alla superficie degli elettrodi, possa ridurre in modo notevole queste cause ritardatrici.

Sono ben note per contro le notevoli sopratensioni osservate nella deposizione dei metalli che ci interessano.

Noi valutiamo chiaramente la difficoltà di riportare queste osservazioni ottenute col polarografo, al comportamento delle celle industriali; ma poniamo in evidenza il parallelismo fra queste misure e i risultati tecnici:

1. l'azione spiccata delle basi piridiche e la non azione della piperidina e basi analoghe, fenomeni che si riscontrano egualmente nei due casi;

2. l'incremento di resa di corrente per lo zinco che può corrispondere appunto alla diminuzione della tensione di deposizione dello stesso metallo; ferma restando la sopratensione dell'idrogeno;

3. la nessuna azione delle basi piridiche in soluzione di solfato di zinco acido, tanto al polarografo che nell'elettrolisi industriale;

4. la maggiore resa di corrente in nichel che corrisponde ad una autodepurazione dell'elettrolito nelle celle neutre; perfettamente spiegabile con la maggior depressione che si riscontra per aggiunta di piridina nella tensione di deposizione del nichel stesso.

Ulteriori ricerche sono in corso.

Ringraziamo vivamente il nostro collaboratore Antonio Ratti che ci ha aiutato nell'esecuzione delle esperienze.

(1) W. KEMULA, loc. cit., p. 785.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulla crescenza delle funzioni olomorfe di tipo esponenziale.* Nota di VLADIMIRO BERNSTEIN, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§. 1. Abbiassi una funzione  $f(z)$ , olomorfa e di tipo esponenziale nel settore

$$(1) \quad |\arg z| \leq \psi_0,$$

e cioè tale che in questo settore si abbia, per un valore opportuno della costante  $A$ ,

$$(2) \quad |f(re^{i\psi})| \leq e^{Ar}.$$

Poniamo

$$(3) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(r)|}{r} = a;$$

allora, secondo un noto teorema di Phragmen-Lindelöf <sup>(2)</sup>, nel settore (1) si avrà

$$(4) \quad h(\psi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\psi})|}{r} \leq a \cos \psi + b \sin |\psi|,$$

ed in questa diseguaglianza non sarà possibile metterè al posto di  $a$  nessun numero inferiore (algebricamente); inoltre il numero  $b$  dovrà essere positivo o nullo.

Ciò posto, si può dimostrare il teorema seguente:

**TEOREMA I.** — *Se esiste una successione di numeri reali  $\rho_m$  soddisfacenti alla doppia condizione*

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\rho_m} = d > 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\rho_{m+1} - \rho_m) = q > 0,$$

*e tale che si abbia inoltre*

$$(6) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |f(\rho_m)|}{\rho_m} = a - k \quad (k > 0),$$

*allora il valore di  $b$  nella diseguaglianza (4) non può essere inferiore a  $\pi d$ .*

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(2) « Acta Mathematica », t. XXXI, pp. 393-395.



§ 2. Per la dimostrazione di questo teorema possiamo supporre che  $a = 0$ , senza togliere nulla alla generalità del ragionamento. Allora per i valori abbastanza grandi dell'indice  $m$ , avremo, per la (6),

$$(8) \quad |f(\rho_m)| < e^{-(k-\varepsilon)q_m},$$

e ciò, comunque si scelga il numero positivo  $\varepsilon$ .

Poniamo adesso

$$(9) \quad \lambda_{2p-1} = \rho_p \quad ; \quad \lambda_{2p} = \rho_p + e^{-kq_p};$$

$$(10) \quad C(\chi) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\chi^2}{\lambda_n^2} \right).$$

È facile vedere che allora si potrà scrivere <sup>(1)</sup>

$$(11) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log \left| \frac{1}{C'(\lambda_n)} \right| \right\} = k.$$

D'altra parte, se notiamo che, per la formola di Cauchy

$$f'(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-r|=1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-r)^2},$$

la diseuguaglianza (4) rimane vera se in essa ci si mette  $f'(\chi)$  al posto di  $f(\chi)$ , vedremo subito che

$$|f(\lambda_{2p})| < 2 e^{-(k-\varepsilon)q_m},$$

e dunque, per la (11),

$$(12) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log \left| \frac{f(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} \right| \right\} \leq 0.$$

Questa diseuguaglianza mostra che l'ascissa di convergenza della serie di Dirichlet

$$(13) \quad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} \cdot e^{-\lambda_n s}$$

è negativa o nulla.

Supponiamo adesso che il valore di  $b$  nella diseuguaglianza (4) sia inferiore a  $\frac{3}{2} \pi d$ ; allora potremo dimostrare che l'ascissa di olomorfia della

(1) Cfr. il § 4 della mia Nota, *Sui punti singolari ecc.* («Rendiconti R. Ist. Lomb. Sc. Lett.», vol. 64, 1931, pp. 1167-1183). In seguito questa Nota verrà indicata con N.

serie (13) non può essere negativa. Ammettiamo infatti che l'ascissa di olomorfia di (13) sia negativa, ed uguale a  $-b$ ; in tal caso, potremo determinare <sup>(1)</sup> una funzione  $f_1(\zeta)$ , olomorfa nel semi-piano  $|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2}$ , e tale che si abbia

$$(14) \quad \begin{cases} |f_1(re^{i\psi})| < e^{-[b \cos \psi - 2\pi d \sin |\psi| - \varepsilon] \cdot r} & \text{per } |\psi| < \frac{\pi}{2}, \\ f_1(\lambda_n) = f(\lambda_n) & \text{per } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Allora la funzione

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f_1(\zeta)}{C(\zeta)}$$

sarà olomorfa nel settore (1); per di più, tenendo conto della formola di Carlson <sup>(2)</sup>

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log |C(re^{i\psi})|}{r} = 2\pi d |\sin \psi| \quad \text{per } \psi \neq 0,$$

vedremo che, designando con  $\psi_1$  il più piccolo fra gli angoli  $\psi_0$  e  $\arctg \frac{2b}{\pi d}$ , avremo, sui due raggi  $\arg \zeta = \pm \psi_1$ ,

$$|g(re^{\pm i\psi_1})| < e^{-\left[\frac{1}{2}\pi d \sin \psi_1 - \varepsilon\right] \cdot r}.$$

Ora, da questa diseuguaglianza si deduce, per il già citato teorema di Phragmen-Lindelöf, che, sull'asse reale,

$$|g(r)| < e^{-\left[\frac{1}{2}\pi d \operatorname{tg} \psi_1 - \varepsilon\right] \cdot r},$$

e siccome <sup>(3)</sup>

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log |C(r)|}{r} = 0,$$

se ne deduce che

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \left\{ \frac{1}{r} \log |f(r) - f_1(r)| \right\} \leq -\frac{1}{2} \pi d \operatorname{tg} \psi_1;$$

(1) Cfr. mia Memoria, *Sur les singularités des séries de Dirichlet* (« Rendiconti R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », vol. 63, 1930, p. 406 (86)); nella formola alla 6<sup>a</sup> riga della p. 407 (87) per un errore di stampa manca nella parentesi dell'esponente il termine  $-\pi d \sin |\psi|$ . In seguito questa Memoria verrà indicata con M.

(2) « Math. Ann. », t. 79, 1919, p. 239; cfr. anche M., p. 343 (23).

(3) Cfr. CARLSON, loc. cit., p. 240.

dunque, per la (14),

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \left\{ \frac{1}{r} \log |f(r)| \right\} \leq -\frac{1}{2} \pi d \operatorname{tg} \psi_1.$$

Ma questa diseuguaglianza è in contrasto con la formola (3). Dunque l'ascissa di olomorfia della serie (13) è uguale a zero; di conseguenza, la sua ascissa di convergenza deve essere anch'essa uguale a zero.

Consideriamo ora una serie parziale qualsiasi della serie  $\{\lambda_n\}$ ; è facile vedere <sup>(1)</sup> che, se la sua densità (o densità massima) è superiore a  $d$ , il suo indice  $\delta$  (secondo la terminologia introdotta nella mia Nota già citata) <sup>(1)</sup> è necessariamente uguale a  $k$ ; d'altra parte, dalle condizioni (5) si deduce <sup>(2)</sup> che per la serie  $\{\lambda_{2p-1}\}$ , la cui densità è uguale a  $d$ , l'indice  $\delta$  è uguale a zero.

Da queste considerazioni possiamo dedurre, in base ad un teorema da me recentemente dimostrato <sup>(3)</sup>, che la funzione  $\Phi(s)$  non può essere olomorfa sopra un segmento di lunghezza superiore a  $2\pi d$  della sua retta di olomorfia; di conseguenza, per un altro mio teorema <sup>(4)</sup>, il valore di  $b$  nella diseuguaglianza (4) non può essere inferiore a  $\pi d$ . Il teorema I è così dimostrato.

Notiamo ancora che questo teorema rimarrebbe vero, se avessimo sostituito la seconda delle condizioni (5) con la condizione (meno restrittiva) che l'indice  $\delta$  della serie  $\{\rho_m\}$  sia nullo, od in altre parole, che si abbia

$$(15) \quad \overline{\lim}_{m=\infty} \left\{ \frac{1}{\rho_m} \log \left| \frac{1}{\Gamma(\rho_m)} \right| \right\} = 0, \quad \text{ove} \quad \Gamma(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\rho_m^2} \right).$$

La sola modifica che si dovrebbe fare in tal caso nel ragionamento precedente, si riferirebbe alla dimostrazione della formola (11); non è però difficile stabilire tale formola basandosi sulla (15) e la (9).

3. Dal teorema I si deduce facilmente il teorema seguente:

**TEOREMA II.** — *Nelle condizioni del teorema I la derivata  $b'(\psi)$  <sup>(5)</sup> ha nel punto  $\psi = 0$  una discontinuità della prima specie; si ha in questo punto*

$$b'(+0) - b'(-0) \geq \pi d.$$

(1) Cfr. N., §§ 4 e 5.

(2) Cfr. M., pp. 365-366 (45-46).

(3) Cfr. N., § 7.

(4) Cfr. M., p. 382 (62).

(5) G. POLYA ha dimostrato che  $b(\psi)$  possiede in ogni punto una derivata a destra  $b'(\psi + 0)$  ed una derivata a sinistra  $b'(\psi - 0)$ , e che inoltre si ha sempre  $b'(\psi + 0) - b'(\psi - 0) \geq 0$  (« Math. Zeitschr. », t. 29, 1929, pp. 574-575).



Per la dimostrazione basta applicare il teorema I alla funzione

$$\varphi(z) = f(z) \cdot e^{ih'(-\infty)z}.$$

4. Diciamo adesso qualche parola sul significato dei teoremi I e II.

L'interesse del teorema I consiste in ciò che in esso la funzione  $f(z)$  deve essere di tipo esponenziale solo nel settore (1), la cui apertura può essere arbitrariamente piccola. Difatti, teoremi di questo genere furono già dimostrati da parecchi autori; ma, per quel che mi consta, si supposeva sempre che la funzione  $f(z)$  fosse di tipo esponenziale in un settore di apertura non inferiore a  $\pi$ . Ora vediamo che tale restrizione non è affatto necessaria per la validità del teorema.

Il teorema II mostra che i raggi  $\arg z = \psi_n$  sui quali è possibile trovare una successione di punti  $z_m^{(n)} = \rho_m^{(n)} e^{i\psi_n}$ , i moduli  $\rho_m^{(n)}$  dei quali soddisfino alle condizioni (5), e per i quali si abbia

$$\overline{\lim}_{m=\infty} \frac{\log |f(z_m^{(n)})|}{\rho_m^{(n)}} < b(\psi_n),$$

sono dei raggi eccezionali; essi formano certamente un sistema numerabile. È dunque impossibile che la disuguaglianza

$$\overline{\lim} \frac{\log |f(\rho_m e^{i\psi})|}{\rho_m} < b(\psi),$$

in cui i  $\rho_m$  soddisfanno alle condizioni (5), risulti verificata per tutti i valori di  $\psi$  compresi fra due valori arbitrari  $\psi'$  e  $\psi''$ .

5. Notiamo per terminare che esistono realmente delle funzioni soddisfacenti alle condizioni del teorema I col valore di  $b$  eguale a  $\pi d$ . Si può indicare come esempio la funzione

$$K(z) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{2p}^2}\right).$$

Per il già citato teorema di Carlson questa funzione soddisfa alla condizione (4) coi valori  $a = 0$ ,  $b = \pi d$ ; d'altra parte si vede facilmente che, ponendo

$$K_p(z) = \prod_{v=1}^{\infty} (v+p) \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{2p+v}^2}\right),$$

si ottiene <sup>(1)</sup>

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log |K_p(\lambda_{2p-1})|}{\lambda_{2p-1}^2} = 0,$$

e dunque, per la (9), la funzione  $K(z)$  soddisfa alla condizione (6).

(1) Cfr. M., p. 365. (45).

**Matematica.** — *Sopra un'equazione alle derivate parziali del 4° ordine.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Nella presente Nota mi propongo di segnalare un nuovo caso della singolarità che S. Kowalevsky ha riscontrato nella classica equazione del calore in ordine all'applicazione del teorema generale di esistenza ed unicità <sup>(2)</sup>. In forma generale, la singolarità cui alludo è la seguente.

Dato un sistema di  $m$  equazioni analitiche alle derivate parziali nelle  $m$  funzioni incognite  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  di  $n + 1$  variabili  $t, x_1, \dots, x_n$  sotto la forma

$$\frac{\partial^{r_v} \varphi_v}{\partial t^{r_v}} = \Phi_v \quad (v = 1, 2, \dots, m),$$

se i secondi membri  $\Phi_v$  involgono derivate di qualche  $\varphi_v$  di ordine superiore ad  $r_v$ , non esiste sempre una soluzione analitica del sistema, olomorfa nel punto  $t = 0, \mathcal{S}_0(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ , tale che le quantità

$$\varphi_v, \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{r_v-1} \varphi_v}{\partial t^{r_v-1}} \quad (v = 1, 2, \dots, m)$$

si riducano per  $t = 0$  a funzioni analitiche delle  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , arbitrariamente assegnate, olomorfe nel punto  $\mathcal{S}_0$ .

2. Si tratta di un sistema differenziale già stabilito dal Da Rios <sup>(3)</sup> e ripreso recentemente dal prof. T. Levi-Civita in una bellissima Memoria <sup>(4)</sup> dedicata allo studio dei cambiamenti di forma dei filetti vorticosi in seno ad un liquido indefinito animato (esternamente al filetto) da moto irrotazionale.

Se  $P$  è il generico punto di un filetto assimilabile ad una curva, dipendente, in generale, dal tempo  $t$  e dall'ascissa curvilinea  $s$ , le dette equazioni differenziali si compendiano nell'unica equazione vettoriale

$$(1) \quad \frac{dP}{dt} = \sigma k c b,$$

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(2) Cfr. E. PICARD, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles etc.* (Paris, Gauthier-Villars, 1927), pp. 2-5.

(3) Cfr. DA RIOS, *Sul moto di un filetto vorticoso di forma qualunque*, «Rendic. del Circolo Mat. di Palermo», t. XXII, 1906, pp. 117-135.

(4) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi*, «Ann. della R. Scuola Normale Sup.», serie 2<sup>a</sup>, vol. I, pp. 1-33, Bologna, Zanichelli, 1932.

in cui al secondo membro  $\sigma$  è costante,  $k$  è una funzione nota di  $s$ ,  $c$  è la curvatura del filetto in P e  $\mathbf{b}$  è il versore binormale.

Noi supporremo  $k$  costante e porremo, per brevità,  $\sigma k = 1$ , in guisa che, tenendo conto della prima formola di Frenet, l'equazione si scrive:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2}.$$

Il sistema differenziale è dunque

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \end{array} \right.$$

e non è lecito affermare senz'altro che, assegnando per  $t = 0$  la configurazione del filetto, le equazioni (S) siano atte a determinare il punto P come funzione analitica delle variabili  $t, s$  in ogni istante ulteriore (di un intervallo di tempo sia pur breve avente inizio all'istante  $t = 0$ ).

Dimostreremo che la possibilità di tale determinazione viene meno se pur ci si limita a considerare le configurazioni infinitamente vicine ai filetti rettilinei, con che intendiamo di ammettere per la generica soluzione (S) la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x = s + \varepsilon \xi \\ y = \varepsilon \eta \\ z = \varepsilon \zeta, \end{array} \right.$$

in cui  $\varepsilon$  sia una costante del prim'ordine.

Il sistema (S) diventa allora

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2}, \end{array} \right.$$

i cui integrali sono le soluzioni infinitamente vicine alla soluzione  $x = s, y = 0, z = 0$  del sistema originario (S).



Dalla prima equazione di (S') segue che la  $\xi$  non dipende da  $t$  e quindi essa mantiene per ogni  $t > 0$  la determinazione relativa a  $t = 0$ ; dalla seconda e terza equazione si ricava invece che

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial^4 \eta}{\partial s^4}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial^4 \zeta}{\partial s^4}.$$

Dunque le funzioni  $\eta$  e  $\zeta$  sono integrali dell'equazione del 4° ordine

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^4}.$$

3. Cerchiamo uno sviluppo di  $\varphi$  nell'intorno di  $t = 0$  con le condizioni di Cauchy

$$\varphi(0, s) = f_1(s) \quad , \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t=0} = f_2(s),$$

essendo  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  due funzioni analitiche di  $s$ , olomorfe nel punto  $s = 0$ .

Dall'equazione (E) si ricava, derivando successivamente rispetto a  $t$

$$\left( \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial t^{2n}} \right)_{t=0} = (-1)^n \frac{d^{4n} f_1}{ds^{4n}} \quad \left( \frac{\partial^{2n+1} \varphi}{\partial t^{2n+1}} \right)_{t=0} = (-1)^n \frac{d^{4n} f_2}{ds^{4n}} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

da cui la serie

$$\varphi(t, s) = f_1(s) + f_2(s)t - \frac{1}{2!} \frac{d^4 f_1}{ds^4} t^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^4 f_2}{ds^4} t^3 + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{d^{4n} f_1}{ds^{4n}} t^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{d^{4n} f_2}{ds^{4n}} t^{2n+1} + \dots$$

Questa serie non è convergente in generale. Basta ad esempio scegliere

$$f_1(s) \equiv \frac{1}{1-s} \quad , \quad f_2(s) \equiv 0,$$

con che la serie si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{d^{4n}}{ds^{4n}} \frac{1}{1-s} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n)!}{(2n)!} \frac{t^{2n}}{(1-s)^{4n+1}} =$$

$$= \frac{1}{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n)!}{(2n)!} k^n,$$

avendo posto  $k = \frac{t^2}{(1-s)^4}$ .

La serie di potenze di  $k$  non converge per alcun valore di  $k \neq 0$ , poichè il valore assoluto del rapporto di un termine al precedente diverge per  $n \rightarrow \infty$ .

4. Si può osservare che dal punto di vista fisico sarebbe egualmente soddisfacente la eventuale soluzione (o le eventuali soluzioni)  $\varphi(t, s)$  della (E), tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t, s) = f_1(s) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f_2(s) ,$$

dove non si esige questa volta l'analiticità delle  $f_1(s), f_2(s)$ . Si noti in proposito che si potrebbe seguire nel nostro caso il procedimento usato dal Fourier per risolvere l'analogo problema relativo all'equazione del calore

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} .$$

Infatti, si tenga conto che la (E) ammette come soluzioni

$$e^{-qs} \sin q^2 t \quad , \quad e^{-qs} \cos q^2 t$$

dipendenti dal parametro  $q$  e quindi anche gli integrali di Laplace-Abel

$$I(t, s) = \int_0^{+\infty} e^{-qs} \sin q^2 t \, dq$$

$$J(t, s) = \int_0^{+\infty} e^{-qs} \cos q^2 t \, dq .$$

Questi hanno per ascissa di convergenza  $s = 0$  e si riducono per  $s = 0$  agli integrali di Fresnel

$$I(t, 0) = J(t, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} .$$

Derivando sotto il segno integrale (rispetto ad  $s$ ) ed applicando l'integrazione per parti, si trova per  $I$  ed  $J$  il sistema differenziale

$$\begin{cases} 2t \frac{\partial I}{\partial s} = sJ \\ 2t \frac{\partial J}{\partial s} = 1 - sI . \end{cases}$$

A questo sistema è applicabile il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy (per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie) e gli integrali di

Laplace-Abel sopra scritti ne costituiscono la soluzione che per  $s = 0$  si reduce ad  $I(t, 0) = J(t, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$ .

Non insisteremo sulla risoluzione del problema il quale sembra poco interessante dal punto di vista fisico perchè si tratta di un caso particolarissimo del problema d'integrazione del sistema differenziale (S).

5. Osserviamo infine che il sistema (S) non è risolubile rispetto alle tre derivate seconde  $\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}$ , essendo nullo il determinante dei loro coefficienti, sicchè non è applicabile il teorema generale di esistenza ed unicità quando si consideri  $s$  come variabile principale. È però facile trasformare (S) in un sistema al quale il detto teorema sia applicabile. Basta moltiplicare ambo i membri della (1) vettorialmente a destra per  $\frac{dP}{ds}$ , con che si perviene all'equazione

$$\sigma k \frac{d^2 P}{ds^2} = \frac{dP}{dt} \wedge \frac{dP}{ds}.$$

**Matematica.** — *Sur une généralisation de la sommation de M. Borel des séries divergentes.* Nota di N. OBRECHKOFF, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio S. PINCHERLE.

On sait que la série

$$(1) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

est sommable par la méthode exponentielle de M. Borel si l'expression

$$\Phi(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!}, \quad s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

tend vers une limite finie, lorsque  $x \rightarrow \infty$ . M. Sannia<sup>(2)</sup> et après M. Knopp<sup>(3)</sup> ont donné la généralisation suivante de la sommation de M. Borel. La série (1) est sommable avec la méthode de MM. Sannia et Knopp, ou sommable  $B_k$  si la fonction

$$f_k(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}$$

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) G. SANNIA, *Nuovo metodo di somministrazione delle serie: Estensione del metodo di Borel*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», XLII (1917), pp. 303-322.

(3) K. KNOPP, *Bemerkung zum Borelschen Limitierungsverfahren*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», LIV (1930), pp. 1-4.



$k$  arbitraire; tend vers une limite finie lorsque  $x \rightarrow \infty$ . M. Doetsch <sup>(1)</sup> a donné une autre généralisation de la sommation de M. Borel. La série (1) est sommable par la méthode de M. Doetsch, ou sommable  $(B, k)$ , si l'expression

$$\Phi(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!}$$

est une fonction entière et

$$kx^{-k} \int_0^x (x-t)^{k-1} \Phi(t) dt$$

tend vers une limite lorsque  $x \rightarrow \infty$ .

Dans cette Note nous donnons une autre généralisation de la sommation de M. Borel dont les sommations  $B_k$  et  $(B, k)$  sont des cas particuliers. La sommation que nous obtenons jouit de presque toutes les propriétés qu'a la convergence des séries.

Nous disons que la série (1) est sommable  $C_\alpha B_k$ ,  $\alpha \geq 0$ , si l'expression

$$\alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t) dt, \quad f_k(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}$$

$k$  ( $k$  arbitraire réelle et  $f_k(x)$  est convergente pour chaque  $x$  fini), tend vers une limite lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Il est évident que la sommation  $C_\alpha B_0$  est la sommation  $(B, \alpha)$  de M. Doetsch et la sommation  $C_0 B_k$  est la sommation  $B_k$  de M. Sannia et Knopp. Je démontre alors les théorèmes suivants:

1. Si la série (1) est sommable  $C_\alpha B_k$ , elle est aussi sommable  $C_\alpha B_{k_1}$ ,  $k_1 > k$ , avec la même somme.

2. Si la série (1) est sommable  $C_\alpha B_k$ , la série

$$(2) \quad \dots + a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

sera sommable  $C_\alpha B_k$  avec la même somme.

3. Si la série (2) est sommable  $C_\alpha B_k$  la série (1) sera sommable  $C_\alpha B_{k+1}$  avec la même somme.

4. Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

sommable  $C_\alpha B_k$  avec la somme  $s$ , et la série

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

(1) G. DOETSCH, Ueber die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrierten Funktionen, « Mathematische Zeitschrift », 11 (1921), pp. 161-179.

soit sommable  $C_\beta B_{k_1}$  avec la somme  $t$ . Alors la série produit de Chauchy

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots, \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0,$$

sera sommable  $C_{\alpha+\beta+1} B_q$  avec la somme  $st$ ,  $q = \max(k, k_1, k + k_1)$ .

Donc on peut supprimer ou ajouter des termes nouveaux dans une série sans interrompre la sommabilité et de multiplier des séries sommables.

Pour  $k = 0$  on obtient comme cas particulier les résultats de M. Doetsch.

5. Soit la série (1) sommable  $C_\alpha B_k$ ,  $\alpha \geq 0$ . Alors elle est aussi sommable  $C_{\alpha_1} B_{k_1}$ ,  $\alpha_1 > \alpha$ ,  $\alpha_1 + k_1 = \alpha + k$  avec la même somme.

Nous donnons un résumé de la démonstration comme exemple. Posons

$$g(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t) dt, \quad g_1(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha_1-1} f_{k_1}(t) dt,$$

on a d'après les conditions du théorème

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha x^{-\alpha} g(x) = s,$$

et il faut démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_1 x^{-\alpha_1} g_1(x) = s.$$

On a d'après M. Knopp

$$f_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_0^x e^{-(x-t)} (x-t)^{k-p-1} f_p(t) dt,$$

$$f_{k_1}(x) = \frac{1}{\Gamma(k_1-p)} \int_0^x e^{-(x-t)} (x-t)^{k_1-p-1} f_p(t) dt,$$

où

$$p < k, p < k_1, \quad f_p(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^{n+p}}{\Gamma(n+p+1)}.$$

Désignons par  $L(\varphi)$  la transformation de Laplace de la fonction  $\varphi(x)$

$$L(\varphi) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \varphi(x) dx = \Phi(s),$$

qui a été étudié par M. Pincherle<sup>(1)</sup>. En se basant sur la relation

$$L\left(\int_0^x \varphi(t) \psi(x-t) dt\right) = L(\varphi) L(\psi)$$

(1) S. PINCHERLE, *Sur les fonctions déterminantes*, « Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure », 22 (1905), pp. 9-68.

on obtient

$$L(g) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} L(f_k) \quad , \quad L(g_1) = \frac{\Gamma(\alpha_1)}{s^{\alpha_1}} L(f_{k_1}) ,$$

$$L(f_k) = \frac{1}{(s+1)^{k-p}} L(f_p) \quad , \quad L(f_{k_1}) = \frac{1}{(s+1)^{k_1-p}} L(f_p)$$

d'où il suit

$$(4) \quad L(g_1) = \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{s+1}{s} \right)^{\alpha_1-\alpha} L(g) = \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha)} L(g) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(s+1)^{\alpha_1-\alpha} - s^{\alpha_1-\alpha}}{s^{\alpha_1-\alpha}} L(g) .$$

D'après les résultats de M. Pincherle et Nörlund<sup>(1)</sup> il existe une fonction  $h(x)$  telle que

$$L(h) = u(s) = \frac{(s+1)^{\alpha_1-\alpha} - s^{\alpha_1-\alpha}}{s^{\alpha_1-\alpha}}$$

et qui est donnée par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xs} u(s) ds \quad , \quad x > 0 \quad , \quad c > 0 .$$

En changeant convenablement le chemin d'intégration  $c - i\infty \dots c + i\infty$  on déduit la formule asymptotique

$$(5) \quad h(x) = \frac{x^{\alpha_1-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_1-\alpha)} + o(x^{\alpha_1-\alpha-1}) .$$

Du (4) on a

$$(6) \quad g_1(x) = \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha)} g(x) + \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x h(x-t) g(t) dt .$$

Des formules (3), (5), (6) on obtient facilement

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_1 x^{-\alpha_1} g_1(x) = s$$

et le théorème est démontré.

En particulier si l'on pose  $\alpha = 0$  ,  $\alpha_1 = k$  , on obtient que si une série est sommable  $B_k$  ,  $k > 0$  avec la méthode de M. Sannia et Knopp elle est aussi sommable  $(B, k)$  avec la méthode de M. Doetsch.

(1) N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Paris, 1926, pp. 184-187.



6. Soit

$$(7) \quad f(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots$$

la série de Taylor d'une fonction analytique, holomorphe pour  $Z = 0$ . La région de la sommabilité  $C_\alpha B_k$  est le polygone  $\Gamma$  de M. Borel.

On peut sommer la série (7) avec notre méthode  $C_\alpha B_k$  dans des cas assez généraux sur le contour de  $\Gamma$ .

On peut donner à la sommation  $C_\alpha B_k$  la forme suivante; la série (1) est sommable  $C_\alpha B_k$  si l'expression

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^{(\alpha)} \Gamma(n + \alpha + 1) x^{n+k}}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + k + 1)} \quad , \quad s_n^{(\alpha)} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\mu=0}^n A_{n-\mu}^\alpha a_\mu \quad ,$$

tend vers une limite lorsque  $x \rightarrow \infty$ .

**Matematica.** — *Sul contatto di due superficie.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Intorno ad alcuni valori singolari delle velocità critiche degli alberi.* Nota di P. E. BRUNELLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio R. MARCOLONGO.

Nei « Comptes Rendus » del 26 agosto 1931 è comparsa una Nota del sig. Th. Got sulle velocità critiche degli alberi che contiene dei risultati interessanti e suggerisce qualche ulteriore deduzione.

Il Got riprende lo studio di un albero di massa non trascurabile, soggetto ad un carico concentrato in un punto qualsiasi. Il Dunkerley aveva trattato questo caso nel 1894 ed aveva ricavato l'equazione che fornisce la velocità critica, concludendo che tale equazione non era praticamente solubile. Il Got rimaneggia l'equazione del Dunkerley dandole una forma più trattabile; tuttavia egli non ne affronta la soluzione nel caso generale e si restringe a considerare il caso del carico applicato nel punto di mezzo, mostrando che si hanno due serie distinte di soluzioni secondo che le forze centrifughe prodotte dalla rotazione del carico si riducono ad una forza o ad una coppia.

Anzi tutto sembra interessante rilevare che succede lo stesso anche se la massa dell'albero è trascurabile, salvo che in questo caso non si

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

hanno due serie di velocità critiche ma due valori soltanto. È notevole che il Dunkerley che ha trattato in modo molto completo ed esauriente questo caso aveva creduto di poter escludere l'esistenza di una soluzione non simmetrica. Si tratta di una soluzione singolare che era sfuggita alla sua analisi.

Il caso si lascia risolvere in modo molto semplice.

In queste condizioni la curva elastica ha per equazione semplicemente  $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$  con coefficienti diversi a destra ed a sinistra del carico.

Mettiamo l'origine delle coordinate nel punto di mezzo dell'asse indeformato. Allora dobbiamo scrivere che per  $x = \pm \frac{l}{2}$  è  $y = 0$  e  $d^2y/dx^2 = 0$ .

Inoltre per  $x = 0$  possiamo scrivere che si ha:

a) ugual valore della freccia, dell'inclinazione e del momento flettente. Gli sforzi di taglio a destra ed a sinistra della sezione differiscono per la forza centrifuga ivi applicata. Si ricava subito l'espressione consueta della velocità critica

$$\omega_c^2 = \frac{\frac{g}{P\beta}}{48EI}$$

b) oppure forza centrifuga nulla e quindi freccia nulla — uguali valori dell'inclinazione e dello sforzo di taglio — momenti flettenti che differiscono per il valore della coppia centrifuga applicata in quella sezione. Da qui

$$-EI \left( \frac{d^2y_2}{dx^2} - \frac{d^2y_1}{dx^2} \right)_{x=0} = \frac{P}{g} k^2 \omega^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0}$$

ove  $P$  è il peso del carico applicato nel punto di mezzo e  $\frac{P}{g} k^2$  la differenza fra i momenti d'inerzia principali. Ne segue immediatamente, con un processo di eliminazione noto e che qui risulta molto semplice, un secondo valore possibile della velocità critica dato dalla

$$\omega_c'^2 = \frac{\frac{g}{P k^2 l}}{12EI}$$

onde si ha anche

$$\omega_c' = \omega_c \frac{l}{2k}$$

È facile altresì rilevare che questa soluzione singolare può esistere solamente se il carico è applicato nel punto di mezzo.

Con un procedimento del tutto parallelo a quello ora esposto si possono ottenere in modo diretto e semplice le equazioni indicate nella Nota del Got, senza bisogno di ricavarle faticosamente come casi particolari di una trattazione inestricabilmente complessa.

Le equazioni delle curve elastiche sono allora

$$y_1 = A_1 \cosh mx + B_1 \sinh mx + C_1 \cos mx + D_1 \sin mx$$

$$y_2 = A_2 \cosh mx + \dots$$

ove si pone

$$m^4 = \frac{p}{g} \frac{\omega^2}{EI}.$$

Poniamo anche per brevità di scrittura

$$pl = Q$$

$$\frac{ml}{2} = \gamma.$$

Se scriviamo le condizioni (a) troviamo

$$(1) \quad 2 \frac{Q}{p} = \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tgh} \gamma)$$

cioè l'equazione che fornisce la prima serie di velocità critiche, equazione che è stata data da me nel 1920.

Scriviamo invece le condizioni b). Per gli appoggi abbiamo:

$$0 = A_1 \cosh \gamma - B_1 \sinh \gamma + C_1 \cos \gamma - D_1 \sin \gamma$$

$$0 = A_2 \cosh \gamma + B_2 \sinh \gamma + C_2 \cos \gamma + D_2 \sin \gamma$$

$$0 = A_1 \cosh \gamma - B_1 \sinh \gamma - C_1 \cos \gamma + D_1 \sin \gamma$$

$$0 = A_2 \cosh \gamma + B_2 \sinh \gamma - C_2 \cos \gamma - D_2 \sin \gamma$$

da cui:

$$B_1 = A_1 \coth \gamma \quad B_2 = -A_2 \coth \gamma$$

$$D_1 = C_1 \cot \gamma \quad D_2 = -C_2 \cot \gamma$$

ed anche

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{B_1}{B_2}.$$

Per le condizioni relative all'origine si ha

$$B_1 = B_2 \quad D_1 = D_2$$



(onde anche  $A_1 = -A_2$ )

$$C_1 = -A_1$$

$$C_2 = -A_2 = A_1$$

e finalmente

$$-m^2 EI (A_2 - C_2 - A_1 + C_1) = \frac{P}{g} \omega^2 k^2 (B_1 + D_1) m$$

da cui

$$(2) \quad \frac{Q}{2P} \frac{l^2}{k^2} = \zeta^3 (\coth \zeta - \cot \zeta)$$

che è l'equazione che fornisce la seconda serie delle velocità critiche.

Per quanto riguarda la legge di distribuzione dei valori delle velocità critiche non credo si possa dar valore generale ai rilievi fatti dal Got per casi singoli.

Di fatto la (1) che fornisce i valori della prima serie di velocità critiche è soddisfatta per  $2\zeta = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$  diminuiti di una quantità che esprime l'effetto della forza centrifuga dovuta al carico concentrato. La (2) che fornisce i valori della seconda serie da  $2\zeta = 2\pi, 4\pi, 6\pi \dots$  diminuiti analogamente di una quantità che esprime l'effetto della coppia. Ora tra forza e coppia non sussiste alcuna relazione necessaria, poichè al medesimo valore del carico possono corrispondere infiniti valori diversi del momento d'inerzia onde è impossibile che si annulli sistematicamente l'intervallo fra le velocità delle due serie, mentre nulla vieta che ciò possa accadere per alcuni valori in casi speciali.

**Meccanica.** — *Sul problema brachistocrono di Zermelo.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un articolo pubblicato in «Zeitschriften für angewandte Mathematik und Mechanik», vol. 11, p. 314 (agosto 1931), intitolato: *Ueber Zermelo's Luftfahrtproblem*, il prof. Levi-Civita estende agli spazi di  $n$  dimensioni euclidei, per mezzo dei metodi del calcolo delle variazioni, la soluzione del seguente problema, anteriormente proposto e direttamente risoluto da Zermelo:

*In un piano illimitato in cui la distribuzione del vento è data da un campo vettoriale  $w(P, t)$ , come funzione della posizione e del tempo, si muove un veicolo P con una velocità propria, costante, V, relativamente all'aria ambiente. Come deve esser condotto P (ossia, come deve essere scelta la sua rotta) perchè impieghi il minimo tempo possibile da un punto  $P_0$  a un altro punto  $P_1$ ?*

Oggetto di questa Nota è generalizzare la risoluzione del problema utilizzando l'analisi del prof. Levi-Civita e estendere la soluzione del problema al caso in cui la stessa velocità  $V$  non è costante, ma è funzione del tempo  $t$  e della posizione del mobile.

Nel caso in cui lo scalare della velocità  $V$  è solo funzione del tempo, le equazioni differenziali del moto hanno la stessa forma che nel caso in cui la velocità propria  $V$  è costante.

Siano <sup>(2)</sup>  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) le coordinate di P,  $w_i(x/t)$  le componenti note della velocità del vento,  $\alpha_i$  i coseni direttori incogniti della velocità propria, la cui grandezza è  $V$ .

Pel teorema della composizione della velocità, sarà

$$(1) \quad x'_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = w_i + V\alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Da cui, ponendo

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_l = \sum_{i=1}^n w_i dx_i, \\ \omega^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2, \\ ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2, \end{array} \right.$$

(1) Nella seduta del 20 dicembre 1931.

(2) Impieghiamo le notazioni del prof. LEVI-CIVITA nell'articolo citato.

risulta l'equazione

$$(2) \quad (V^2 - \omega^2) dt^2 + 2\psi_d dt - ds^2 = 0,$$

visto che

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1.$$

Supponendo  $V^2 > \omega^2$  (caso normale) e tenendo conto che in tutto il movimento è  $dt > 0$ , sarà

$$(3) \quad dt = \frac{-\psi_d + \sqrt{\psi_d^2 + (V^2 - \omega^2) ds^2}}{V^2 - \omega^2} = L_d(x | dx, t)$$

una funzione omogenea di primo grado rispetto ai differenziali  $dx_i$ .

La traiettoria cercata sarà la curva che rende minimo l'integrale

$$(4) \quad T = \int_{P_0 P_1} L_d(x | dx | t).$$

Applicando a questo integrale i metodi del calcolo delle variazioni, il prof. Levi-Civita arriva alle equazioni differenziali del movimento

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial x'_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove per la (3)

$$(II) \quad L(x | x' | t) = \frac{L_d}{dt} = 1.$$

Tutta questa analisi è indipendente dalla *costanza* dello scalare  $V$  della velocità propria.

Il prof. Levi-Civita dopo d'aver dimostrato la compatibilità delle equazioni (I) e (II), determina, come forma normale delle equazioni del problema, il sistema di  $2n$  equazioni di prim'ordine

$$(5) \quad \begin{cases} x'_i = w_i + V\alpha_i \\ \alpha'_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} + A\alpha_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in cui la variabile indipendente è  $t$  e le variabili dipendenti sono  $x_i$  e  $\alpha_i$ ; dove

$$(6) \quad W = \sum_{j=1}^n w_j \alpha_j$$



è la componente della velocità del vento nella direzione del movimento e

$$(7) \quad A = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \alpha_i \alpha_j.$$

Ma quest'analisi, che conduce dalle equazioni (I) e (II) alle (5), *suppone*  $V$  costante.

Supponiamo <sup>(1)</sup> che  $V(x/t)$  sia anche, come la velocità del vento, *funzione del posto e del tempo*.

Facendo

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{\psi_d}{dt} = \psi = \sum_{i=1}^n w_i x'_i, \\ v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i'^2 \end{cases}$$

e sostituendo  $dt$  con  $L_d$ , l'equazione (2) prende la forma

$$(8) \quad (V^2 - \omega^2) L^2 + 2\psi L - v^2 = 0.$$

Derivando rispetto a  $x'_i$ , essendo  $V$  e  $w$  funzioni soltanto del luogo e del tempo, risulta

$$2L(V^2 - \omega^2) \frac{\partial L}{\partial x'_i} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} L + 2\psi \frac{\partial L}{\partial x'_i} - \frac{\partial v^2}{\partial x'_i} = 0,$$

ossia, tenendo presente la (II) e la (b)

$$(9) \quad (V^2 - \omega^2 + \psi) \frac{\partial L}{\partial x'_i} = x'_i - w_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

equazione che può, per la (I), scriversi

$$(10) \quad \frac{\partial L}{\partial x'_i} = \rho \alpha_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tostochè si assuma

$$(11) \quad \rho = \frac{V}{V^2 - w^2 + \psi} = \frac{1}{V + W},$$

come risulta dalle equazioni (a), (b) e (6).

Derivando la (8) rispetto a  $x_i$ , si ha

$$2L(V^2 - \omega^2) \frac{\partial L}{\partial x_i} + \left[ 2V \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega^2}{\partial x_i} \right] L^2 + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} L + 2\psi \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

(1) Seguiamo *mutatis mutandis* l'analisi del prof. LEVI-CIVITA (art. cit.).

o, tenendo presente la (II), (a) e (b)

$$(V^2 - \omega^2) \frac{\partial L}{\partial x_i} + V \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n x'_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0;$$

od ancora per le (I) e (6)

$$(V^2 - \omega^2 + \psi) \frac{\partial L}{\partial x_i} + V \frac{\partial V}{\partial x_i} + V \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0,$$

cioè

$$(12) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\rho \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial x_i} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Finalmente derivando l'equazione (8) parzialmente rispetto a  $t$ , s'ottiene allo stesso modo,

$$(13) \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} \right).$$

Sostituendo i valori (10), (12) e (13) nelle equazioni del moto, risulta

$$(14) \quad \frac{d(\rho \alpha_i)}{dt} = -\rho \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) - \rho^2 \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} \right) \alpha_i.$$

Risolvendo rispetto a  $\alpha'_i$ , si ha

$$(14') \quad \alpha'_i = -\left( \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) - \left[ \frac{\rho'}{\rho} + \rho \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \right] \alpha_i.$$

D'altra parte dalla (11) risulta

$$(15) \quad \rho' V = -\frac{d(\rho W)}{dt} - \rho \frac{dV}{dt};$$

e dalla (6)

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho W)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_j w_j \cdot \rho \alpha_j = \sum_j \frac{dw_j}{dt} \rho \alpha_j + \sum_j w_j \frac{d(\rho \alpha_j)}{dt} = \\ &= \rho \sum_j \left( \frac{\partial w_j}{\partial t} \alpha_j + \sum_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} x'_i \alpha_j \right) + \sum_j w_j \frac{d(\rho \alpha_j)}{dt}, \end{aligned}$$

visto che le componenti della velocità del vento,  $w_i$ , sono soltanto funzioni del tempo e del luogo.

Tenendo presenti le (1), (6), (7) e (14) sarà quindi

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho W)}{dt} &= \rho \left[ \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} w_i \alpha_j + VA \right] - \\ &- \rho \sum_j w_j \left( \frac{\partial W}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) - \rho^2 W \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \right); \end{aligned}$$

o anche, essendo

$$\sum_{ji} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} w_i \alpha_j = \sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} w_i,$$

e

$$I - \rho W = \rho V,$$

$$(16) \quad \frac{d(\rho W)}{dt} = \rho^2 \left( V \frac{\partial W}{\partial t} - W \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \rho \sum_j w_j \frac{\partial V}{\partial x_j} + \rho V A.$$

Perciò ancora

$$(15') \quad \begin{aligned} \rho' V = & -\rho^2 \left( V \frac{\partial W}{\partial t} - W \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \rho \sum_j w_j \frac{\partial V}{\partial x_j} - \\ & - \rho V A - \rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} x'_j \right) = -\rho^2 \left( V \frac{\partial W}{\partial t} - W \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \rho \frac{\partial V}{\partial t} - \\ & - \rho V A - \rho V \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \alpha_j, \end{aligned}$$

per la (1).

Per conseguenza,

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\rho'}{\rho} = & -\rho \left( \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{W}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} - A - \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \alpha_j = \\ = & -\rho \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) - A - \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \alpha_j \end{aligned}$$

essendo

$$I - \rho W = \rho V.$$

Sostituendo in (14'), si ha

$$(18) \quad \alpha'_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) + \left( A + \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \alpha_j \right) \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Questi valori degli  $\alpha'_i$  soddisfano alla condizione

$$\sum_i \alpha_i \alpha'_i = 0$$

che devono verificare i coseni direttori di qualsiasi direzione, perchè è  $\sum \alpha_i^2 = 1$ .

Di fatto

$$\sum_i \alpha_i \alpha'_i = - \sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \alpha_i - \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \alpha_i + A + \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \alpha_j = 0$$

perchè, per la (6) è

$$\sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \alpha_i = A.$$

Le equazioni (1) e (18) risolvono il problema.

Se lo scalare  $V$  della velocità propria è solo funzione del tempo  $t$ , le equazioni (18) prendono la forma

$$\alpha'_i = - \frac{\partial W}{\partial x_i} + A \alpha_i$$

del secondo gruppo delle equazioni (5) del prof. Levi-Civita.

**Meccanica.** — *Les équations du mouvement de trois corps à masses variables.* Nota di IOAN I. PLACINTEANU, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

D'après une suggestion de M. Levi-Civita qui a donné la loi de mouvement d'un point matériel à masse variable, M. G. Vranceanu<sup>(2)</sup> a trouvé les équations de mouvement dans le cas du problème des deux corps à masses variables<sup>(3)</sup>, sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right) + \mathbf{a} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) = \text{grad } U$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont les masses des deux corps,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  le vecteur du mouvement relatif,  $\mathbf{a}$  un vecteur constant introduit à l'aide d'une intégrale première et  $U$  la fonction des forces égale à  $f \frac{m_1 m_2}{r}$ .

Je me propose dans cette Note de trouver les équation du mouvement dans le cas où l'on a *trois* corps sous l'action mutuelle newtonienne et dont les masses sont variables avec le temps.

Soit donc  $m_0, m_1, m_2$  les trois masses correspondantes aux trois corps  $P_0, P_1, P_2$  dont les coordonnées cartésiennes par rapport à un trièdre fixe sont  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ ,  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ . Les équations du mouvement de M. Levi-Civita seront dans ce cas

$$(1) \quad \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{R}}_i) = \text{grad}_i U \quad (i = 0, 1, 2)$$

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) «Rendiconti della R. Acc. dei Lincei», vol. VIII, 1928, p. 555.

(3) Voir aussi T. LEVI-CIVITA, «Atti del Congresso Internazionale dei Matematici», Bologna, 3-10 settembre 1928.



où l'on a posé:  $\mathbf{R}_i$  le vecteur dont les composantes sont  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  et grad; le vecteur de composantes  $\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \eta_i}, \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$ . La fonction potentielle  $U$  provient de l'attraction newtonienne.  $U = U_1 + U_2 + U_3$ , avec

$$U_1 = \frac{f m_0 m_1}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|}; \quad U_2 = \frac{f m_0 m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0|}; \quad U_3 = \frac{f m_1 m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|}$$

$f$  étant la constante de la gravitation.

L'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0,1,2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2.$$

Les équations (1) peuvent être mises sous la forme de Lagrange

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (i = 0, 1, 2)$$

On peut tout de suite vérifier que le système (1) admet les trois intégrales premières

$$(3) \quad \sum_{i=0,1,2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{a}$$

où  $\mathbf{a}$  est un vecteur constant.

On peut diminuer l'ordre du système (2) en faisant usage du fait qu'on possède les trois intégrales premières (3). Pour y parvenir, il suffit d'observer que le système (2) équivaut à un système canonique avec la fonction hamiltonienne

$$(4) \quad H = \sum_{i=0,1,2} \frac{1}{2 m_i} \mathbf{p}_i^2 - U$$

où  $\mathbf{p}_i$  est le vecteur impulse de composantes  $m_i \dot{\xi}_i, m_i \dot{\eta}_i, m_i \dot{\zeta}_i$ .

Prenons maintenant comme coordonnées généralisées nouvelles les coordonnées relatives  $(x_i, y_i, z_i)$ , composantes de  $\mathbf{r}_i$ , où l'on a posé  $x_i = \xi_i - \xi_0, y_i = \eta_i - \eta_0, z_i = \zeta_i - \zeta_0$ , et les impulsives  $\mathbf{p}_i$  de composantes  $p_{x_i} = m_i \dot{x}_i, p_{y_i} = m_i \dot{y}_i, p_{z_i} = m_i \dot{z}_i$ . On a alors une transformation canonique de Poincaré, qui transforme le système canonique équivalent à (2) dans le système canonique

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{x_i}} \quad ; \quad \dot{p}_{x_i} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (i = 1, 2)$$

dont la fonction hamiltonienne se déduit de (4) en tenant compte de (3)

$$(3') \quad \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{a}$$

et prend la forme canonique de Poincaré<sup>(1)</sup>

$$(4') \quad H = \frac{1}{2m_1} \mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \mathbf{p}_2^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 - U.$$

Un calcul facile nous donne tout de suite

$$(6) \quad H = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_0}{m_1 m_0} \mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 + m_0}{m_2 m_0} \mathbf{p}_2^2 - \\ - \frac{1}{m_0} (\mathbf{a} \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) - U.$$

Si l'on tient alors compte des équations (5) de Hamilton, avec la fonction hamiltonienne (6), on trouve

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0} \right) \mathbf{p}_1 - \frac{1}{m_0} (\mathbf{a} - \mathbf{p}_2) \quad ; \quad \dot{\mathbf{p}}_1 = \text{grad}_1 U \\ \dot{\mathbf{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_0} \right) \mathbf{p}_2 - \frac{1}{m_0} (\mathbf{a} - \mathbf{p}_1) \quad ; \quad \dot{\mathbf{p}}_2 = \text{grad}_2 U$$

en désignant par  $\text{grad}_1$  resp.  $\text{grad}_2$  les vecteurs de composantes  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}$  resp.  $\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial z_2}$ .

Éliminons maintenant les inconnues  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ . Nous trouvons tout de suite

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1(m_2 + m_0)}{M} \dot{\mathbf{r}}_1 \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{r}}_2 \right) + \mathbf{a} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1}{M} \right) = \text{grad}_1 U \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m_2(m_1 + m_0)}{M} \dot{\mathbf{r}}_2 \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{r}}_1 \right) + \mathbf{a} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_2}{M} \right) = \text{grad}_2 U \end{array} \right.$$

où l'on a posé  $M = m_0 + m_1 + m_2$ . En faisant la somme, il vient

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{M} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) \right) + \mathbf{a} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1 + m_2}{M} \right) = \text{grad}_1 U + \text{grad}_2 U.$$

(1) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II, p. 389.

Cette équation (8), prise avec l'une quelconques des (7), donne un système d'équations différentielles qui n'est autre que le système cherché définissant le mouvement des trois corps à masses variables.

Dans le cas où l'une des masses, par exemple  $m_2$ , devient nulle, le système se réduit à celui de M. Vranceanu.

**Meccanica.** — *Considerazioni sugli impulsi nei corpi elastici isotropi.* Nota di F. CONFORTO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica** (Fisica—matematica). — *Remarques sur le problème de la théorie unilaire des champs.* Nota di L. INFELD, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare.* Nota di N. MOISSEIEV, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geofisica** (Meteorologia). — *Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa.* Nota di G. VIOLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. A. BEMPORAD.

È noto che l'umidità relativa segue in Italia, come in generale in tutta Europa, una legge di variazione opposta a quella della temperatura, ossia al minimo di temperatura corrisponde il massimo di umidità e viceversa. Però, i risultati ricavati dalle osservazioni raccolte in alcuni osservatori non confermano pienamente questa legge di variazione, ma dimostrano che essa è molto complessa, e che oltre ai fattori: temperatura, stato d'agitazione dell'aria, regime delle piogge ecc., esercitano il massimo influsso la posizione topografica e la frequenza del vento.

Ciò è reso evidente dall'esame delle osservazioni raccolte a Roma, Napoli, Gaeta e Chiavari. Nello specchio che segue riportiamo i valori medi mensili dell'umidità relativa ricavati per Roma<sup>(2)</sup> e Napoli<sup>(3)</sup>.

(1) Nella seduta del 20 dicembre 1931.

(2) Cfr. FILIPPO EREDIA, *Il clima di Roma*.

(3) Cfr. SALVATORE AURINO, *Contributo allo Studio della climatologia Napolitana*.

	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
Roma . . . . .	72.0	69.0	67.0	65.0	63.0	59.0	55.0	56.0	63.0	70.0	73.0	74.0
Napoli . . . . .	69.3	69.1	67.2	67.5	63.4	64.4	61.6	61.9	65.3	71.3	70.9	72.9

La curva (1) costruita in base ai primi, mostra che per Roma l'umidità raggiunge il massimo in dicembre ed il minimo in luglio, e che il ramo discendente oltre ad essere meno rapido dell'ascendente, presenta una lieve inflessione. Lo stesso possiamo dire per la curva (2) che rappresenta l'andamento annuale dell'umidità relativa a Napoli. Ma a differenza della curva (1), la (2) presenta una inflessione che rivela l'esistenza di un massimo secondario in maggio e di un minimo nella metà di aprile. Questa anomalia è da attribuirsi ai venti che dominano a Napoli nel periodo marzo maggio, ed al sopraggiungere delle piogge primaverili.

La presenza di queste inflessioni esclude l'ipotesi di eventuali errori o di false osservazioni, ma conferma che la discordanza dei rami discendenti è dovuta alla influenza di alcuni fattori locali. Confermano quanto abbiamo esposto i risultati dedotti dalla elaborazione delle osservazioni raccolte agli osservatori di Gaeta e Chiavari.

Le osservazioni ebbero inizio a Gaeta l'agosto del 1887, del quarantacinquennio, solo i primi quarant'anni furono elaborati nello studio del clima della città.

I medi mensili sono riportati nella tabella I, mentre i medi di ogni decennio ed i valori normali dell'anno sono i seguenti:

1887-1926	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
1887-1896	58.94	57.32	62.68	63.00	63.49	64.62	66.90	63.99	67.21	66.25	63.28	60.21
1897-1906	50.23	51.62	53.61	56.25	59.24	61.98	64.99	64.00	64.01	61.83	56.79	50.93
1907-1916	52.71	51.43	53.29	57.91	62.29	64.68	63.84	64.39	63.44	61.05	58.43	56.01
1917-1926	54.06	54.26	53.74	58.54	62.20	64.21	66.23	66.70	64.63	60.90	58.51	54.16
Valori medi	53.98	53.66	55.83	58.92	61.80	63.87	65.49	64.78	64.84	62.51	59.25	55.43

La curva (3) ha un andamento abbastanza regolare, presenta una inflessione nel periodo luglio-settembre. Però, ciò che la caratterizza dalle altre, è la messa in rilievo della inversione della legge di variazione dell'umidità rispetto a Roma e Napoli. La discordanza della (3) rispetto alle



(1), (2) ed altre, a prima vista fa sorgere dubbi sul grado di esattezza delle osservazioni raccolte a Gaeta, mentre la coincidenza dei valori dedotti per i singoli decenni, dimostra che le cause che concorrono a produrre l'inversione notata, sono ben altre.

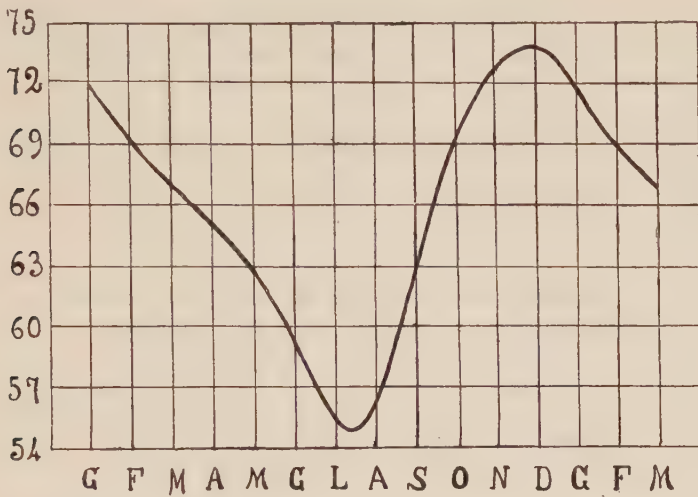


Fig 1- Andamento annuale dell'umidità relativa.  
« Roma »

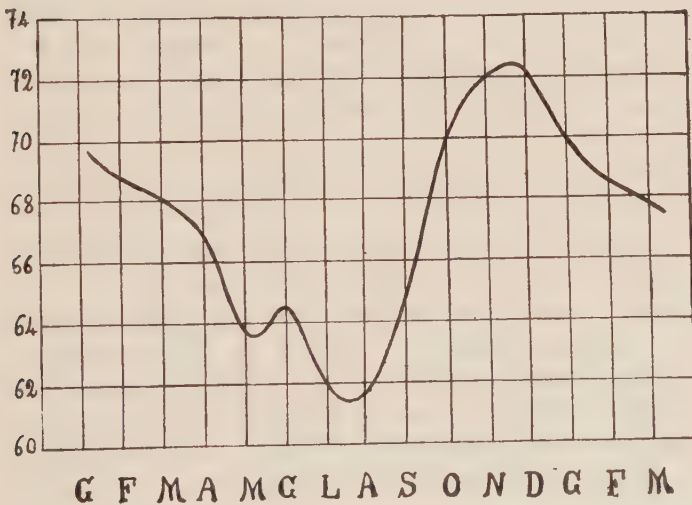


Fig 2 - Andamento annuale dell'umidità relativa  
« Napoli »

A tal uopo esaminiamo la frequenza del vento.

Delle 1095 osservazioni di direzione del vento raccolte nel corso di un anno, la frequenza risulta così ripartita:

	Nord	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	Sud	SSW	SW	WSW	West	WNW	WW	WNW	Calma
Gennaio . . . . .	2	2	15	3	27	2	4	1	1	4	8	1	7	1	4	1	10
Febbraio . . . . .	2	1	12	2	22	1	4	1	0	3	10	1	12	0	4	1	8
Marzo . . . . .	2	1	7	2	21	2	5	1	1	5	11	2	18	1	5	1	8
Aprile . . . . .	1	1	8	2	18	2	5	1	1	4	12	2	21	1	4	1	6
Maggio . . . . .	0	0	2	1	17	1	7	1	1	4	12	1	27	1	3	1	14
Giugno . . . . .	0	0	2	0	20	1	5	1	1	3	10	1	28	0	1	0	17
Luglio . . . . .	1	0	1	1	20	2	6	0	0	1	6	0	33	0	1	0	21
Agosto . . . . .	0	0	1	0	22	1	6	0	1	2	4	1	31	0	1	0	23
Settembre . . . . .	1	0	5	1	24	1	6	0	1	2	8	1	23	1	1	0	15
Ottobre . . . . .	1	1	10	3	24	2	6	2	1	4	11	1	15	0	3	1	9
Novembre . . . . .	1	0	12	2	25	4	5	0	0	5	12	4	8	1	3	0	7
Dicembre . . . . .	2	1	12	4	30	1	5	1	0	4	9	1	7	1	4	2	9

Quindi, nel semestre freddo si hanno i venti di Est, mentre in quello caldo venti di West. I venti del primo quadrante, chiamati comunemente venti di terra, sono asciutti e secchi, perchè provengono dal dorsale occidentale degli Appennini, ove hanno depositato tutto il vapore sotto forma di precipitazioni; quelli di West al contrario, provenienti dal mare, sono molto umidi.

L'inversione di variazione della umidità è dovuta essenzialmente al carattere dei venti dominanti. Infatti, nel periodo invernale a causa dei venti asciutti l'atmosfera è meno umida, mentre durante l'estate i venti di West trasportando la massa di vapore che trovasi sospesa nello strato d'aria sovrastante il mare, verso la costa, rendono l'atmosfera più umida.

Anche la posizione topografica esercita la sua influenza sulla variazione dell'umidità. Estendendosi Gaeta su di un promontorio bagnato dal mare tranne che dal lato Nord, l'aria umida che dalla brezza è trasportata verso terra, non passando su zone asciutte e secche, il vapore che in essa è sospeso non subisce alcuna ulteriore diminuzione, per cui il grado di umidità relativa rimane l'istesso.

Ancora più anormale risulta la variazione dell'umidità a Chiavari. I medi mensili ricavati dal prof. Bianchi sono i seguenti:

G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
61.7	61.2	63.4	63.6	66.3	66.9	65.5	65.9	66.0	68.3	65.9	64.1

La curva è irregolare, presenta un minimo in febbraio ed un massimo in ottobre. La legge di variazione è opposta a quella delle curve (1) e (2), mentre è in concordanza con quella ricavata per Gaeta. Presenta una notevole inflessione nel periodo giugno–ottobre, che conferma l'esistenza di un massimo secondario in giugno e di un minimo secondario nella seconda metà di luglio. L'inversione della legge di variazione dell'umidità è dovuta al regime delle piogge. Infatti, dalle statistiche risulta che l'autunno è la stagione più piovosa dell'anno, segue poi la primaveta, l'inverno ed ultima l'estate. I venti dominanti risultano quelli del primo quadrante nel semestre freddo, e quelli adiacenti all'West nel semestre caldo.

Possiamo adunque concludere:

Per conoscere con esattezza l'andamento dell'umidità relativa in Italia, occorrerebbe l'esame dettagliato delle osservazioni raccolte in quasi tutti gli osservatori della Penisola, studio che non è stato ancora intrapreso dall'ufficio Centrale di Meteorologia in Roma. Siamo certi che al pari di Gaeta e Chiavari, esistono altre stazioni marine, per le quali si verificano con maggiore o minore facilità le anomalie messe in rilievo. La causa non è di carattere generale, ma dipende esclusivamente dai fattori locali che concorrono a variare le caratteristiche di un clima rispetto ad un altro.

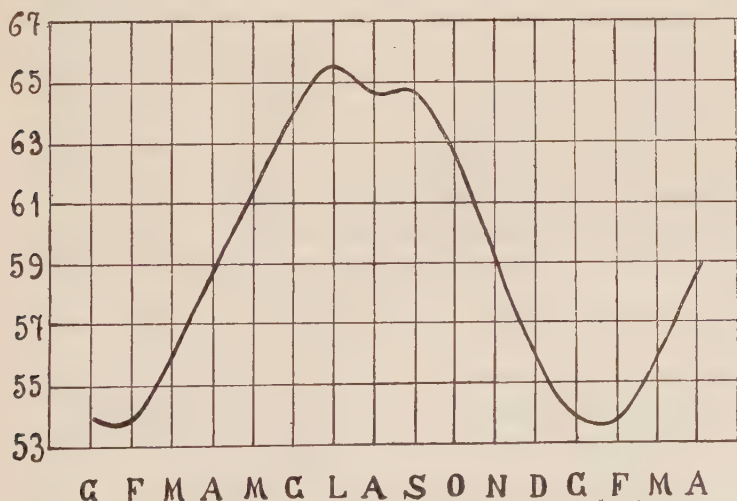


Fig. 3. Andamento annuale dell'umidità relativa  
"Gaeta"

TABELLA I.

Anno	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D	Media
1887	63.41	60.40	65.42	55.30	60.52	58.20	60.54	54.87	65.80	61.47	70.61	68.93	61.88
88	60.10	64.31	67.17	64.30	59.56	60.70	66.77	59.40	59.92	64.25	62.43	63.10	62.67
89	56.14	62.64	60.28	64.00	65.04	63.12	62.11	63.19	67.82	69.66	59.95	61.20	62.69
90	66.90	49.96	64.00	67.10	64.60	65.51	67.60	68.00	64.01	63.65	57.65	59.30	61.68
91	57.90	45.50	65.40	66.00	66.30	66.26	69.92	69.20	71.11	76.09	64.90	62.40	65.08
92	63.71	66.31	67.65	67.62	65.87	67.75	68.10	71.76	71.62	65.06	59.48	61.57	66.37
93	55.72	61.20	57.52	60.45	68.59	69.31	69.38	69.09	66.86	63.66	64.69	61.04	64.01
94	60.83	53.95	62.07	63.55	63.00	66.32	70.51	66.13	69.95	69.06	61.16	53.55	63.36
95	58.77	62.44	60.12	60.78	60.27	64.12	69.68	63.99	68.34	65.63	62.71	52.34	62.43
96	45.94	46.51	57.11	60.92	60.71	63.89	64.36	64.26	66.66	64.05	59.21	58.15	59.32
97	53.46	58.53	57.99	59.17	61.66	63.44	65.51	66.63	63.68	58.82	50.09	49.57	59.04
98	56.26	54.33	65.66	62.66	61.02	66.31	66.63	58.77	64.62	64.65	61.40	52.03	61.19
99	55.05	49.93	49.20	55.32	58.51	62.30	65.68	64.94	63.80	58.13	59.40	51.65	58.08
1900	54.70	54.63	52.60	58.00	63.23	64.51	65.43	63.96	66.55	64.21	60.26	53.40	60.12
01	42.09	42.62	49.10	50.37	59.20	63.58	61.10	62.10	63.56	61.13	55.46	50.86	55.10
02	49.30	66.40	55.93	57.88	54.70	57.60	64.68	64.69	63.70	61.30	49.30	43.03	58.19
03	47.61	47.40	49.58	52.30	58.60	60.60	62.18	62.75	59.23	59.03	58.61	54.49	56.03
04	55.83	52.31	55.50	57.66	61.36	58.90	69.27	63.78	68.54	70.54	59.69	51.91	60.44
05	40.83	44.90	50.84	57.53	57.20	62.22	65.24	65.88	63.38	59.20	57.22	47.94	56.02
06	47.15	45.11	49.75	51.42	56.97	60.39	64.22	66.52	63.13	61.25	56.54	54.47	56.41
07	47.47	49.13	48.77	54.30	57.52	58.72	62.71	64.27	64.20	65.64	63.00	63.26	52.89
08	52.90	54.70	49.80	54.30	62.30	68.90	65.00	65.20	62.90	54.23	53.00	55.60	58.10
09	51.10	46.56	52.99	58.00	61.72	62.90	63.94	63.19	61.16	59.47	52.31	54.54	57.32
10	51.76	51.06	54.75	54.99	60.76	66.18	66.30	62.57	63.06	61.05	56.70	57.00	58.46
11	46.90	48.85	47.41	56.68	61.74	64.31	64.16	62.27	65.31	62.89	63.42	56.64	58.34
12	55.41	54.32	56.61	56.99	66.12	66.08	61.15	61.28	62.30	59.43	60.50	52.76	59.46
13	57.50	47.60	47.09	62.34	61.23	64.82	58.10	65.10	64.70	61.64	61.20	55.40	58.97
14	47.40	51.80	53.99	59.00	61.60	63.80	66.20	64.90	62.70	61.67	58.80	60.04	59.32
15	64.54	60.99	58.73	60.91	67.02	67.84	66.83	67.51	64.51	58.70	53.32	46.00	61.24
16	52.53	52.27	62.73	61.63	62.87	63.03	63.43	67.87	66.20	65.77	62.07	68.77	62.44



(Segue)

TABELLA I.

Anno	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D	Media
1917	53.70	54.25	55.60	55.80	63.06	64.13	66.24	66.23	62.91	57.60	52.80	50.20	59.46
18	48.21	53.83	52.84	60.54	62.20	56.00	64.80	65.70	63.45	61.55	60.20	58.04	60.42
19	53.68	61.77	54.18	57.71	59.81	61.15	68.31	67.04	66.11	59.87	58.01	51.97	59.97
20	53.57	44.67	57.23	58.90	63.87	65.10	65.77	65.60	61.78	62.17	59.17	55.13	59.41
21	54.11	50.65	55.02	57.61	61.85	64.49	66.03	66.46	65.32	62.35	55.56	51.75	59.26
22	53.82	51.10	51.35	58.33	58.37	66.92	66.82	76.49	64.02	61.62	53.81	59.92	59.23
23	58.43	66.97	64.43	61.10	63.33	61.87	65.83	68.70	64.13	59.70	63.30	52.80	62.59
24	46.53	47.60	51.07	55.87	62.13	62.10	67.26	65.50	65.50	58.00	56.43	53.20	57.60
25	49.24	55.67	42.53	62.13	62.00	66.70	66.75	66.87	66.23	63.66	62.87	52.67	59.77
26	59.30	56.06	52.28	59.22	65.38	63.62	65.50	67.46	66.81	62.49	62.00	55.92	61.33

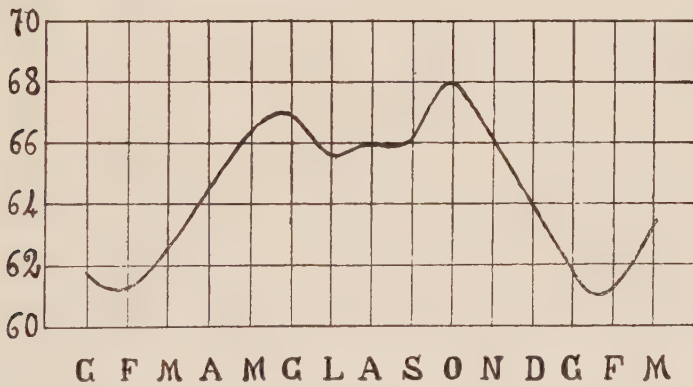


Fig 4. Andamento annuale dell'umidità relativa  
« Chiavari »

**Fisica.** — *Calcolo dell'azione del campo magnetico terrestre sopra una radiazione corpuscolare generata nell'atmosfera*<sup>(1)</sup>. Nota di B. ROSSI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio A. GARBASSO.

1. L'esito negativo delle esperienze dirette a mettere in evidenza un'azione del campo magnetico terrestre sopra la distribuzione di intensità della radiazione penetrante viene generalmente considerato come una prova che la radiazione penetrante primaria è una radiazione ultra- $\gamma$ , la quale genera nell'atmosfera quella radiazione corpuscolare, che i nostri apparecchi rivelano.

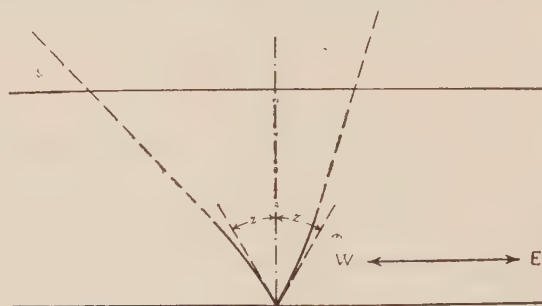


Fig. 1.

Il calcolo infatti farebbe prevedere per una radiazione elettronica di origine estraterrena, sia una dipendenza dell'intensità dalla latitudine magnetica (effetto di latitudine), sia una dissimetrica distribuzione di intensità rispetto al piano del meridiano magnetico (effetto azimutale); ed ambedue questi effetti dovrebbero essere cospicui anche per elettroni di energia eguale a qualche decina di miliardi di volt<sup>(3)</sup>.

Per una radiazione corpuscolare generata nell'atmosfera l'effetto in latitudine non può evidentemente manifestarsi; deve manifestarsi invece ancora, per quanto in misura assai più ridotta, l'effetto azimutale; e ciò per l'azione combinata del campo magnetico terrestre e dell'assorbimento atmosferico. Consideriamo infatti (fig. 1) quei corpuscoli, che giungono sulla superficie della Terra sotto il medesimo angolo zenitale  $z$ , ma provenienti rispettivamente da occidente e da oriente del piano del meridiano magnetico. I raggi  $\gamma$  da cui prendono origine i primi, debbono attraversare

(1) Debbo al prof. E. Fermi il suggerimento di questo lavoro.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(3) Cfr. B. ROSSI, « Rend. Lincei » XIII, 47, 1931 e « Nuovo Cimento », marzo 1931.

un tratto maggiore di atmosfera ed essere quindi più fortemente assorbiti che non i raggi  $\gamma$  da cui prendono origine i secondi. Il numero dei corpuscoli provenienti da occidente del meridiano deve risultare quindi minore del numero di quelli provenienti da oriente del meridiano stesso.

Oggetto della presente Nota è di studiare quantitativamente tale fenomeno per vedere se effettivamente la sua intensità sia al di sotto dei limiti di esattezza delle esperienze finora eseguite ed esaminare in tal caso la possibilità di metterlo in evidenza con esperienze più precise o eseguite in condizioni più opportune.

2. Ci mancano evidentemente gli elementi necessari per una trattazione rigorosa del problema; e, quand'anche li possedessimo, tale trattazione risulterebbe estremamente complicata. Siamo costretti perciò ad introdurre delle ipotesi semplificative e le sceglieremo in modo da ottenere un *limite inferiore* per l'effetto in questione. Questo limite inferiore risulterà espresso, come vedremo, in funzione della perdita d'energia dei corpuscoli secondari nella materia e della dipendenza della loro intensità dall'angolo zenitale. Esso sarà indipendente da fattori difficilmente controllabili, come p. e. un'eventuale diffusione dei corpuscoli nell'atmosfera.

La prima semplificazione, che introdurremo, sarà di sostituire nei calcoli all'atmosfera reale un'atmosfera di densità uniforme, eguale alla densità dell'aria al livello del mare (dove si immaginano eseguite le esperienze) e di spessore equivalente, in  $\text{g/cm}^2$ , a quello dell'atmosfera reale. I corpuscoli, che verrebbero generati in questa atmosfera fittizia dalla radiazione ultra- $\gamma$ , giungerebbero al livello del mare con quella medesima distribuzione di intensità in funzione dell'angolo zenitale, che presentano i corpuscoli generati nell'atmosfera reale. La dipendenza dell'intensità dall'angolo zenitale è infatti determinata dalla diversa quantità di materia, che debbono attraversare i raggi, che provengono da direzioni diversamente inclinate rispetto alla verticale e tale quantità di materia è evidentemente la stessa nei due casi. L'effetto del campo magnetico terrestre invece, calcolato assumendo l'atmosfera uniforme, risulta minore che nel caso reale, poichè la traiettoria di un dato corpuscolo nell'atmosfera fittizia è più corta della traiettoria del corpuscolo generato nel punto corrispondente dell'atmosfera reale. L'ipotesi di un'atmosfera uniforme conduce quindi a determinare, come ci proponevamo, un limite inferiore per l'effetto del campo magnetico terrestre.

Tornerà comodo nel seguito caratterizzare l'energia di un corpuscolo mediante la sua *rigidità magnetica*  $\sigma$ ; questa, per elettroni sufficientemente veloci, è legata alla differenza di potenziale  $V$  sotto cui essi dovrebbero venir accelerati per acquistare la medesima energia, dalla relazione:

$$(1) \quad \sigma = \frac{V}{300}$$

dove  $\sigma$  è misurato in gauss. cm. e  $V$  in volt.

L'energia (e quindi la rigidità) va diminuendo via via che i corpuscoli procedono nella materia; supporremo (come si verifica con buona approssimazione per i raggi  $\beta$  veloci) che le perdite di energia (e quindi di rigidità) in uno spessore unitario di materia siano costanti lungo tutta la traiettoria.

Possiamo considerare le traiettorie dei corpuscoli della radiazione penetrante nell'atmosfera come approssimativamente rettilinee; sia per ragioni teoriche che per ragioni sperimentali siamo infatti condotti ad ammettere che la diffusione, per corpuscoli di così elevata energia, non abbia un'azione importante. Per l'applicabilità delle considerazioni che seguono non occorre tuttavia supporre che le deviazioni prodotte dalla diffusione siano piccole in confronto di quelle prodotte dal campo magnetico terrestre.

La penetrazione  $s_0$  di un corpuscolo di rigidità iniziale  $\sigma_0$ , ossia la lunghezza totale della traiettoria, che esso percorre nell'atmosfera prima di aver perduta tutta la propria energia, è data da:

$$(2) \quad s_0 = \frac{\sigma_0}{k\rho}$$

dove  $k$  rappresenta la perdita di rigidità in uno strato di 1 g/cm.<sup>2</sup> e  $\rho$  la densità (supposta uniforme) dell'atmosfera.

I corpuscoli, che giungono in un determinato punto della Terra, sono stati generati a distanze comprese tra 0 ed  $s_0$  dal punto stesso (se la loro penetrazione non è superiore allo spessore dell'atmosfera). Un corpuscolo generato ad una distanza  $s'$  giunge con una rigidità residua:

$$(3) \quad \sigma' = \sigma_0 - k\rho s'$$

mentre la sua rigidità ad una distanza  $s < s'$  dal punto di arrivo è:

$$(4) \quad \sigma = \sigma' + k\rho s.$$

Tutte le distanze sono naturalmente misurate lungo la traiettoria, cosicchè  $s$  rappresenta l'arco di traiettoria, contato a partire dal punto di arrivo.

3. Individuiamo la direzione di provenienza dei corpuscoli mediante l'angolo zenitale  $\chi$  e l'angolo azimutale  $A$ . Precisamente indichiamo con  $\chi$  l'angolo compreso fra la verticale e la tangente alla traiettoria, diretta in senso contrario al moto, e con  $A$  l'angolo diedro compreso fra il meridiano magnetico e il piano verticale tangente alla traiettoria, positivo verso oriente.

Diciamo  $\Delta\chi$  e  $\Delta A$  le componenti della deflessione prodotta dal campo magnetico terrestre lungo tutta la traiettoria. Se non vi è diffusione,  $\Delta\chi$  rappresenta la differenza fra l'angolo zenitale, sotto cui il corpuscolo giunge alla superficie della Terra, e l'angolo zenitale, sotto cui esso viene generato.



Se vi è diffusione, la deflessione prodotta dal campo magnetico si sovrappone a quella prodotta dagli urti contro gli atomi;  $\Delta\chi$  rappresenta allora la differenza fra l'angolo zenitale, sotto cui giunge il corpuscolo, e l'angolo zenitale, sotto cui esso giungerebbe se non vi fosse il campo magnetico terrestre. Analogamente si dica per  $\Delta A$ .

Ci interessa per quel che segue l'espressione di  $\Delta\chi$ .

L'equazione differenziale della traiettoria di un elettrone di rigidità  $\sigma$  in un campo magnetico  $\mathbf{H}$  può scriversi:

$$(5) \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\sigma} \tau \wedge \mathbf{H}$$

( $\tau$  = vettore unitario tangente alla traiettoria, diretto in senso contrario al moto). Moltiplicando scalarmente ambo i membri di (5) per un vettore unitario verticale  $\mathbf{n}$  si ottiene:

$$\frac{d(\tau \times \mathbf{n})}{ds} = \frac{1}{\sigma} \tau \wedge \mathbf{H} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\sigma} \tau \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{H}$$

da cui, chiamando  $H_0$  la componente orizzontale del campo magnetico terrestre:

$$(6) \quad \frac{d\chi}{ds} = -\frac{1}{\sigma} H_0 \sin A.$$

Dato il piccolo spessore dell'atmosfera, possiamo considerare il campo magnetico costante in grandezza e direzione in tutta la regione, che ci interessa. Se, di più, la deflessione prodotta dal campo magnetico, come, eventualmente, quella prodotta dalla diffusione, sono abbastanza piccole, anche  $\sin A$  può considerarsi, in prima approssimazione, costante lungo tutta la traiettoria. L'equazione (6), sostituendo in essa a  $\sigma$  il valore dato dalla (4), si integra allora immediatamente e si ottiene per  $\Delta\chi$  l'espressione:

$$(7) \quad \Delta\chi = \int_{s'}^s \frac{d\chi}{ds} ds = \frac{H_0 \sin A}{k\rho} \log \frac{\sigma_0}{\sigma'}.$$

Il numero di corpuscoli di determinata energia, che vengono lanciati dalla radiazione ultra- $\gamma$  in una determinata direzione, è diverso nei diversi punti dell'atmosfera, e precisamente diminuisce via via che si procede verso gli strati inferiori, corrispondentemente all'assorbimento della radiazione ultra- $\gamma$  primaria. Per semplificare i calcoli, ammetteremo invece che esso rimanga costante; è chiaro che, introducendo questa ipotesi, verremo di nuovo a calcolare un limite inferiore per l'azione del campo magnetico terrestre; giacchè fra i corpuscoli che giungono in un determinato punto

della Terra consideriamo relativamente meno numerosi, di quanto siano in realtà, quelli che provengono da più lontano.

Prendiamo ora in esame, prescindendo, pel momento, dalla diffusione, i corpuscoli di data rigidità iniziale, che giungono sulla superficie della Terra da una direzione compresa entro l'angolo solido  $d\omega$ , dopo aver percorso nell'atmosfera un cammino compreso fra  $s'$  ed  $s' + ds'$ . Il numero di questi corpuscoli, che attraversano normalmente per unità di tempo la superficie elementare  $df$  (vedi fig. 2) sarebbe eguale, se non vi fosse il campo magnetico terrestre, al numero di quelli generati per unità di tempo nel volume  $dV' = ds' df'$  ( $df' = s' d\omega$ ) entro l'angolo solido  $d\omega' = \frac{df'}{s'}$ , nella

medesima direzione media  $(\chi, A)$ , sotto cui essi giungono alla superficie della Terra. Per effetto del campo magnetico invece, questo numero risulta

eguale al numero dei corpuscoli generati in un diverso elemento di volume  $dV''$ , entro un diverso angolo solido  $d\omega''$ , nella direzione media  $(\chi - \Delta\chi, A - \Delta A)$ . La variazione del volume e dell'angolo solido possono, in prima approssimazione, trascurarsi perchè dipendono dal quadrato del campo magnetico (non cambiano infatti di segno invertendo il senso del campo) e danno luogo quindi soltanto ad un effetto del secondo ordine. Non occorre neppure tener conto della diversa posizione dell'elemento di volume in cui vengono generati i corpuscoli, poichè abbiamo ammesso che il numero dei corpuscoli lanciati con una determinata energia in una determinata direzione sia lo stesso in tutti i punti dell'atmosfera. L'effetto del campo magnetico si riduce dunque soltanto a questo: che si osservano in



Fig. 2.

direzione  $(\chi, A)$  i corpuscoli generati in direzione  $(\chi - \Delta\chi,$

$A - \Delta A)$  anzichè quelli generati nella medesima direzione  $(\chi, A)$ , come accadrebbe se non vi fosse il campo magnetico.

Detto quindi  $i(\chi, A, \sigma_0, s')$   $d\sigma_0 ds'$  il numero di corpuscoli di rigidità iniziale compresa fra  $\sigma_0$  e  $\sigma_0 + d\sigma_0$ , generati ad una distanza compresa fra  $s'$  e  $s' + ds'$ , che giungono (per unità di superficie e di angolo solido) dalla direzione  $(\chi, A)$ ; e detto  $i_0$  quello che diverrebbe la funzione  $i$  in assenza del campo magnetico, si ha:

$$i(\chi, A, \sigma_0, s') = i_0(\chi - \Delta\chi, A - \Delta A, \sigma_0, s')$$

ossia, (poichè, per ragioni di simmetria,  $i_0$  non dipende da  $A$ ):

$$(8) \quad i(\chi, A, \sigma_0, s') = i_0(\chi, A, \sigma_0, s') - \frac{\partial i_0}{\partial \chi} \Delta\chi.$$

È facile convincersi che l'equazione (8) vale anche nel caso in cui vi sia diffusione, purchè (come abbiamo ammesso) possano considerarsi eguali

le deflessioni prodotte dal campo magnetico sulle traiettorie di tutti i corpuscoli, di data rigidità iniziale, che giungono in una determinata direzione dopo aver percorso nell'atmosfera una traiettoria di determinata lunghezza. La variazione relativa di intensità prodotta dal campo magnetico su questo gruppo di corpuscoli, è quindi misurata da:

$$(9) \quad \varepsilon = \frac{i - i_0}{i_0} = - \frac{1}{i_0} \frac{\partial i_0}{\partial \chi} \Delta \chi = - \frac{1}{i_0} \frac{\partial i_0}{\partial \chi} \frac{H_0 \sin A}{k\rho} \log \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - k\rho s'}.$$

I corpuscoli di rigidità iniziale  $\sigma_0$ , che si osservano in direzione  $(\chi, A)$ , sono stati generati a distanze che variano tra 0 ed  $s_0 = \frac{\sigma_0}{k\rho}$  (ammesso che  $s_0$  sia minore dello spessore dell'atmosfera) <sup>(1)</sup>. La loro intensità complessiva, in assenza del campo magnetico, sarebbe quindi:

$$j_0(\chi, A, \sigma_0) = \int_0^{s_0} i_0(\chi, A, \sigma_0, s') ds'$$

mentre la variazione relativa di intensità prodotta dal campo magnetico è:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\int_0^{s_0} [i(\chi, A, \sigma_0, s') - i_0(\chi, A, \sigma_0, s')] ds'}{\int_0^{s_0} i_0(\chi, A, \sigma_0, s') ds'} = \\ &= \frac{\int_0^{s_0} i_0(\chi, A, \sigma_0, s') \varepsilon(\chi, A, \sigma_0, s') ds'}{\int_0^{s_0} i_0(\chi, A, \sigma_0, s') ds'}. \end{aligned}$$

Se non vi è diffusione,  $i_0$  va considerato, in base alle ipotesi fatte, come costante rispetto ad  $s'$ . Se vi è diffusione,  $i_0$  varia con  $s'$  di quantità dipendenti dal quadrato dell'angolo medio di diffusione; per un calcolo approssimativo sarà lecito ancora considerarlo come costante. Otteniamo quindi:

$$(10) \quad \eta = - \frac{H_0 \sin A}{k\rho} \frac{1}{j_0} \frac{\partial j_0}{\partial \chi}.$$

Infine l'intensità totale della radiazione corpuscolare, che si osserverebbe nella direzione  $(\chi, A)$  se non vi fosse il campo magnetico, è data da:

$$I_0(\chi, A) = \int j_0(\chi, A, \sigma_0) d\sigma_0$$

(1) In realtà esperienze recentissime hanno dimostrato che per una porzione almeno della radiazione corpuscolare osservata al livello del mare la penetrazione iniziale è maggiore dello spessore dell'atmosfera. Questa circostanza però non può modificare sostanzialmente i risultati del calcolo.

e la variazione percentuale di questa intensità prodotta dal campo magnetico, da:

$$(11) \quad E = \frac{\int j_0(\chi, A, \sigma_0) \eta(\chi, A, \sigma_0) d\sigma_0}{\int j_0(\chi, A, \sigma_0) d\sigma_0} = - \frac{H_0 \operatorname{sen} A}{k\rho} \frac{1}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial \chi}.$$

Poichè  $I_0$  è funzione decrescente di  $\chi$ ,  $E$  è positivo per  $A$  compreso fra  $0$  e  $\pi$ , negativo per  $A$  compreso fra  $\pi$  e  $2\pi$ . L'effetto del campo magnetico è dunque, come avevamo riconosciuto fin da principio, quello di aumentare l'intensità dei raggi, che provengono da oriente, e di diminuire l'intensità di quelli, che provengono da occidente del meridiano magnetico. La differenza fra le intensità che si osservano nelle due direzioni simmetriche rispetto al meridiano  $(\chi, A)$  e  $(\chi, -A)$  è:

$$(12) \quad 2E = -2 \frac{H_0 \operatorname{sen} A}{k\rho} \frac{1}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial \chi}.$$

4. Per valutare numericamente questo risultato bisognerebbe anzitutto conoscere  $I_0(\chi)$ , ossia la dipendenza dell'intensità della radiazione penetrante dall'angolo zenitale. Esistono finora al riguardo solo poche ed imprecise determinazioni; prendendo p. e. per  $I_0$  l'espressione:

$$(13) \quad I_0(\chi) = C e^{-\frac{\mu D}{\cos \chi}}$$

( $C$  = costante,  $D$  = spessore dell'atmosfera), che rappresenta la distribuzione di intensità, con cui giungerebbe al livello del mare una radiazione di coefficiente di assorbimento  $\mu$ , distribuita isotropicamente al di fuori dell'atmosfera, si ottiene dalla (12):

$$(14) \quad 2E = 2\mu D \frac{\operatorname{sen} \chi}{\cos^2 \chi} \frac{H_0 \operatorname{sen} A}{k\rho}.$$

Secondo Tuwim<sup>(1)</sup> le misure di intensità nelle diverse direzioni si accordano approssimativamente con una espressione del tipo della (13) ponendo in essa per  $\mu$  il valore  $0,9 \cdot 10^{-3}$  cm<sup>2</sup>/g. Se si ammette poi che le perdite di energia nella materia siano pei corpuscoli della radiazione penetrante le stesse che per i raggi  $\beta$  veloci ( $10^6$  volt per g/cm<sup>2</sup>), si ha per  $k$  il valore  $3,3 \cdot 10^3$ . Ponendo inoltre:  $H_0 = 0,23$  gauss,  $D = 1030$  g/cm<sup>2</sup>,  $\rho = 1,29 \cdot 10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>, si calcolano per  $2E$  i valori riuniti nella seguente tabella:

(1) L. TUWIM, «Sitzber. d. Preuss. Akad.» 1931, p. 91.



$\gamma \backslash A$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$30^\circ$	0,033	0,047	0,058	0,067
$45^\circ$	0,07	0,10	0,12	0,14
$60^\circ$	0,17	0,24	0,30	0,35

L'influenza del campo magnetico terrestre sopra la distribuzione azimutale d'intensità della radiazione penetrante sembrerebbe dunque tutt'altro che trascurabile di fronte all'esattezza raggiungibile sperimentalmente. Mentre invece un confronto eseguito dall'A. fra l'intensità della radiazione penetrante proveniente da oriente e da occidente del piano del meridiano magnetico non ha rivelato differenze superiori agli errori sperimentali (del 1,5 %)<sup>(1)</sup>.

Voler trarre da ciò la conclusione che la radiazione corpuscolare osservata non può essere la radiazione secondaria di una radiazione  $\gamma$ , sarebbe ancora prematuro; sia per l'incertezza legata alla scelta del valore di  $k$  e della funzione  $I_0(\gamma)$ , sia perchè l'esperienza citata non è stata eseguita nelle condizioni geometriche più opportune per mettere in evidenza l'effetto, di cui ora ci occupiamo. Per dare una base solida alla discussione, occorre dunque anzitutto determinare sperimentalmente  $I_0(\gamma)$  e ripetere quindi il confronto fra l'intensità dei raggi provenienti da oriente e da occidente del meridiano magnetico, limitando l'osservazione a quelli più fortemente inclinati, pei quali la teoria prevede il massimo effetto.

Ambedue queste esperienze sono in preparazione.

(1) B. Rossi, loc. cit.

**Fisica (Optica).** — *Sulla forma delle frange d'interferenza ottenute da onde affette da astigmatismo puro con reticoli ad orientamento qualunque*<sup>(1)</sup>. Nota di R. BRUSCAGLIONI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio A. GARBASSO.

Abbiamo scelto il caso dell'astigmatismo puro non tanto per l'interesse pratico che esso può avere solo in un numero limitatissimo di casi, quanto per il fatto che la semplicità delle formule e della forma delle frange ottenute si presta a un confronto più facile fra teoria ed esperienza.

In una prossima Nota renderemo conto di un lavoro analogo, eseguito sui sistemi ottici di caratteristiche molto più comuni e arriveremo a dimostrare il notevole interesse pratico delle formule ricavate dalla teoria delle frange d'ombra.

Le formule che il dott. F. Scandone ha indicato per definire l'andamento delle frange nel caso in esame sono le seguenti<sup>(3)</sup>:

$$(1) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{c_{20} - y/2 D_0^2}{c_{22} - y/2 D_0^2}$$

$$(2) \quad N_t = m \cos \alpha f_t$$

$$(3) \quad N_s = m \sin \alpha f_s$$

$$(4) \quad 1/\delta = 2 m D_0 \sqrt{\left(c_{22} - \frac{y}{2 D_0^2}\right)^2 \sin^2 \alpha + \left(c_{20} - \frac{y}{2 D_0^2}\right)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Il significato dei simboli è il seguente:

$\alpha$  = Angolo formato dalla direzione dei tratti del reticolo con la giacitura del piano di simmetria del sistema ottico in esame (e quindi delle rispettive normali);

$\beta + \frac{\pi}{2}$  = Angolo formato dalla direzione delle frange d'interferenza (che come è noto risultano rettilinee) col piano di simmetria del sistema ottico in esame;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di ottica di Firenze.

(2) Nella seduta del 20 dicembre 1931.

(3) Cfr. F. SCANDONE, *Sulla forma delle frange d'ombra extrassiali ottenute con un reticolo a tratti inclinati sul piano di simmetria del sistema ottico*, « Nuovo Cimento », agosto-settembre-ottobre 1931, n. 8.

$c_{22}$  ;  $c_{20}$  = Coefficienti dei termini di secondo grado nella espressione generale dell'aberrazione d'onda. Essi ci definiscono in modo completo l'astigmatismo del sistema in esame;

$y$  = Distanza del piano del reticolo dal piano che l'ottica geometrica definisce come quello contenente il cerchio di minima confusione;

$D_0$  = Distanza del piano su cui si osservano le frange dal cerchio di minima confusione;

$f_s$  ,  $f_t$  = Lunghezza della focale sagittale o tangenziale;

$N_s$  ,  $N_t$  = Numero delle frange che compaiono nel campo quando il piano del reticolo si trova nel piano di una delle due focali;

$m$  = Frequenza del reticolo;

$1/\delta$  = Frequenza delle frange.

Si noti subito che per poter assegnare un significato più preciso ai coefficienti  $c_{22}$  e  $c_{20}$  ed in particolare per poter attribuire ad essi il significato di coefficienti relativi al sistema ottico in esame dovremmo definire caso per caso il piano su cui si studiano i fenomeni d'interferenza.

Giustificheremo ampiamente in una prossima Nota questa affermazione, in ogni modo è bene ricordare che i coefficienti che compaiono nella espressione generale dell'aberrazione sono relativi all'onda considerata tangente al piano su cui si osservano le frange e variano naturalmente al variare della posizione di questo; come appunto dimostrerò in una prossima Nota, per ricavare i coefficienti relativi ad un piano dai coefficienti relativi ad un altro occorrono calcoli assai complicati che è meglio evitare ove è possibile.

Chiamando con  $w$  la distanza del punto di coordinata  $y$  dalla focale sagittale e con  $L$  [ $L = 2D_0^2(c_{20} - c_{22})$ ] la distanza fra le due focali, la prima equazione può essere scritta:

$$(1 \text{ bis}) \quad w \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \left( \beta + \frac{\pi}{2} \right)} + 1 \right) = L$$

formula che ci sarà utile per il calcolo della  $L$  dagli interferogrammi.

Consideriamo una serie di interferogrammi ottenuti mantenendo  $\alpha$  costante e differente da zero ma variando la  $y$ ; la (1) mostra che la  $\operatorname{tg} \left( \beta + \frac{\pi}{2} \right)$  varia in funzione di  $y$  in modo tale che riportati, su una coppia di assi coordinati, le  $y$  in ascisse, le  $\operatorname{tg} \left( \beta + \frac{\pi}{2} \right)$  in ordinate otteniamo un'iperbole equilatera, cogli assintoti paralleli agli assi coordinati ma non coincidenti con essi.

Noi vediamo pure che la curva taglia l'asse dell' $y$  nel punto  $y = 2 D_0^2 c_{22}$ , ossia nel punto che rappresenta la focale tangenziale, se  $\tan \alpha = 0$ , come si è supposto.

Per eseguire quindi il calcolo di  $L$  potremo usare la formula (1) sotto la forma in cui l'abbiamo scritta in (1 bis) poichè in questo modo noi verremo ad eliminare la indeterminazione dell'origine delle ascisse. Infatti, se eseguiamo una serie di interferogrammi, potremo registrare la posizione del reticolo rispetto ad una origine arbitraria, ossia misureremo non la  $y$  ma la  $y$  più una certa costante  $k$  incognita che, come vedremo, sarà superfluo determinare; possiamo perciò tracciare egualmente il diagramma  $\tan\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = f(y)$ .

Il punto facilmente determinabile per cui  $\tan\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , come abbiamo visto, non è altro che l'origine delle  $w$ .

Si hanno così tutti gli elementi necessari per la determinazione di  $L$ .

Se poi noi vorremo calcolare il valore dei due coefficienti  $c_{22}$  e  $c_{20}$  li potremo ricavare dalle due note formule:

$$(5) \quad 2 D_0^2 (c_{20} - c_{22}) = L$$

$$(6) \quad \frac{1}{D_0 + 2 D_0^2 c_{22}} + \frac{1}{D_0 + 2 D_0^2 c_{20}} = \frac{2}{D_0}$$

che trasformate opportunamente ci danno:

$$(7) \quad c_{22} = \frac{D_0 - L - \sqrt{D_0^2 + L^2}}{4 D_0^2}$$

$$(8) \quad c_{20} = \frac{-c_{22}}{1 + 4 D_0 c_{22}}$$

Si può obiettare che la determinazione del punto in cui è

$$\tan\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

è un'operazione dal cui esito troppo dipende la approssimazione con cui i due coefficienti vengono ad essere determinati; ma contro a ciò sta il fatto che, una volta verificato essere la teoria espressa dalla formula (1) in accordo con le conclusioni dell'ottica geometrica, nella pratica delle misure ci renderemmo conto facilmente di un errore nella determinazione dello zero per il fatto che, eseguendo i calcoli per punti differenti del grafico ottenuto,



avremmo dei valori sempre diversi e variabili gradualmente, perchè l'errore si fa risentire sempre di più quanto più vicino è alla focale sagittale il punto per cui si esegue il controllo, e perciò è avvertibile ed eliminabile facilmente.

Tracciata così la via per dedurre, da una serie d'interferogrammi, la misura dell'astigmatismo di un sistema ottico affetto da astigmatismo puro, passiamo a farne la verifica in un caso pratico:

Abbiamo scelto per sistema ottico da esaminare uno specchio sferico come il più atto, praticamente, a dare astigmatismo puro; basterà infatti porsi nelle immediate vicinanze del centro di curvatura perchè l'aberrazione sferica sull'asse sia trascurabile, e sia pure trascurabile praticamente il coma; altro vantaggio che si ottiene usando uno specchio sferico come sistema ottico è la facilità con cui potremo determinare i parametri occorrenti a calcolare geometricamente la misura dell'astigmatismo.

Nella tavola I abbiamo riportato una serie di sette interferogrammi ottenuti col sistema ottico della figura 1.

In O si ha una sorgente luminosa otticamente puntiforme <sup>(1)</sup> di cui si forma in I l'immagine per mezzo di uno specchio concavo, il fascio riflesso attraversava un reticolo sopportato da un carrello mobile nella direzione V—I con graduazione a nonio per la lettura degli spostamenti. V è il vertice dello specchio, ci definisce insieme ai punti I ed O il piano di simmetria del sistema.

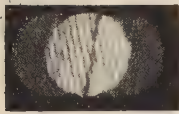
La realizzazione del sistema è stata molto facilitata dall'avere a disposizione un « Banco Ottico Ronchi ».

Si sono individuati con sufficiente approssimazione tutti i parametri del sistema nella maniera seguente: si è disposta la superficie riflettente, di cui si conosceva il raggio di curvatura, sulla piattaforma autocentrante; con l'apposita vite di regolaggio si è posto orizzontale l'asse ottico della superficie, si è quindi posto la sorgente luminosa (fenditura di uscita di un momocromatore) nel centro di curvatura della superficie riflettente (l'immagine coincideva con la sorgente di luce), si è quindi ruotata la piattaforma di un angolo di 10° attorno al suo asse verticale; abbiamo posto là dove si formava l'immagine un reticolo a 300 tr./cm inclinato in modo tale che la direzione dei tratti non fosse nè parallela nè normale al piano di simmetria (orizzontale); abbiamo sospeso davanti alla superficie riflettente e molto prossimamente ad essa un filo a piombo, abbiamo posto dietro al reticolo un'obiettivo fotografico M, in S abbiamo posto uno schermo ad una distanza tale da essere nel piano coniugato di V rispetto M (abbiamo illuminato con luce diffusa la superficie riflettente e ne abbiamo messa a fuoco l'immagine sullo schermo S).

(1) Per disporre di una maggiore quantità di luce ci siamo serviti, invece che di una sorgente puntiforme, di una fenditura; torneremo in seguito sull'argomento per discutere sull'orientamento da dare alla fenditura luminosa perchè le frange risultino nitide.

TAVOLA I.

*Frangie d'interferenza ottenute da onde affette da astigmatismo puro.*



N. 1



N. 2



N. 3



N. 4



N. 5



N. 6

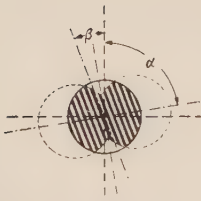


N. 7

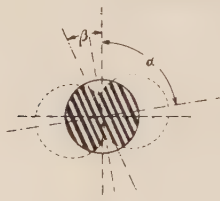
TAVOLA II.

*Schematizzazione degli interferogrammi della Tavola I.*

$$\tan \alpha = -5.59$$



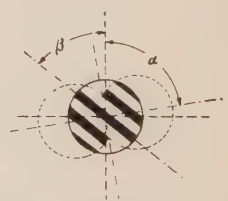
$$\begin{aligned} y+k &= 3,0 \\ \operatorname{tg}(\beta + \frac{\pi}{2}) &= -2,60 \\ w &= 1,22 \end{aligned}$$



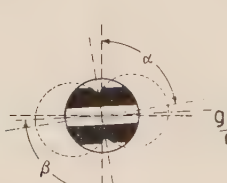
$$\begin{aligned} &2,6 \\ &-2,14 \\ &0,82 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &2,2 \\ &-1,52 \\ &0,42 \end{aligned}$$



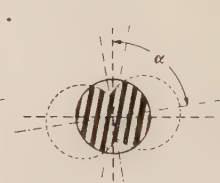
$$\begin{aligned} &2,0 \\ &-0,71 \\ &0,22 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y+k &= 1,8 \\ \operatorname{tg}(\beta + \frac{\pi}{2}) &= +0,03 \\ w &= 0,02 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &1,5 \\ &+1,95 \\ &0,28 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &1,2 \\ &+4,60 \\ &0,58 \end{aligned}$$

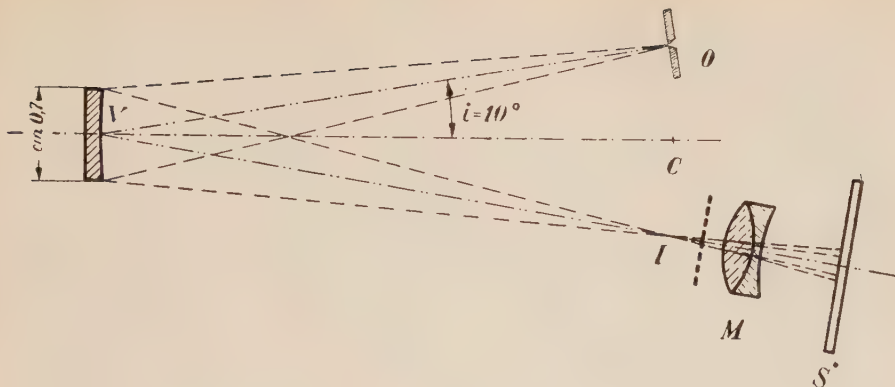


Fig. 1.

In tal modo si viene a studiare l'aberrazione d'onda relativa al piano dello specchio e per  $D_0$  dovremo introdurre nelle formule il raggio di curvatura dello specchio ( $D_0 = 20,00$  cm.).

Abbiamo eseguito le sette fotografie in sette punti di ordinata differente, abbiamo letto il valore di detta ordinata sulla graduazione di cui era fornito il carrello porta-reticolo.

Nella tavola II queste ordinate sono indicate sotto il simbolo  $y + k$ , essendo appunto differenti da  $y$  solo per una costante  $k$  incognita che, come abbiamo visto, è superfluo determinare.

Dalle fotografie riportate si vede come sia possibile determinare per mezzo degli interferogrammi tutti gli elementi che occorrono, essendo ben definito l'orientamento dei tratti del reticolo (per mezzo dei cerchi laterali) e il piano di simmetria del sistema (per mezzo dell'immagine del filo a piombo). Nella tavola II è riportata la interpretazione schematica degli interferogrammi precedenti insieme ai risultati.

Nella fig. 2 è riportato il grafico in  $y + k$ ;  $w$  ed in  $\tan\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ , ottenuto con i valori sperimentali ricavati dagli interferogrammi.

Come prima verifica della teoria abbiamo calcolato, nel modo indicato, l'aberrazione di astigmatismo ed abbiamo trovato in media:  $L = 1,230$  cm.; abbiamo poi calcolato la stessa aberrazione con la ben nota formula geometrica:

$$L = 2 R \sin i \tan i$$

in cui:  $R (= D_0)$  è il raggio di curvatura dello specchio, ed  $i$  è l'angolo di incidenza del raggio passante per il centro della pupilla di entrata del sistema ( $= 10^\circ$  nel caso precedente). Abbiamo ottenuto:  $L = 1,221$  cm.

Dunque, anche supponendo esatto il valore di  $L$  ottenuto con la formula geometrica, l'errore commesso nella determinazione di  $L$  dagli interferogrammi è del  $9/100$ , e quindi è più che tollerabile per gli usi pratici.

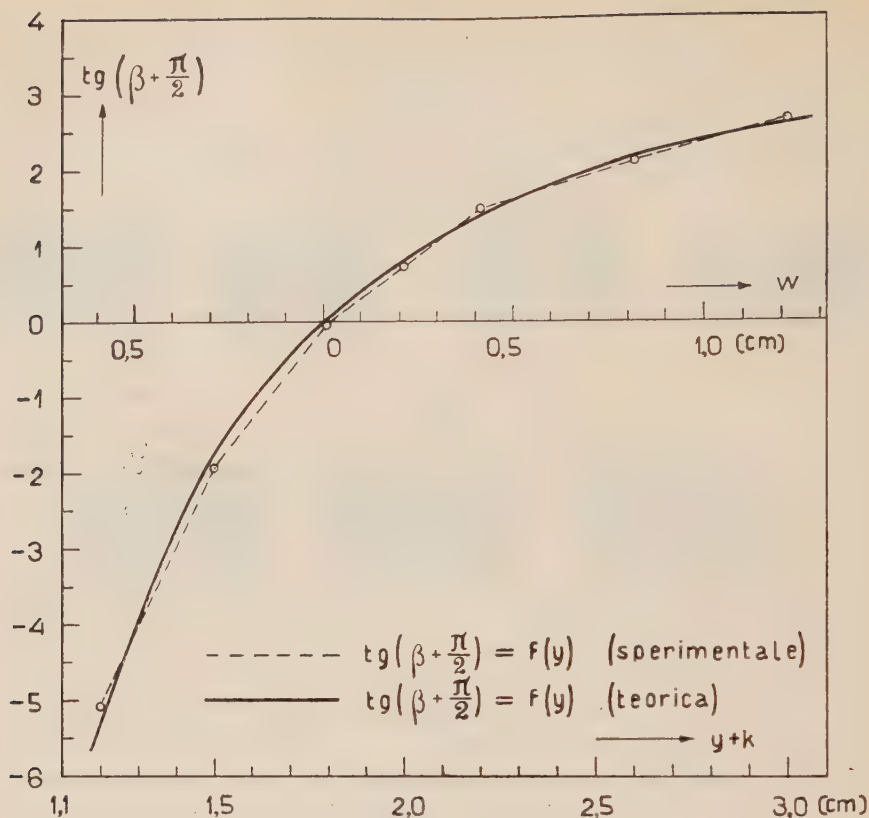


Fig. 2.

Per ulteriore controllo della teoria, abbiamo calcolato i valori di  $\text{tg}(\beta + \frac{2}{\pi})$  partendo dall'aberrazione calcolata geometricamente e li abbiamo riportati nel diagramma della figura 2.

Evidentemente l'accordo fra i valori calcolati geometricamente e quelli determinati sperimentalmente dagli interferogrammi è ottimo, le discordanze fra i due diagrammi essendo di ordine di grandezza tale da essere imputabili completamente alla approssimazione delle misure eseguite nei vari parametri introdotti nel calcolo.

Eseguito il calcolo dei coefficienti  $c_{20}$  e  $c_{22}$ , abbiamo ottenuto:

$$c_{22} = -74.5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1} \quad ; \quad c_{20} = 79.2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

affetti dallo stesso errore con cui è stato determinato L.

Abbiamo in ultimo eseguito una verifica della formula (2) sull'interferogramma N. 5 potendo considerare detto interferogramma come ottenuto ponendo il reticolo nella focale tangenziale.



La formula è risultata verificata; essa ci permette di calcolare rapidamente l'astigmatismo del sistema mediante un unico interferogramma, sia pure con una precisione minore di quella ottenuta col sistema precedente, per quanto ancora soddisfacente.

Prove conclusive hanno dimostrato che una precisione ancora maggiore si può raggiungere quando si facciano le misure direttamente ad occhio anzichè sull'interferogramma, potendosi eseguire allora un gran numero di misure e potendosi più facilmente controllare e rettificare le misure che eventualmente risultassero anomale.

**Fisica (Fisica teorica).** — *Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità.* — IV. *Discussione e perfezionamento della teoria precedente.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio F. SEVERI.

La teoria unitaria da me svolta in tre Note precedenti<sup>(2)</sup> è, come fu chiaramente dichiarato fin dal principio, essenzialmente basata sul criterio di ampliare la natura geometrica (riemanniana senza torsione) dello *spazio-tempo* rappresentativo della teoria einsteiniana della gravitazione, in maniera opportuna perchè in esso vengano a risultar disponibili nuovi caratteri geometrici assoluti, atti a rappresentare il più esattamente possibile, da soli o in unione ai caratteri geometrici precedenti, lo svolgimento *nello spazio e nel tempo* anche dei fenomeni elettromagnetici, colla minima perturbazione possibile della classica rappresentazione einsteiniana dello svolgimento dei fenomeni gravitazionali e meccanici.

Nella I Nota, considerando astrattamente la natura degli spazi *a connessione metrica* e dei principali tensori che in essi possono concepirsi, dimostrai che il problema in questione era risolubile, anzi che per ciò non era neppur necessario spingere la generalizzazione fino agli spazi *a connessione metrica*, poichè risultava già sufficiente allo scopo la considerazione di certi particolari spazi *a connessione euclidea*. Ma nella II Nota, costruendo poi effettivamente la nuova teoria, allettato da una apparente maggiore semplicità formale, ho data la preferenza a una *connessione metrica*, la quale risolveva il problema posto, soddisfacendo inoltre alla condizione di condurre, nel caso di assenza di elettricità, **esattamente** anche alla teoria gravitazionale di Einstein. In altri termini, ho allora preferita per lo *spazio-tempo* una connessione metrica che, in assenza di elettricità si riduceva a una connessione euclidea, anzi senz'altro alla connessione riemanniana (euclidea senza torsione), della teoria einsteiniana.

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XIII, serie 6<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., pp. 364, 695, 770.

Ma facendo ciò sorvolai sul fatto che, in presenza di elettricità, oltre la amplificazione della natura dello *spazio-tempo voluta e utile* per l'interpretazione dei fenomeni (cioè una torsione opportuna), io ne introducevo contemporaneamente anche una almeno *inutile*, se non proprio dannosa, conseguente appunto dal carattere metrico della connessione ammessa.

In questa Nota viene eliminato cotesto difetto della precedente teoria, per modo che essa, dopo questa correzione, risponde esattamente a **tutti** quei requisiti che, nei ripetuti tentativi di costruzione di *teorie macroscopiche unitarie*, erano stati *originariamente* posti come meta ideale, da raggiungere eventualmente anche solo con approssimazione.

Tutto ciò indipendentemente però dal tentativo, di indole differente, iniziato da Einstein nel 1928 e da allora costantemente proseguito.

In alcune poi delle numerose e benevoli recensioni apparse sulla teoria da me svolta nelle prime tre Note, è stata lamentata la sua limitazione ai fenomeni macroscopici, e espresso l'augurio di una sua estensione anche a quelli microscopici. Ora, su cotesto punto, posso solo dire di essermi limitato alla considerazione del problema più ristretto non solo perchè pensavo che anch'essa presentasse un notevole interesse, ma anche perchè del problema più generale è, secondo me, la stessa posizione ancora irta, oltre che di gravi difficoltà, anche di incongruenze.

#### DISCUSSIONE DELLA TEORIA PRECEDENTE.

##### 1. La connessione per lo *spazio-tempo* considerata nella II Nota

$$(A) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + 2 \delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu}$$

può venir, come è notissimo, anche espressa scindendo il vettore asimmetrico del secondo membro nelle sue due parti rispetto agli indici  $\mu, \nu$  rispettivamente simmetrica e emisimmetrica. Possiamo cioè scrivere:

$$(A') \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + (\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} + \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu}) + (\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu}).$$

Nella formazione del tensore generale di curvatura  $L_{\mu\nu\rho}^{\alpha}$  (equazione (5) della II Nota) portano un effettivo contributo solo il primo e l'ultimo termine del secondo membro, cioè il simbolo di Christoffel di seconda specie  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$  e la parte emisimmetrica del vettore  $2 \delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu}$ , ossia  $(\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu})$ . In altri termini agli effetti della formazione del tensore di curvatura  $L_{\mu\nu\rho}^{\alpha}$ , e conseguentemente delle deduzioni formali che seguono nella suddetta II Nota,

tutte essenzialmente fondate su tale tensore, è quindi indifferente considerare, invece della connessione ( $A$ ) o dell'equivalente ( $A'$ ) la connessione

$$(C) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu},$$

che è una delle più semplici e matematicamente note *connessioni semisimmetriche* di Schouten.

In particolare potranno quindi assumersi ancora le equazioni ( $B$ ) della II Nota come legge fondamentale unitaria e come allora, volendo, scriverle nella forma:

$$(I) \quad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu},$$

$$(II) \quad \frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Psi_{\mu\nu}.$$

2. Le equazioni (I) e (II) sono formalmente identiche rispettivamente alle equazioni gravitazionali di Einstein e alle equazioni di Maxwell, salvo, si intende, il riferimento alla ammessa connessione dello spazio-tempo.

Nel caso di assenza di elettricità e quindi di annullamento del vettore  $\psi$ , fisicamente coincidente col potenziale elettromagnetico, le equazioni (II) si annullano sempre identicamente, mentre le equazioni (I) vanno a coincidere non più solo formalmente, ma anche sostanzialmente, colle equazioni di Einstein, poichè in tal caso risultano sempre, come esse, riferite alla semplice connessione riemanniana senza torsione

$$(I) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}.$$

In presenza di elettricità invece i due sistemi (I) e (II) vengono ad esser riferiti a *spazi-tempi* rispettivamente corrispondenti o alla connessione ( $A$ ) o alla connessione ( $C$ ), ciò che implica, almeno concettualmente, una abbastanza notevole differenza, della quale dobbiamo cercar di renderci esatto conto<sup>(1)</sup>.

3. È noto che qualsiasi variazione della parte simmetrica di una connessione di Riemann, che per maggior generalità supporremo con torsione, cioè espressa originariamente dalla formula

$$(2) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad \Omega_{\mu\nu}^{\alpha} = -\Omega_{\nu\mu}^{\alpha},$$

(1) A chiarire le mie idee su questo punto hanno contribuito alcune cortesie osservazioni del prof. Eduard Poznansky dell'Università di Varsavia, al quale mi è grato esprimere la mia riconoscenza.

si traduce sempre nell'aggiunta di un tensore simmetrico  $a_{\mu\nu}^{\alpha}$  alla connessione stessa. Si avrà cioè, dopo tale variazione:

$$(3) \quad \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + a_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + a_{\mu\nu}^{\alpha} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha}.$$

Cotesta connessione implica, per lo spazio da essa caratterizzato, l'inevitabile conseguenza di una alterazione delle lunghezze in generale e quindi una alterazione anche dell'unità di lunghezza, in ogni loro trasporto, alterazione della quale non si ha alcun riscontro negli spazi riemanniani secondo la connessione (1) o anche (2). Essa è in moltissimi casi funzione non solo delle posizioni iniziali e finali delle lunghezze trasportate, ma anche di tutte le posizioni intermedie, o dei cammini percorsi. E, come è evidente, quando si verifichi quest'ultimo caso, negli spazi corrispondenti viene a mancare la possibilità di misurare *more solito*, cioè per mezzo del successivo trasporto di un'unità campione, la lunghezza di una curva; ciò che si esprime concisamente dicendo che in quegli spazi le lunghezze non sono *integrabili*.

4. Orbene nello spazio caratterizzato dalla connessione ( $A$ ) o dall'equivalente ( $A'$ ), nel quale il tensore simmetrico perturbante  $a_{\mu\nu}^{\alpha}$  è specificato colla somma  $\delta_{\mu}^{\alpha}\psi_{\nu} + \delta_{\nu}^{\alpha}\psi_{\mu}$ , — quantunque in via eccezionale e proprio a cagione di cotesta sua forma particolare si verifichino le favorevoli circostanze ripetutamente ricordate per quanto riguarda il tensore di curvatura  $\bar{\Gamma}_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$  — si riscontra sempre non solo il fatto della alterazione delle lunghezze nel loro trasporto, ma anche quello della non integrabilità della lunghezza delle curve in generale.

Quanto precede scende da noti teoremi generali, ormai correntemente esposti nelle moderne geometrie differenziali; ma può anche verificarsi direttamente senza difficoltà.

Basta infatti, per concludere circa la variabilità delle lunghezze, dimostrare che la derivata covariante del tensore fondamentale  $g_{\mu\nu}$  con riferimento alla nostra connessione ( $A$ ), è differente da zero. Ricordando l'espressione della connessione e le notissime formule fondamentali:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} = [\mu\nu, \alpha] + [\alpha\nu, \mu] \quad , \quad g_{\alpha\lambda} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = [\mu\nu, \alpha]$$

in cui le parentesi quadre indicano i simboli di Christoffel di prima specie avremo:

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} g_{\alpha\mu} &= \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\alpha} \\ &= [\mu\nu, \alpha] + [\alpha\nu, \mu] - [\alpha\nu, \mu] - [\mu\nu, \alpha] - 4g_{\alpha\mu}\psi_{\nu} \\ &= -4g_{\alpha\mu}\psi_{\nu} \neq 0. \end{aligned}$$



La non integrabilità delle lunghezze poi risulta dal fatto che per la connessione ( $A'$ ) il tensore  $L_{\alpha\mu\nu\rho}$  non soddisfa alla condizione necessaria e sufficiente per la sussistenza della integrabilità delle lunghezze:

$$L_{\alpha\mu\nu\rho} = -L_{\mu\alpha\nu\rho},$$

come è facile verificare immediatamente, per es. per mezzo della (5) della II Nota, abbassando tutti gli indici secondo le note regole del calcolo assoluto.

5. Conseguenza di quanto precede è che la teoria unitaria, basata sulla connessione ( $A$ ), dovrebbe svolgersi in uno *spazio-tempo* la cui geometria implicherebbe essa pure, sia pure limitatamente al caso dell'esistenza di fenomeni elettrici, e in proporzioni minori, un residuo degli inconvenienti che abbiamo criticati in qualche teoria precedente e segnatamente in quella di Weyl (1).

#### PERFEZIONAMENTO DELLA TEORIA.

6. Per evitare gli inconvenienti or ora lamentati basterà eliminare la parte simmetrica dannosa della connessione, cioè il termine  $\delta_\mu^\alpha \psi_\nu + \delta_\nu^\alpha \psi_\mu$ ; eliminazione che, ripetiamolo, non si ripercuote affatto sulle conseguenze per noi essenziali. Cancelliamo quindi senz'altro quel termine e assumiamo invece della ( $A$ ) come fondamentale la connessione:

$$(C) \quad L_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \delta_\mu^\alpha \psi_\nu - \delta_\nu^\alpha \psi_\mu.$$

Essa, come d'altronde anche quella ( $A$ ) (ved. n. 2 della III Nota), ha, in via eccezionale la proprietà di conservare il parallelismo della connessione riemanniana (1). Per tali connessioni, al contrario di quanto al n. 3 della stessa III Nota era stato affermato considerando le cose da un punto di vista troppo generale, le autoparallele coincidono colle geodetiche. Perciò qualcuna delle considerazioni che seguono in quella Nota dovrebbe venir in qualche punto rettificata, mentre tutta la questione fisica risulta notevolmente semplificata.

In conclusione possiamo dire che la distorsione, atta a rappresentare nello *spazio-tempo* la parte elettrica dei fenomeni fisici ha la caratteristica di perturbare al minimo possibile la geometria dello *spazio-tempo* riemanniano senza torsione, o einsteiniano, rappresentativo dei soli fenomeni della materia ponderabile.

(1) Dopo la presentazione di questa Nota della quale, in assenza del prof. Levi-Civita che aveva presentate le precedenti, io avevo pregato S. E. Severi, seppi dal prof. Levi-Civita che Egli aveva inviata all'Accademia una Nota del prof. Enea Bortolotti, nella quale era appunto stato fatto qualche rilievo nel senso sopra detto. Più tardi ne ricevetti conferma anche dallo stesso prof. Bortolotti. (*Nota alla revisione delle bozze*).

7. A questo punto è doveroso ricordare che la connessione (C) era stata, a mia insaputa, precedentemente considerata, dallo stesso punto di vista fisico, dal sig. Infeld in una brevissima Nota <sup>(1)</sup>, ma solo incidentalmente a modo di esempio e quasi per escluderla, o almeno per relegarla fra varie altre che avevano con essa comuni le proprietà essenziali, così che non si vedeva chiaramente quale dovesse venir preferita.

Cotesta radicale differenza di modo di vedere dipende senza dubbio dalla differente nostra concezione dell'essenza dello spazio-tempo.

È evidente che il sig. Infeld attribuisce a tutte le connessioni che permettono di porre una legge fondamentale, la quale al limite si riduca alle equazioni gravitazionali e alle equazioni di Maxwell, lo stesso valore fisico, indipendentemente dai differenti artifici cui si è dovuto ricorrere per raggiungere quello scopo. Perciò non trova un criterio di preferenza e rinvia la soluzione del problema a quando lo si sappia trattare *non più per via puramente formale, ma per via fisica*. Ora io ritengo che, per quanto ho detto nelle Note precedenti, che in linea di massima sussiste anche dopo il perfezionamento di questa Nota, la connessione (C) sia da preferire a tutte le altre per la sua semplicità formale e per la chiarissima e semplicissima interpretazione *fisico-geometrica* di *pura torsione* che consente per il vettore  $\delta_\mu^\alpha \psi_\nu - \delta_\nu^\alpha \psi_\mu$ .

8. Qualcuno ha infine osservato e considerato come un difetto il fatto che il vettore  $\psi_\nu$  della connessione discussa sia solo determinato a meno del gradiente di uno scalare.

Ciò dipende evidentemente dal fatto che alcuni attribuiscono ancora allo spazio-tempo una specie di esistenza reale; perciò li urta il fatto dalla sua non completa determinazione.

Io invece che ho sempre, fin dai primordi della relatività, sostenuto esser lo *spazio-tempo* un puro spazio rappresentativo dello svolgimento dei fenomeni nello spazio fisico e nel tempo, non solo non mi sento urtato da quella deficienza di determinazione più di quanto non lo sia dalla identica indeterminazione fisica del potenziale elettromagnetico, ma vedo anzi in quella coincidenza un pregio della teoria, come ho ripetutamente rilevato nelle Note precedenti. In altri termini, io non mi sento per nulla maggiormente turbato dal fatto di poter scegliere come continuo (spazio-tempo) rappresentativo per la sintesi geometrica dei fenomeni fisici una serie di spazi a differente torsione, più di quanto non mi sento turbato dal fatto che, per rappresentare un diagramma, per esempio l'orario grafico di una linea ferroviaria, posso scegliere un foglio di carta disteso sul piano del mio tavolo, o lo stesso foglio disteso su un cilindro qualsiasi. Al più posso dire che rimane, come nel concetto di potenziale, qualche cosa che non ho occasione di utilizzare.

(1) L. INFELD, *Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn K. Hattori, "Ueber eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität"*, «Phys. Zeitschr.», 29. Bd., pp. 810-811.

**Fisica (Chimica-Fisica).** — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica.* — II. *Sulla ricerca del Lantanio*<sup>(1)</sup>. Nota di G. PICCARDI e A. SBERNA, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

La ricerca qualitativa del Lantanio, si può condurre agevolmente in base allo spettro di scintilla, se la concentrazione del La, nella sostanza da esaminare, non è eccessivamente piccola e se gli spettri degli elementi che lo accompagnano non sono troppo ricchi di righe. Non servono per questo elemento altri metodi di analisi, usati per le terre rare colorate, poichè esso non presenta spettro di assorbimento, nè nella regione visibile, nè in quella ultravioletta. Le righe di massima persistenza del La sono situate a  $\lambda\lambda$  3949.10, 3171.7, 2379.4 I. A. e sono ottenibili da soluzioni contenenti lo 0.01 % ma non da quelle contenenti lo 0.001 %<sup>(3)</sup>; si può cioè identificare il La nella proporzione minima di 1 a 10.000 o tutt'al più di circa 5 a 100.000. La sensibilità dei metodi usuali sarebbe dunque assai buona (quantunque non paragonabile a quella degli stessi metodi nel caso del Na e del Ca) se si trattasse sempre di identificare il La in buone condizioni, insieme ad elementi a spettro relativamente semplice.

Per ricerche di grande finezza, in cui si tratta di svelare una minima traccia di La contenuta in un'altra terra rara, per es. il Pr (di cui il La costituisce una delle probabili impurezze), il metodo dello spettro di scintilla non serve più, a meno di non disporre di apparecchi a fortissimo potere risolvete e sottostare a tutte le esigenze di una ricerca di assoluto rigore. Nel nostro Laboratorio, ad esempio, più volte si è dovuto controllare un frazionamento di materiali praseodimiferi, di cui le frazioni di testa erano costituite da Pr, La, Ce, Fe, Ca, Tl, ecc. (il Tl quale impurezza residua di un precedente frazionamento, eseguito col metodo dei nitrati doppi col Tl ed  $\text{NH}_4$ ) quelle di coda, da Pr, Nd, Fe, Ca, Tl, ecc. L'osservazione delle righe di maggior persistenza del La, sarebbe stata evidentemente perturbata, dalla presenza delle righe degli altri elementi contenuti nella miscela, che non distano da quelle del La che per frazioni di unità I. A., come appare dalla tabellina seguente, ed anche eliminando con mezzi chimici, qualcuna delle impurezze, come Fe, Ca, Tl, l'identificazione del La sarebbe stata in ogni modo impossibile con uno spettrografo ordinario,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(3) Vedi: C. BALY, *Spectroscopy*, vol. II, p. 134 e sgg., London, 1927.

per la grande vicinanza di due righe del La a due del Pr e non essendo d'altra parte attendibile una ricerca condotta su di una sola riga. Non si sarebbe potuto svelare allora che quantità di La superiori al millesimo, ma occorrendoci un metodo più fine e sicuro ed anche più rapido, abbiamo trovato conveniente ricorrere agli spettri molecolari<sup>(1)</sup>. Per la ricerca, pur disponendo di un grande spettrografo di quarzo, ci siamo serviti di un piccolo spettrografo, con risultati pienamente soddisfacenti.

Elemento	$\lambda$ I. A.	intensità		differenze
		arco	scintilla	
La	3949.10	10	10	—
Pr	3949.43	8	4	+ 0.33
Ca-I	3948.91	4	1	— 0.19
Fe	3948.78	4	2	— 0.32
La	3171.7	—	10	—
Pr	3172.27	3	1	+ 0.57
Ce	3171.63	6R	1	— 0.07
La	2379.4	—	10	—
Tl-I	2379.60	8R	10R	+ 0.2
Fe	2379.28	4	3	— 0.12

Nel caso del La, la molecola più adatta per una ricerca analitica è quella del monossido LaO, che si forma nella semplice demolizione del sesquiossido per effetto di temperatura. Questo monossido è assai stabile e compare anche nella fiamma dell'arco elettrico insieme al La atomico. Non si tratta allora che di ricorrere ad un mezzo di eccitazione meno potente (cioè ad una temperatura minore) per ottenere lo spettro del solo LaO, in assenza di righe atomiche, e serve ottimamente per questo scopo, lo stesso dispositivo di fiamma usato per volatilizzare gli ossidi di La, Y, Pr, Nd e Sa<sup>(2)</sup> ed ottenerne gli spettri caratteristici.

Questo dispositivo, nella sua parte essenziale è rappresentato nella fig. 1. La soluzione da esaminare viene introdotta nello spruzzatore (A) in cui si lancia una corrente di ossigeno sotto pressione. Lo spruzzatore è costruito in modo leggermente diverso dal solito, cioè possiede un ugello finissimo, soffiante quasi parallelamente al piano dell'apertura, piuttosto larga, di un tubicino, pescante nella soluzione. Si ottiene così un violento getto

(1) G. PICCARDI, Questi «Rendiconti», in corso di stampa.

(2) G. PICCARDI, «Nature», 24, 129, 618 (1929).



di nebbia, che urta contro la parete superiore dello spruzzatore; le gocce più grosse restano aderenti al vetro, formando un velo liquido che ricade al fondo, mentre la nebbia più fine viene invece trascinata dalla corrente di ossigeno. In tal modo si opera una fortissima selezione della nebbia prodotta. L'ossigeno, arricchito di finissime particelle liquide, alimenta una soffieria (B) in vetro, formata da due parti che si compenetrano come coni smerigliati ed ingrassati, terminanti con due tubicini coassiali di quarzo.

L'ossigeno, esce dal tubicino centrale, di diametro assai grande, circa 4-5 mm., con una certa lentezza; il gas illuminante esce invece per la sottile corona circolare che resta fra il tubo di quarzo esterno e quello interno. Si ottiene così una fiamma alta, vuota e silenziosa in cui l'ossido di La che si forma (qualunque sia il composto di La contenuto nella soluzione) volatilizza completamente (trasformandosi in monossido) come prova l'assenza di fondo continuo negli spettri ottenuti e non si dissocia in atomi, come prova l'assenza di righe atomiche negli stessi spettri.

Dato che la nebbia trascinata dalla corrente di ossigeno è fortemente selezionata, il consumo di soluzione è piccolissimo e con pochi cc. di soluzione, si può alimentare la fiamma per moltissime ore.

Abbiamo eseguito la prova della sensibilità del metodo, da un punto di vista qualitativo, polverizzando nella fiamma soluzioni di nitrato di La a concentrazione nota, preparate coll'ossido di La purissimo, ottenuto nel nostro Laboratorio, e contenenti 10, 1, 0.1, 0.01, 0.005 e 0.001 per cento di La.

Lo spettro del monossido  $\text{LaO}$ , presenta un vasto sistema di bande, la cui origine si trova a circa  $\lambda$  5600 I.A. (le bande di questo sistema appaiono tutte a due teste, una dovuta al ramo Q, l'altra al ramo R) di cui sono osservabili in condizioni normali, nello spettro completo, il gruppo  $n' - n'' = 2$  a  $\lambda$  5178.28, il gruppo  $n' - n'' = 1$  a  $\lambda$  5380.37, il gruppo  $n' - n'' = 0$  (che è il più intenso e persistente) a  $\lambda$  5599.91, il gruppo  $n' - n'' = -1$  a  $\lambda$  5866.27 ed infine il gruppo  $n' - n'' = -2$  a  $\lambda$  6157.36 I.A. Il gruppo  $n' - n'' = 3$  è in generale troppo poco intenso per esser bene osservabile in condizioni normali. Il monossido  $\text{LaO}$ , presenta due sistemi di bande poco estesi e molto intensi nella regione azzurro-violetta, a  $\lambda$  4371.9 ed a  $\lambda$  4418.2 I.A. circa, formati da bande sottili e

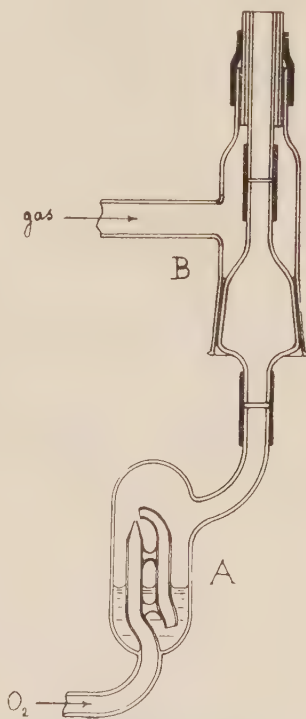


Fig. 1.

molto ravvicinate, oltre a vari sistemi nell'estremo rosso e nel primo infrarosso e nell'ultravioletto.

Delle bande poste nella regione visibile, le bande azzurro-viola, fotograficamente risultano le più intense e le più persistenti, mentre all'occhio, che è molto sensibile alle radiazioni di più grande lunghezza d'onda, risultano più intense e persistenti quelle situate nella regione giallo-verde, che sono ancora distinguibili quando non lo sono più quelle del violetto. Alla concentrazione delle 0.001 %, non si ottiene nessuno spettro; a quella del 0.005 %, la fotografia non registra ancora nulla, ma l'occhio comincia a distinguere, quantunque con molta difficoltà le bande a  $\lambda$  5600 I.A.; mentre alla concentrazione dello 0.01 %, la fotografia registra perfettamente le bande a  $\lambda$  4418 e l'occhio osserva senza alcuna difficoltà, le bande a  $\lambda$  5600 I.A. Man mano che aumenta la concentrazione del La, aumenta l'intensità delle bande, il numero delle bande osservabili in ciascun gruppo ed il numero dei gruppi; alla concentrazione del 10 %, tutto il brillantissimo spettro è al completo.

Le esperienze sono state condotte in condizioni di fiamma costanti, cominciando sempre dalle piccole concentrazioni, per evitare che la nebbia di ossido di lantanio, diffondentesi nell'ambiente, possa falsare la sensibilità del metodo.

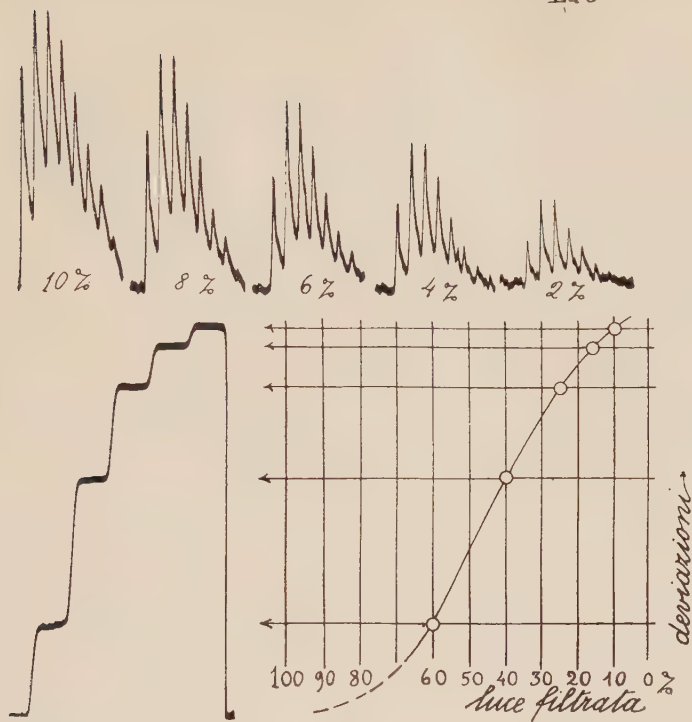
Il risultato, dal punto di vista qualitativo, è veramente ottimo perchè per condurre la ricerca, basta prendere la soluzione da esaminare, introdurla nello spruzzatore, avvivare la fiamma e dare un'occhiata allo spettro emesso. Con qualsiasi spettroscopio, per modesto che sia, si può sapere subito e con tutta sicurezza, se nella soluzione vi è contenuto La in proporzione di 1 a 10.000, od in proporzioni superiori.

L'analisi condotta invece in base allo spettro di scintilla, avrebbe richiesto, essendo le righe di massima sensibilità del La situate nell'ultravioletto, l'esecuzione di uno spettrogramma, con uno spettrografo di uviol o di quarzo od a reticolo, di grande potere risolvante e poichè le tre righe di massima sensibilità del La sono molto distanti fra di loro, anche di più spettrogrammi, a seconda dell'apparecchio usato.

La rapidità con la quale si può eseguire una analisi visuale, ha reso questo metodo veramente prezioso per il controllo delle operazioni di frazionamento, dove le osservazioni debbono essere molte e continue; si noti a questo riguardo, che l'ossido di Pr, dà pure uno spettro di bande, che sono peraltro molto meno intense di quelle del LaO e che non sono sovrapposte alle bande più caratteristiche dello spettro del LaO stesso.

Le fotografie qui riportate, rappresentano lo spettro del monossido LaO ottenuto da soluzioni contenenti La a varie concentrazioni, e sono state eseguite col piccolo spettrografo Hilger D2 e quindi ingrandite. Il tempo di posa, che è stato scelto in modo che sulla lastra le intensità delle bande giallo-verdi risultino presso a poco uguali a quelle osservate visual-

$\text{LaO}$



4372

4418

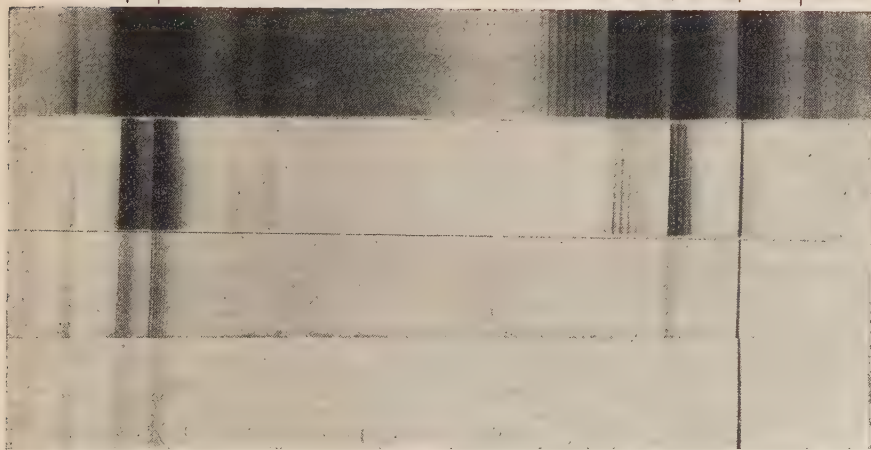
5178

5380

5600

5866

6157



10 %

1 %

0,1 %

0,01 %

mente <sup>(1)</sup>, è stato uguale per tutte. Naturalmente le intensità delle bande violette sono risultate maggiori di quelle che appariscono all'osservazione visuale.

Abbiamo poi voluto controllare se il metodo si presta anche a ricerche quantitative ed abbiamo eseguito la microfotometria dei vari gruppi di bande, ottenuti alle diverse concentrazioni, ed abbiamo notato che le bande del gruppo a  $\lambda$  5600 ( $n' - n'' = 0$ ) risultano di ottimo rendimento per le piccole concentrazioni, mentre quelle degli altri gruppi a  $\lambda$  5380 e  $\lambda$  5718 ( $n' - n'' = 1$  e  $n' - n'' = 2$ ) servono meglio alle alte concentrazioni. Abbiamo inoltre saggiato la precisione del metodo, preparando delle soluzioni al 2, 4, 6, 8, 10 % di La, fotografandone i relativi spettri in condizioni *standards* ed eseguendo la microfotometria del gruppo di bande a  $\lambda$  5380. Abbiamo allora constatato che le deviazioni registrate dal microfotometro sono una funzione lineare della concentrazione, come appare dai fotogrammi qui riprodotti; e poichè nel campo delle intensità misurate, le deviazioni del microfotometro sono quasi esattamente una funzione lineare della intensità, come risulta dalla fotometria del filtro graduato Zeiss, pure qui riprodotta, si trova che anche le intensità delle bande sono effettivamente una funzione lineare della concentrazione. Il risultato, dal punto di vista quantitativo, è veramente notevole. Si riesce così a stimare senza difficoltà e senza dispositivi sperimentali particolari, la concentrazione assoluta del La a meno del 5 per cento. La deviazione del microfotometro, per una variazione dell'uno per cento è infatti assai grande, nel nostro caso, circa 6 mm., mentre le piccole variazioni occasionali non superano 1 o 2 mm. Questo risultato acquista un valore anche maggiore, pensando che è possibile estendere la ricerca entro vastissimi limiti della concentrazione, scegliendo opportunamente i gruppi di bande su cui condurre le operazioni microfotometriche.

Concludendo: nel caso del La, il metodo degli spettri molecolari, da un punto di vista qualitativo, si dimostra di una sensibilità uguale a quello degli spettri di scintilla: ma specie alle piccole concentrazioni, ed in presenza di elementi a spettro complicato, dà affidamento di sicura identificazione ed è di una praticità molto più grande.

Dal punto di vista quantitativo, poi, si può riuscire a stabilire la concentrazione del La, nella soluzione da esaminare, con una buonissima approssimazione, compatibilmente, s'intende, con l'approssimazione che si può ottenere dai metodi ottici.

**Fisica.** — *Alcune proprietà di media nella elastostatica ordinaria.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Nell'ingrandimento, le bande a  $\lambda$  5600, visibilissime sulla lastra, sono risultate eccessivamente deboli alle piccole concentrazioni.



**Fisica.** — *Verifica sperimentale dell'assorbimento selettivo delle onde Hertziane provocato da un gas elettronico in campo magnetico.* Nota di G. TODESCO, presentata dal Socio Q. MAJORANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati.* - XI. *Nuovi derivati del 2-metil-difenile ed influenza del  $\text{CH}_3$  sulle reazioni dell' $\text{NH}_2$  in 2' <sup>(1)</sup>.* Nota di L. MASCARELLI e D. GATTI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

In questa Nota descriviamo i risultati ottenuti in una serie di ricerche intese a chiarire se qualunque sia il sostituito in 2 esso viene scacciato quando si compie la reazione diazoica sull' $\text{NH}_2$  in 2' e poi si decompone il diazoderivato con acqua o con cloruro e bromuro rameoso o con joduro di potassio.

Nelle Note precedenti infatti, ma più specialmente nella X <sup>(3)</sup>, dimostrammo che quando il sostituito in 2 è uno dei gruppi  $\text{NH}_2$ ; ( $\text{N}_2\text{X}$ );  $\text{NO}_2$ ;  $\text{Cl}$ ;  $\text{Br}$ ;  $\text{J}$ , allora, compiendo le sopradette reazioni sull' $\text{NH}_2$  in 2', avviene con maggiore o minore facilità la eliminazione del sostituito in 2, mentre nelle posizioni 2-2' si forma un terzo anello eterociclico; nella Nota VIII già avevamo posto in evidenza che, anche quando non vi è possibilità di formazione di un anello eterociclico, gli stessi sostituiti in 2 disturbano più o meno sensibilmente le reazioni che si dovrebbero effettuare sull' $\text{NH}_2$  in 2', così che si originano spesso prodotti peciosi da cui non è possibile isolare alcuna sostanza definitiva <sup>(4)</sup>.

I nuovi prodotti preparati per essere studiati a tale riguardo sono derivati del 2-metil-difenile.

Alla preparazione della sostanza di partenza, il 2-nitro-2'-metil-difenile, ci servì il noto processo di Ullmann (trattamento dei convenienti alogenoderivati con Naturkupfer) applicato a miscele di o-jodio-toluene e di o-jodionitro-benzene. Questo metodo, che trovò subito largo impiego per la preparazione di derivati simmetricamente sostituiti del difenile, tende ora ad estendersi anche per ottenerne derivati non simmetricamente sostituiti. Per avere alcuni nuovi prodotti 2-2'-bisostituiti noi <sup>(5)</sup> l'abbiamo già usato con

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(3) « Rend. Accad. Lincei », seduta del 6 dicembre 1931.

(4) Nota VIII « Rend. Accad. Lincei », XIII (6), I., 887 (1931); « Gazz. chim. it. », 61, 782 (1931).

(5) Nota VIII, loc. cit.

vantaggio notevole su altri metodi assai lunghi e di scarsissimo rendimento; però, come appare dalla letteratura recente e come abbiamo avuto occasione di constatare anche noi, non sempre per i derivati asimmetricamente sostituiti esso dà risultato positivo.

Dalle ricerche con il 2-metil-2'-amino-difenile, che qui riportiamo, risultò che non avviene mai la ipotetica chiusura (mediante NH; O; J) di un terzo nucleo<sup>(1)</sup> sulle posizioni 2-2' e neppure 2-6', la qual cosa fa pensare che l'attacco fra atomi di carbonio sia più saldo che non quello fra altri elementi. Da queste stesse ricerche è risultato non solo che il CH<sub>3</sub> in 2 non viene scacciato, ma anche che esso non disturba nessuna delle reazioni sull'NH<sub>2</sub> in 2'<sup>(2)</sup>.

#### PARTE SPERIMENTALE

(in collaborazione con il laureando Pericle Lavazza).

*2-Nitro-2'-metil-difenile*: NO<sub>2</sub>·C<sub>6</sub>H<sub>4</sub>C<sub>6</sub>H<sub>4</sub>·CH<sub>3</sub>. Si ottenne col miglior rendimento operando così: gr. 20 di o-jodio-toluene (da o-toluidina A.C.N.A.) si scaldarono in recipiente di rame, munito di refrigerante a ricadere e di agitatore meccanico, a 215-220° entro bagno di lega e poi si andò aggiungendo a piccole porzioni una miscela intima di gr. 23 di o-jodio-nitrobenzene (da o-nitro-anilina A.C.N.A.) e gr. 40 di Naturkupfer (in eccesso). Si riscaldò ancora per circa due ore dopo l'ultima aggiunta, si trituro la massa raffreddata, si estrasse con etere: l'etere lasciò un residuo brunastro che si riprese con alcool ordinario. Da questa soluzione si separò da prima il 2-2'-di-nitro-difenile contemporaneamente formatosi (p. f. 124°) poi, per successive concentrazioni, si ebbero prismetti lievemente gialli solubili negli ordinari solventi organici, che, dopo ricristallizzazione, fondevano a 57-58°. (Analisi: trovato % N 6,97; calcolato 6,58). Rendimento 25 % del teorico.

*2-Amino-2'-metil-difenile*: NH<sub>2</sub>·C<sub>6</sub>H<sub>4</sub>C<sub>6</sub>H<sub>4</sub>·CH<sub>3</sub>. Si ottenne per riduzione con stagno e acido cloridrico dal prodotto precedente. Il cloridrato fu cristallizzato dall'acqua e si ebbe in aghetti bianchi, sottili, irraggianti da un punto centrale: cominciavano a fondere a 128° e a 130-31° si decomponivano. (Analisi: trovato % N 6,36, % Cl 15,76; calcolata 6,37, 16,15). Rendimento quasi teorico.

Il 2-amino-2'-metil-difenile, posto in libertà dal suo cloridrato, bolliva a 157-158° a 17 mm. e solidificò in massa bianca cristallina fondente a 37°.

(1) L. MASCARELLI, *Contegno particolare dei derivati 2-2'-bisostituiti del difenile*, in «L'Industria Chimica, Notiziario chimico industriale», 1317 (1931).

(2) Nel solo caso in cui si decompongono con acqua il 2-metil-2'-diazo-difenile abbiamo riscontrato un andamento anomalo della reazione che ci riserviamo di interpretare in una prossima Nota.

*2-Cloro-2'-metil-difenile*:  $\text{Cl} \cdot \text{C}_6\text{H}_4\text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CH}_3$ . La soluzione diazoica ottenuta con 10 gr. di cloridrato di amino-metil-difenile venne versata lentamente ed operando in ambiente di anidride carbonica in un eccesso di cloruro rameoso fortemente acidificato con acido cloridrico. Il prodotto bruno oleoso venne, dopo essiccamento, estratto con etere; l'etere fu dibattuto con idrossido alcalino per eliminarvi l'eventuale fenolo (tracce), il residuo lasciato dopo l'eliminazione dell'etere fu distillato in corrente di vapor acqueo. L'olio giallo che così si ottenne bolliva a  $174^\circ$  e 50 mm. ed a  $276^\circ$  e 755 mm. dando un liquido giallo oro. (Analisi: trovato % C 76,71, H 6,08, Cl 16,84, 17,23; calcolato 77,02, 5,48, 17,50). Rendimento 32 % del teorico. Non si notò formazione di carbazolo, nè di difenilenossido.

*2-Bromo-2'-metil-difenile*:  $\text{Br} \cdot \text{C}_6\text{H}_4\text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CH}_3$ . La soluzione diazoica, ottenuta con 10 gr. di cloridrato di amino-metil-difenile, si versò in un grande eccesso di bromuro rameoso addizionato di acido bromidrico al 48 % e di ghiaccio in pezzetti, operando in ambiente di anidride carbonica. La sostanza oleosa brunastra, che fu estratta con etere, si distillò poi in vapor d'acqua. L'ulteriore purificazione si ebbe raccogliendo l'olio giallo chiaro che passò a  $156-157^\circ$  e 27 mm.: a pressione ordinaria esso bolliva a  $285-286^\circ$  decomponendosi in parte. Si notarono in questo prodotto proprietà lacrimogene accentuate. (Analisi: trovato % C 62,85, H 4,98; calcolato 63,16, 4,49). Rendimento 30 % del teorico. Non si formò nè carbazolo, nè difenilenossido.

*2-Iodio-2'-metil-difenile*:  $\text{I} \cdot \text{C}_6\text{H}_4\text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CH}_3$ . Gr. 8 di cloridrato di amino-metil-difenile vennero diazotati nel solito modo e poi si aggiunsero gr. 35 di joduro potassico sciolti in poca acqua; si decolorò con anidride solforosa, si estrasse con etere, il quale non lasciò residuo insolubile (assenza di base jodonica). La purificazione si fece distillando prima in vapor d'acqua e poi a 30 mm. e raccogliendo l'olio lievemente giallognolo, denso, che bolliva a  $186-187^\circ$  e che mostrava tendenza a solidificare: p. f.  $38-39^\circ$ . (Analisi: trovato % I 42,57, 42,91; calcolato 43,16). Rendimento 60 % del teorico. Non si ebbe nè base jodonica, nè carbazolo, nè difenilenossido.

*2-Ciano-2'-metil-difenile*:  $\text{CN} \cdot \text{C}_6\text{H}_4\text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CH}_3$ . Si diazotarono nel solito modo gr. 4 di amino-metil-difenile e questa soluzione diazoica venne versata in una soluzione scaldata a  $60-70^\circ$  di cianuro rameoso: il prodotto della reazione si distillò in corrente di vapore, con che facilmente passò un olio lievemente giallo che a 63 mm. bollì tra  $213-214^\circ$  e mostrava tendenza a solidificare. (Analisi: trovato % N 7,45; calcolato 7,25). Rendimento 65 % del teorico. Non si riscontrò formazione di carbazolo, nè di difenilenossido.

Ringraziamo vivamente la ditta A. C. N. A. che, anche questa volta, ci ha gentilmente fornito i principali prodotti di partenza.

**Chimica.** -- *Soluzioni solide per precipitazione ed isomorfismo tra complessi del platino e del tellurio tetravalente. — I. Struttura dei cloroplatinati di cesio e di rubidio*<sup>(1)</sup>. Nota di G. NATTA e R. PIRANI presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. BRUNI.

I cloroplatinati di rubidio e di cesio ed il clorotellurito di cesio sono, come è noto, sali che hanno qualche applicazione in chimica analitica. Infatti la piccolissima solubilità del cloroplatinato di cesio, notevolmente inferiore a quella del corrispondente sale di potassio, viene usata sia per la identificazione qualitativa che per la determinazione quantitativa del cesio, come pure per la separazione per cristallizzazione frazionata di questo catione dagli altri cationi alcalini i cui cloroplatinati sono tutti più solubili. Analogamente la facilità con cui il clorotellurito di cesio cristallizza dalle soluzioni cloridriche in bellissimi cristalli cubici di aspetto caratteristico offre un metodo molto rapido per il riconoscimento microchimico del tellurio.

Dal punto di vista analitico l'esame delle costanti reticolari può essere un metodo molto esatto di conferma dei dati dell'analisi microchimica. Infatti per l'esame col metodo delle polveri può essere sufficiente, operando con speciali accorgimenti, meno di un milligrammo di sostanza. Un fotogramma di poco più di un'ora, con i dispositivi ordinari, può permettere di rilevare le alterazioni delle costanti reticolari prodotte dalla presenza di piccole percentuali di cationi isomorfi che forniscono soluzioni solide, che l'analisi microchimica non permette di distinguere dai composti puri.

La misura della deformazione della costante reticolare può fornire un metodo di apprezzamento quantitativo del catione isomorfo presente in una soluzione solida.

Se quindi nella precipitazione si ottiene una soluzione solida omogenea, cosa, come vedremo in seguito, possibile per il sistema  $\text{Cs}_2\text{PtCl}_6\text{--Rb}_2\text{PtCl}_6$ , si può determinarne dalle costanti reticolari la composizione.

Questo metodo può risultare interessante nel caso dell'esame di quantità molto piccole di precipitati, potendosi così rilevare in essi in modo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano, dicembre 1931.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1932.



quantitativo cationi isomorfi presenti in quantità non determinabili per via gravimetrica e solo altrimenti riconoscibili coll'analisi spettroscopica.

*Esame dell'esacloroplatinato di cesio.*

Abbiamo preparato questo sale col metodo già descritto da Bunsen<sup>(1)</sup> per precipitazione di soluzioni di cloruro di cesio con acido cloroplatinico. Windaus<sup>(2)</sup> osserva che questo sale cristallizza in piccoli ottaedri e Groth<sup>(3)</sup> presume che appartenga alla classe isomorfa dei composti cubici del tipo  $A_2 B X_6$ , che comprende anche il cloroplatinato di potassio.

Noi abbiamo esaminato questo composto con il metodo delle polveri e con anticatodo di ferro. Nella tabella I sono raccolti i risultati del calcolo del fotogramma. Tutte le linee si ordinano sui diagrammi di Hull pel sistema cubico e per un lato della cella elementare  $a = 10.15 + 0.01 \text{ \AA}$ . Non essendosi introdotta nel calcolo del fotogramma la correzione per lo spessore e l'opacità del preparato si è assunto per la costante reticolare il valore limite, per  $\theta$  tendente a  $180^\circ$ , dei valori medi sperimentali. Il volume della cella risulta  $1045, 7 \times 10^{-24} \text{ cc.}$ , da cui si calcola una densità, ammettendo che la cella contenga 4 molecole, di 4.25. Non è nota la densità sperimentale di questo composto, ma la densità calcolata è attendibile e conferma l'ipotesi che la cella elementare contenga 4 molecole.

Essendo presenti quindi nella cella elementare 8 ioni Cs, 4 ioni Pt e 24 ioni cloro, risultano possibili, ammessa l'equivalenza delle posizioni occupate nella cella dagli atomi dello stesso tipo, soltanto i gruppi spaziali  $Th^2$ ,  $Th^3$ ,  $Th^6$  della classe diacisdodecaedrica, quelli  $O^2$ ,  $O^3$ ,  $O^6$ ,  $O^7$  della classe pentagonododecaedrica e  $Oh^4$ ,  $Oh^5$  della esacisottaedrica. La essenza nei fotogrammi di faccie aventi indici misti limita le possibili strutture a quelle che corrispondono ai gruppi spaziali:  $Th^3$ ,  $Th^6$ ,  $O^3$ ,  $O^6$ .

Risultano quindi possibili per l'esacloroplatinato di cesio solo gli stessi tipi di struttura già precedentemente discussi per il sale potassico<sup>(4)</sup>.

La posizione degli atomi nella cella elementare corrisponde alle seguenti coordinate.

(1) G. KIRCHOFF e R. BUNSEN, «Pogg. Ann.», 113 (1861), 352.

(2) A. WINDAUS, «Ber.», 42 (1909), 3775.

(3) P. GROTH, «Chemische Krystallographie», vol. I, p. 468.

(4) P. STOLL, *Raumgitter von Komplexsalzen. Dissertation.* Zürich (1926); «Zeitschr. f. Krist. Strukturberichte», 1912-1926, p. 445.

Pt  $0, 0, 0$  ;  $1/2, 1/2, 0$  ;  $1/2, 0, 1/2$  ;  $0, 1/2, 1/2$  .

Cs  $1/4, 1/4, 1/4$  ;  $1/4, 3/4, 3/4$  ;  $3/4, 1/4, 3/4$  ;  $3/4, 3/4, 1/4$  ;  
 $3/4, 3/4, 3/4$  ;  $3/4, 1/4, 1/4$  ;  $1/4, 3/4, 1/4$  ;  $1/4, 1/4, 3/4$  .

Cl  $u, 0, 0$  ;  $u + 1/2, 1/2, 0$  ;  $u + 1/2, 0, 1/2$  ;  $u, 1/2, 1/2$  ;  
 $\bar{u}, 0, 0$  ;  $1/2 - u, 1/2, 0$  ;  $1/2 - u, 0, 1/2$  ;  $\bar{u}, 1/2, 1/2$  ;  
 $0, u, 0$  ;  $1/2, u + 1/2, 0$  ;  $1/2, u, 1/2$  ;  $0, u + 1/2, 1/2$  ;  
 $0, \bar{u}, 0$  ;  $1/2, 1/2 - u, 0$  ;  $1/2, \bar{u}, 1/2$  ;  $0, 1/2 - u, 1/2$  ;  
 $0, 0, u$  ;  $1/2, 1/2, u$  ;  $1/2, 0, u + 1/2$  ;  $0, 1/2, u + 1/2$  ;  
 $0, 0, \bar{u}$  ;  $1/2, 1/2, \bar{u}$  ;  $1/2, 0, 1/2 - u$  ;  $0, 1/2, 1/2 - u$  .

Per determinare il valore più probabile del parametro  $u$  abbiamo calcolato il fattore di struttura per valori di  $u$  compresi tra 0.20 e 0.25, che sono quelli che appaiono più attendibili in base all'esame dei raggi degli ioni costituenti, ed in base al confronto con quelli dei composti del tipo  $A_2BX_6$  di cui la struttura è già conosciuta.

Nelle ultime quattro colonne della Tabella I sono raccolte le intensità calcolate con la formula:

$$I = Kn \frac{S^2}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

dove  $n$  è il numero dei piani cooperanti ed  $S$  è il fattore di struttura calcolato ammettendo il potere refrattivo per i raggi X di ogni singolo ione proporzionale al numero dei suoi elettroni non nucleari (54 per l'ione cesio, 74 per il platino, 18 per il cloro).

Dal confronto delle intensità calcolate con quelle sperimentali il migliore accordo si ha per valori di  $u$  compresi tra 0.22 e 0.24. Nella colonna 5 sono appunto raccolte le intensità sperimentali misurate dall'altezza dei massimi letti da una microfotometria fatta con un microfotometro di Kipp e Zonen su di un fotogramma delle polveri ottenuto con antacido di ferro.

TABELLA I.  
Cs<sub>2</sub>PtCl<sub>6</sub> — Fe/ant :

h k l	sen $\frac{\theta}{2}$	d	a	I fot.	$\frac{n S^2}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$			
					u = 0.20	u = 0.22	u = 0.23	u = 0.25
111 β	0.1593	5.500	9.52	dd	—	—	—	—
111	0.1736	5.565	9.64	dd	848	622	565	405
200	—	—	—	—	4	< 1	< 1	< 1
202	0.2784	3.472	9.82	19	1722	1545	1496	1450
131	0.3256	2.970	9.84	6	528	539	568	631
222	0.3420	2.827	9.82	7	544	668	223	750
400 β	0.3556	2.466	9.86	9	—	—	—	—
400	0.3907	2.475	9.90	21	1687	1881	1950	2020
313	0.4226	2.290	9.98	9	436	157	238	485
402	—	—	—	—	23	2	< 1	< 1
151 β	0.4566	1.921	9.99	6	—	—	—	—
422	0.4720	2.048	10.03	21	1422	1562	1608	1675
151	0.5000	1.934	10.04	10	529	1075	818	404
333					3	6	29	405
440	0.5458	1.772	10.03	20	1963	2460	2684	2840
531	0.5712	1.694	10.03	11	1100	1068	1140	710
600	—	—	—	—	38	8	2	< 1
442					108	14	2	2
602	0.6087	1.588	10.04	17	2430	1735	1494	1300
353	—	—	—	—	155	246	275	320
622	0.6383	1.514	10.04	6	378	780	973	1190
642 β	0.6516	1.342	10.04	7	—	—	—	—
444	0.6648	1.452	10.06	15	875	1255	1060	1456
171	0.6852	1.411	10.06	10	242	150	167	294
551					1327	1043	810	294
640	0.6946	1.392	10.04	5	31	9	3	< 1
642	0.7183	1.346	10.06	15	3140	2610	2386	2200
731	0.7353	1.316	10.10	10	72	93	142	546
553					680	644	534	277
800	0.7660	1.262	10.08	9	606	790	896	1007

Segue TABELLA I.  
Cs<sub>2</sub>PtCl<sub>6</sub> — Fe/ant:

h k l	sen $\frac{\theta}{2}$	d	a	I fot.	$n S^2$ $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$			
					u = 0.20	u = 0.22	u = 0.23	u = 0.25
733	—	—	—	—	9	6	7	257
804 β	0.7762	1.129	10.09	dd	—	—	—	—
802	0.7889	1.226	10.10	6	148	67	9	< 1
644								
660	0.8099	1.194	10.12	13	1200	800	638	483
822								
555	0.8282	1.167	10.12	6	632	387	277	81
751								
844 β	0.8472	1.032	10.12	6	—	—	—	—
662	—	—	—	—	74	422	647	887
804	0.8542	1.132	10.13	15	1720	2600	3103	3600
911	0.8689	1.113	10.13	6	481	635	62	231
753								
842	—	—	—	—	555	128	27	< 1
1002 β	0.8829	0.994	10.14	4	—	—	—	—
664	0.8949	1.080	10.14	11	1937	1293	1060	874
931	0.9087	1.064	10.15	9	353	760	766	440
844	0.9336	1.036	10.15	13	1200	2200	2749	1185
755	0.9474	1.021	10.15	8	524	378	304	210
771					27	5	2	210
933					276	194	247	210
1000	—	—	—	—	52	21	7	< 1
860					10	5	< 1	< 1

*Esame del cloroplatinato di rubidio.*

Avendo il catione rubidio un raggio intermedio fra quelli del potassio e del cesio, è naturalmente prevedibile che il suo cloroplatinato possegga la medesima struttura reticolare di quelli di potassio e di cesio, e sia capace di fornire con essi soluzioni solide.



TABELLA II.  
Rb<sub>2</sub>PtCl<sub>6</sub> — Fe/ant :

Sen $\frac{\theta}{2}$	I	<i>d</i>	hkl	<i>a</i>
0.2840	d	3.405	202	9.62
0.3338	d	2.898	131	9.62
0.3475	dd	2.780	222	9.63
0.3638	d	2.408	400 $\beta$	9.62
0.4014	mf	2.410	400	9.64
0.4436	dd	2.170	402	9.70
0.4695	dd	1.865	151 333 $\beta$	9.70
0.4873	f	1.985	422	9.72
0.5150	mf	1.878	151 333	9.74
0.5616	ff	1.722	440	9.74
0.5878	mf	1.647	531	9.74
0.6293	mf	1.536	602	9.74
0.6494	d	1.488	353	9.75
0.6734	d	1.294	642 $\beta$	9.70
0.6883	mf	1.404	444	9.74
0.7081	m	1.366	171 551	9.75
0.7412	ff	1.305	642	9.76
0.7623	mf	1.268	731 553	9.76
0.7898	md	1.225	800	9.78
0.8056	dd	1.087	804 $\beta$	9.74
0.8158	d	1.185	802 644	9.78
0.8386	mf	1.153	660	9.78
0.8542	m	1.132	555 751	9.79
0.8816	ff	1.097	804	9.81
0.8975	md	1.077	911 753	9.81
0.9228	md	1.047	664	9.83
0.9387	mf	1.030	931	9.83

Data però la differenza notevole fra i raggi dei cationi rubidio e cesio ( $0.29 \text{ \AA}$ ), la presenza di piccole percentuali di rubidio in soluzioni solide del cloroplatinato di cesio dovrebbe essere facilmente riconoscibile dalla deformazione delle costanti reticolari del composto puro.

Tale notevole differenza tra i cationi rubidio e cesio, che corrisponde ad oltre il 20 % del raggio del catione minore, non ci permette di affermare a priori che i due cloroplatinati siano tra loro solubili in tutti i rapporti, perchè sappiamo che la completa miscibilità appare alla temperatura ordinaria per altre serie di composti soltanto per differenze percentuali tra i raggi ionici molto inferiori (ad es., per la serie isomorfa tra ossidi di metalli bivalenti, per differenze inferiori al 13 %).

D'altro lato non sappiamo se la legge di Vegard sulla proporzionalità tra costante reticolare e composizione, che ha avuto numerose importanti conferme nei casi di solubilità perfetta in tutti i rapporti, sia ancora valida per i casi di solubilità limitata.

Abbiamo perciò ritenuto utile per gli scopi analitici che ci eravamo prefissi, esaminare la struttura del cloroplatinato di rubidio per determinarne la costante reticolare, e studiare le soluzioni solide tra i due cloroplatinati.

Nella tabella 2 sono raccolti i risultati del calcolo di un fotogramma di cloroplatinato di rubidio ottenuto con anticatodo di ferro con lo stesso dispositivo usato nell'esame del sale di cesio. Tutte le linee del fotogramma si ordinano per lo stesso tipo di struttura trovato per i sali di cesio e di potassio, e per un lato della cella elementare di  $9.83 \pm 0.01 \text{ \AA}$ .

L'intensità delle linee è molto simile e intermedia a quella che si ha per i sali di cesio e di potassio e conferma l'isomorfismo tra i tre composti. Abbiamo perciò ritenuto superfluo il calcolo del fattore di struttura per la determinazione della posizione degli atomi nella cella elementare.

In una prossima 2<sup>a</sup> nota si riferirà sulle soluzioni solide ottenute per precipitazione nel sistema  $\text{Rb}_2\text{PtCl}_6 - \text{Cs}_2\text{PtCl}_6$  che denota una completa miscibilità allo stato solido, e su quello  $\text{Cs}_2\text{PtCl}_6 - \text{Cs}_2\text{TeCl}_6$  che fornisce pure soluzioni solide e conferma l'isomorfismo tra tellurio e platino tetraivalenti.

### *Riassunto.*

1. Sono stati esaminati coi raggi X col metodo delle polveri i cloroplatinati di cesio e di rubidio. Entrambi i composti risultano cubici e posseggono celle elementari contenenti 4 molecole.

2. Il cloroplatinato di cesio ha una cella di  $10.15 \pm 0.01 \text{ \AA}$  di lato, di  $1045.7 \times 10^{-24} \text{ cc.}$  di volume. Possiede una densità  $d = 4.25$ .

3. Il cloroplatinato di rubidio possiede una cella di  $9.83 \pm 0.01 \text{ \AA}$  di lato e di volume  $949.85 \times 10^{-24} \text{ cc.}$ ; ha una densità  $d = 4.04$ .

4. I cloroplatinati di cesio e di rubidio appartengono entrambi al gruppo spaziale  $Oh_3$ , e posseggono lo stesso tipo di struttura del cloroplatinato di potassio. Dal calcolo del fattore di struttura il parametro  $u$  che definisce la posizione degli ioni cloro risulta per il cloroplatinato di cesio eguale a  $0.23 - 0.24$  circa.

**Chimica** (Chimica organica). — *Trasposizioni nel nucleo del Benzolo* <sup>(1)</sup>. — Nota I di C. SANDONNINI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

Le sostituzioni nel nucleo del benzolo, molto più frequentemente di quanto si credeva, avvengono a stadi con formazione di composti intermedi, generalmente assai poco stabili, che poi si trasformano nei composti definitivi, la natura dei quali può variare col variare delle condizioni di esperienza.

Esempio classico è la formazione dell'acido solfanilico ordinario attraverso il solfato di anilina e l'acido solfamminico. Questo, secondo Bamberger <sup>(3)</sup>, in ambiente debolmente acido ed a bassa temperatura si trasforma in acido ortosolfanilico, ma in ambiente fortemente acido ed a temperatura elevata si trasforma in acido parasolfanilico. La trasformazione di acidi solfamminici in acidi parasolfanilici venne confermata recentemente da A. Quilico <sup>(4)</sup>, quantunque Weil <sup>(5)</sup> e Hunter e Sprung <sup>(6)</sup>, nelle loro ricerche sulla reazione di Piria, non siano in accordo sulle condizioni nelle quali si forma il composto definitivo.

Chattaway e Orton <sup>(7)</sup> hanno dimostrato che nella clorurazione dell'acetanilide in opportune condizioni si possa ottenere N-cloroacetanilide, che per semplice riscaldamento si trasforma in paracloracetanilide; per ulteriore clorurazione di quest'ultima si può ottenere N-4 dicloracetanilide dalla quale per riscaldamento si ottiene la 2, 4 dicloracetanilide e così via.

Fries e Pfaffendorfs <sup>(8)</sup> trovarono che in presenza di cloruro di alluminio per alcuni derivati acilici del fenolo si ha migrazione del residuo acido con formazione di orto e para ossiarilacetoni. In altri casi trasposizioni simili non riuscirono. Holleman ed Ewes <sup>(9)</sup>, pensando che il bromuro di benzile

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Farmaceutica della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(3) « Ber. », 26, 490; 27, 361; 30, 654, 1261, 2249.

(4) « Gazz. Chim. It. », 56, 620.

(5) « Ber. », 55, 732.

(6) « Jour. Am. Soc. », 53, 1432.

(7) « Ber. », 32, 3572, 3635; « Jour. Chem. Soc. », 75, 1051.

(8) « Ber. », 43, 254.

(9) « Rec. Trav. », 27, 433.

si potesse considerare come un termine intermedio dalla formazione del bromotoluene, ne tentarono la trasformazione senza risultato.

Oltre a questi esempi, che riguardano quasi esclusivamente trasposizioni di atomi o gruppi dalla catena laterale al nucleo, si hanno, oltre alla trasformazione dell'acido ortosolfanilico in para, soltanto pochi altri esempi di trasposizioni nel nucleo. Reverdin<sup>(1)</sup> nitrando il para-iodanisolo notò la trasposizione dello iodio da para in orto.

D'altra parte è noto che in molti casi il rendimento in orto e para può variare di molto col variare delle condizioni di esperienza, ed in modo speciale:

- 1°) colla variazione della temperatura;
- 2°)   »           »       dell'acidità del mezzo;
- 3°)   »           »       del mezzo solvente;

ciò che si può verificare abbastanza facilmente quando la formazione di derivati meta è praticamente nulla, in modo che si potrebbe pensare che la causa delle variazioni di rendimento sia dovuta alla trasformazione di un derivato nell'altro, trasformazione che verrebbe favorita in modo diverso dalle diverse condizioni.

Così per esempio mentre una bassa temperatura ed una debole acidità sono necessarie per ottenere la trasformazione dell'acido solfamminico in ortosolfanilico e per avere un alto rendimento in derivato orto nella bromurazione del fenolo, una temperatura elevata ed una forte acidità favoriscono la trasformazione dello stesso acido solfamminico in parasolfanilico ed un alto rendimento in parabromofenolo.

Tuttavia non è mai stata osservata una diretta trasformazione p. es. di ortobromofenolo in para o viceversa, ed in qualsiasi condizione. Sotto questo punto di vista riesce interessante la trasposizione unita a scissione che subisce la parabromanilina in determinate condizioni. Fittig<sup>(2)</sup> studiando il comportamento delle monobromaniline, confermò la facile decomposizione col calore della para, già osservata da Kekulé<sup>(3)</sup>, al confronto della orto e della meta, e tra i prodotti di decomposizione rinvenne 2, 4 dibromanilina ed anche 2, 4, 6 tribromanilina, unitamente ad una grande massa di prodotti di condensazione non ben identificati. La trasformazione si inizia a circa 160°. Per potere interpretare una trasposizione simile, molto acutamente Fittig paragonò il comportamento della parabromanilina ad alcuni composti inorganici a valenza intermedia, che facilmente si smistano in composti a valenza inferiore e a valenza superiore.

(1) « Ber. », 29, 2999.

(2) « Ann. », 188, 23.

(3) « Z. f. Chem. », 1886, 988.



Ho ritenuto non privo di interesse riesaminare questo interessante comportamento delle bromaniline ed in special modo, per quanto si è visto sopra, dei derivati orto e para.

Conviene ricordare che il gruppo  $-NH_2$  orienta in orto ed in para, ma che dalla bromurazione diretta dell'anilina non risulta ben certo quale dei due isomeri si formi di preferenza, data la grande quantità di prodotti secondari, che si formano contemporaneamente. Dai risultati di Francis<sup>(1)</sup> e collaboratori la velocità di sostituzione diretta in orto ed in para si dovrebbe ritenere eguale, cosicchè la preparazione diretta di monobromanilina non parrebbe possibile, ma si dovrebbe arrivare soltanto a 2, 4 dibromo con tracce soltanto di 2, 4, 6 tribromo, poichè la ulteriore bromurazione della 2, 4 è assai lenta. Tuttavia da singole misure di velocità di bromurazione della orto e della parabromanilina, sempre dalle misure di Francis, si dovrebbe ritenere che la posizione 4 è assai più facilmente occupabile della 2, poichè la orto si bromura ulteriormente a 2, 4 dibromo con velocità assai maggiore della para, ciò che concorda col fatto che per monobromurazione dell'acetanilide si ottiene quasi esclusivamente 4 bromocetanilide.

Brown e Cuming<sup>(2)</sup> facendo agire bromo diluito in tetracloruro (2 mole) sull'anilina (1 mola) ottennero soltanto 2, 4, 6 tribromanilina 2, 4 dibromanilina e non mai orto, appunto perchè, avendo questa una velocità superiore di ulteriore bromurazione, si trasforma tutta in 2, 4 dibromo.

Fittig ottenne 2, 4 dibromo anche per riscaldamento prolungato di una soluzione di para in acido cloridrico in eccesso, a  $150^{\circ}$ - $120^{\circ}$ .

Innanzitutto ho ripetute le esperienze di Fittig su bromaniline purissime, preparate in laboratorio con vari metodi.

La ortobromanilina venne preparata per riduzione dell'ortonitrobromobenzolo, e dall'ortonitranilina per diazotazione, sostituzione del bromo al gruppo diazo, per avere ortobromonitrobenzolo purissimo.

La parabromanilina venne ottenuta per riduzione del paranitrobromobenzolo, e per bromurazione diretta dell'acetanilide e susseguente saponificazione e purificazione attraverso il picrato.

La metabromanilina venne ottenuta per riduzione del metanitrobromobenzolo. Le bromaniline vennero ulteriormente purificate, trasformandole nei derivati acetilici.

I risultati delle mie ricerche, che in parte confermano quelli di Fittig, si possono riassumere come segue.

Per riscaldamento la parabromanilina fonde inalterata a  $63,5^{\circ}$ . A  $180^{\circ}$  la massa entra in ebollizione, e mentre la temperatura va man mano aumentando, distilla un liquido costituito per la maggior parte da anilina, e resta una massa solida fortunatamente colorata in azzurro, che poi alla tempe-

(1) « Journ. Am. Chem. Soc. », 46 e sgg.

(2) « Journ. Soc. Chem. Ind. », 45; t. 355.

ratura di 240° circa si decompone rapidamente con formazione di forti quantità di acido bromidrico.

Rettificando il distillato si ha un'ulteriore decomposizione, si formano di nuovo grandi quantità di prodotti di condensazione, mentre la quantità di anilina va sempre diminuendo, cosicchè alla fine se ne ottiene allo stato puro una quantità piccolissima in confronto della parabromanilina usata.

La decomposizione venne effettuata anche in tubi chiusi a varie temperature e per vari intervalli di tempo. Si è così potuto confermare che realmente la decomposizione si inizia a 160°–170°, e si è potuto constatare che prolungando a lungo il riscaldamento, anche tutta l'anilina scompare e si ottengono tracce di 2, 4 dibromo e 2, 4, 6, tribromanilina, in una grande massa di prodotti di condensazione.

La separazione dei prodotti di reazione, a parte questi ultimi che per ora non mi interessavano, venne fatta principalmente colla distillazione in corrente di vapore. Con questo mezzo, in ambiente acido, dalla massa risultante dalla decomposizione vengono asportate soltanto dapprima la dibromo ed in seguito la tribromanilina, dopo alcalinizzazione si possono ottenere anilina e parabromanilina, che si possono abbastanza facilmente separare per cristallizzazione frazionata o per soluzione frazionata in acido cloridrico diluito.

Venne inoltre confermato che tanto la orto come la metabromanilina distillano inalterate e che anche riscaldate in tubi chiusi a circa 50° oltre la loro temperatura di ebollizione non subiscono alcuna decomposizione.

La presenza di 2,4 dibromo e di 2,4,6 tribromanilina venne assicurata dal loro punto di fusione e di quello dei derivati acetilici in cui vennero trasformate.

Prima di indagare quali possano essere le reazioni attraverso le quali avviene la trasformazione della parabromanilina, che, per quanto si è visto, debbono essere assai più complicate di quanto si poteva desumere dal semplice schema di Fittig, anche per altre ricerche che ho in corso sulla sostituibilità in orto ed in para, mi interessava in modo speciale studiare il comportamento della ortobromanilina in confronto di quello della para in condizioni diverse.

Come è stato detto Fittig ottenne la 2,4 dibromanilina dalla para anche per riscaldamento a 160° di una soluzione di quest'ultima in acido cloridrico. Da mie esperienze risulta che la stessa trasformazione avviene anche in soluzioni di acido bromidrico, e più rapidamente.

Per il fatto già considerato che una forte acidità ed un'elevata temperatura favoriscono la formazione di derivati para, ho voluto vedere quale era il comportamento dell'ortobromanilina in queste condizioni. A questo scopo una soluzione di essa in acido bromidrico concentrato venne riscaldata in tubo chiuso a 170°, per venti ore.

Per distillazione in corrente di vapore della massa risultante si ottenne una piccola quantità di 2, 4 dibromanilina e, dopo aver alcalinizzato, non si ottenne più alcuna traccia di orto, ma una grande quantità di para. La pre-

senza di questa venne accertata anche trasformandola in parabromacetanilide, che fondeva regolarmente a 166°.

Dato questo notevole risultato, venne provato se la stessa trasformazione potesse aver luogo in altre condizioni di temperatura e di acidità, e fu trovato che essa avviene anche in soluzione di acido cloridrico, sebbene meno completamente, almeno per la stessa temperatura e durata di tempo.

Le migliori condizioni per avere una trasformazione pressochè completa dell'orto in parabromanilina con formazione soltanto di tracce di dibromanilina, che molto probabilmente proviene da un'ulteriore trasformazione della para, che si forma in un primo tempo, sono quelle di riscaldare in tubo chiuso a 160° per 16-18 ore il bromidrato della orto senza un grande eccesso di acido; temperature ed acidità superiore sembrano favorire la formazione di dibromanilina.

Anche per ebollizione prolungata a ricadere di una soluzione di orto in acido bromidrico concentrato la stessa trasformazione avviene ma assai più lentamente; di essa tuttavia non si ha traccia di soluzioni fortemente cloridriche od acetiche.

La trasformazione della ortobromanilina in para in queste condizioni mentre conferma il fatto che l'ambiente acido favorisce la sostituzione in para e la relativa facile trasformazione di derivati orto in derivati para, rende difficile potere spiegare la formazione di 2, 4 dibromanilina dalla para per semplice dismutazione. Dato che la sua formazione è legata e forse susseguente a quella di prodotti di condensazione molto complessi, probabilmente, secondo Cuming e Brow<sup>(1)</sup>, del tipo delle induline, pare plausibile invece attribuirle a reazioni secondarie tra di questi.

Di essi era lecito pensare che i più semplici fossero del tipo della 4 bromo, 4 amminodifenilammina, dalla quale poi per decomposizione ulteriore si originassero i composti di condensazione definitivi e anche la dibromanilina e l'anilina osservate da Fittig.

Jacobson e Grosse<sup>(2)</sup> constatarono la presenza di 4-bromo, 4-amminodifenilammina tra i prodotti di decomposizione del parabromoidrazobenzolo, ma in quantità appena sufficiente a stabilirne la composizione. Tentativi fatti per ottenere per questa ed altre vie quantità di questo prodotto sufficienti per studiarne la decomposizione, non mi hanno dato finora risultati soddisfacenti.

Vennero fatte inoltre alcune esperienze per tentare di avere indizi di una eventuale migrazione del bromo, riscaldando una miscela di parabromanilina con benzolo od antracene in tubi chiusi ed in presenza di tricloruro di alluminio analogamente alle esperienze di debromurazione di Kohn e Buntz<sup>(3)</sup>. È interessante il fatto che anche in queste condizioni la parabromanilina subisce le stesse trasformazioni, mentre che il benzolo e l'antracene restano inalterati.

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit.

(3) « Monath. », 33, 913.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente inizia la seduta rivolgendo i migliori auguri per il nuovo anno a tutti i Soci e formulando i più vivi voti per il loro lavoro scientifico e per l'attività dell'Accademia.

Dà quindi notizia alla Classe che S. E. SCIALOJA è stato indisposto ed ora sta meglio. Crede d'interpretare il pensiero dei Colleghi inviando all'Insigne Presidente, a nome della Classe, gli auguri più vivi di pronta e completa guarigione.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio PALAZZO presenta il III volume serie III delle Memorie e gli Annali (Osservazioni, 1922) del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica, e ne parla.

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono segnalando il tomo V degli Atti del Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna.

## PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente dà lettura di una lettera con la quale il Socio PATERNÒ autorizza l'apertura di n. 12 plichi suggellati che egli depositò presso l'Accademia in data 18 ottobre 1926, e prega la Presidenza di voler disporre che gli studi in essi contenuti vengano pubblicati nei « Rendiconti Accademici ».

Si procede quindi alla apertura dei plichi e alla ricognizione delle Note in parola.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci CASTELNUOVO, CROCCO, GARBASSO, LEVI-CIVITA, PARRAVANO, SEVERI.



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 3 gennaio 1932*

- Annali del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica Italiano. Serie III. 1922. (Ministero dell'Agricoltura e Foreste). Roma, 1931. 4°, pp. 1-231.
- Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna, 3-10 settembre 1928. Tomo V. Bologna, Edit. N. Zanichelli 1930. 8°, pp. 1-494.
- BUCCIANTE LUIGI e MASPES P. E. — Sulla morfogenesi della ghiandola tiroide nell'uomo ed in altri mammiferi. (Estr. dall'« Archivio Italiano di Anatomia e di Embriologia ». Vol. XXVII. fasc. 3, pp. 419-465). Firenze, 1929. 8°.
- DOGLIOTTI G. C. — Les transformations du stroma du myocarde de l'homme dans la vieillesse. (Extr. des « C. R. de l'Association des Anatomistes » XXV<sup>e</sup>. Réunion Amsterdam 1930). s. d. t. 8°, pp. 1-2.
- FAVARO GIUSEPPE. — Antonio Scarpa e i Caldani. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti ». Tomo XCI. Part. II. pp. 23-37). Venezia, 1931. 8°.
- FAVARO GIUSEPPE. — Antonio Scarpa e l'Università di Padova. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Tomo XCI, Part. II). Venezia, 1931. 8°, pp. 1-22.
- FAVARO GIUSEPPE. — Come scriveva Leonardo (Estr. dalla « Rivista di Storia delle Scienze Mediche e Naturali ». Anno XXI. N. 11-12 (IV serie)). Siena, 1930. 8°, pp. 1-7.
- FAVARO GIUSEPPE. — Giambattista Morgagni e Antonio Scarpa. (Estr. dal Numero unico in onore di G. B. Morgagni. Forlì 1931). Siena, 1931. 8°, pp. 1-4.
- FAVARO GIUSEPPE. — Jacopo Berengario nella storia dell'anatomia. (Estr. dal « Annuario della R. Università di Modena » fasc. III. 1931). Modena, 1931. 8°, pp. 1-5.
- FAVARO GIUSEPPE. — L'insegnamento dell'anatomia in Modena un secolo fa. (Estr. dall'« Annuario della R. Università di Modena ». fasc. III. 1931). Modena, 1931. 8°, pp. 1-42.
- FAVARO GIUSEPPE. — Prossimi Centenari di tre grandi anatomici italiani (Estr. dagli « Atti della Società Italiana di Anatomia ». III. Congresso in Firenze 4-7 ottobre 1930, pp. 79-81). Firenze, 1931. 8°.
- FAVARO GIUSEPPE. — « Publica doctoratus privilegia » a Morgagno Praeside subscripta. (Estr. dal Numero unico in onore di G. B. Morgagni. Forlì 1931). Siena, 1931. 8°, s. p.
- GENNARO ANTONINO e CAMPA MARIA. — Osservazioni del pianeta Nettuno fatte nel R. Osservatorio Astronomico di Trieste. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. V. N. 2). Pavia, 1930. 8°, pp. 1-7.
- LEVI GIUSEPPE. — Quelques données nouvelles sur les transformations des neurones sympathiques et spinaux pendant l'accroissement des Chélanien. (Extr. des « C. R. de l'Association des Anatomistes ». XXV<sup>e</sup> Réunion Amsterdam 1930). s. d. t. 8°, pp. 1-3.
- LEVI GIUSEPPE. — Relazione sull'opera scientifica dell'Istituto Anatomico della R. Università di Torino. (1930-1931). Torino, 1931. 8°, pp. 1-18.
- MASPES P. E. — Duplicità molto circoscritta in un embrione di pollo e sua interpretazione. (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano » Anno XLII, N. 7, pp. 212-218). Firenze, 1931. 8°.

MASUELLI LORENZO.\* — Quergestreifte Muskelfaser im Schilddrüsenparenchym. (Sonderabd. aus der « Anat. Anz. », Band 72, pp. 322-368). Jena, 1931. 8°.

Memorie del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica. Serie III. Vol. III. (Ministero dell'Agricoltura e Foreste). Roma, 1931. 4°. pp. I-VI, I-163, I-66, I-19, I-29.

MENOZZI C. — Contributo alla conoscenza dei Dermatteri della Repubblica Dominicana. (Estr. dal « Bollettino del La-

boratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 321-326). Spoleto, 1931. 8°.

SAVASTANO LUIGI. — Arboricoltura. Napoli, 1914. 8°, pp. I-XI, I-848.

SILVESTRI F. — Nuovi *Campodeidae* (Insecta, Thysanura) della Regione Australiana. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 275-285). Spoleto, 1931. 8°.

1931 2 25 N. P.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Fascicolo del 17 gennaio 1932 (Anno X)*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Chimica.** — *Azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa.* Nota <sup>(1)</sup>  
del Socio E. PATERNÒ.

Era stato notato da un certo tempo che la cellulosa umida, tanto più in presenza degli alcali, assorbe l'ossigeno dell'aria, e Fischer e Tropoch (Ber., 56, p. 218) avevano anche osservato che l'assorbimento dell'ossigeno in presenza di soda è più rapido per la lignina che per la cellulosa. Ma nessuno studio preciso e sistematico era stato fatto su questo argomento. Dorè e Cunningham (I. Of the Ch. S. t. 101, p. 497, e t. 103, p. 1547, anni 1910-1921) avevano però studiato l'assorbimento dell'ozono (1.5 %) comparativamente dal cotone, dal cotone mercerizzato e dalla seta, ed avevano trovato che

1 gr. cotone assorbe	cc. 70 di ozono
1 » » mercerizzato	» 162 id.
1 » di seta artificiale	» 309 id.

Indipendentemente dal dubbio che l'assorbimento sia di ossigeno ordinario o di ozono, non è detto se tale assorbimento è in proporzione alla quantità di sostanza che il cotone, il cotone mercerizzato e la seta perdono pel trattamento con soda. I suaccennati autori dicono che si forma un perossido di cellulosa, perchè il composto scompone il ioduro potassico.

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

Hanno pure riconosciuto che in questa azione si produce  $\text{CO}_2$ , cosa che rende probabile la formazione di pentosani per la reazione:



Da un altro punto di vista, scoperta la sodio-cellulosa, fu osservato che essa si alterava all'aria, e fu da molti attribuita l'alterazione all'azione dell'anidride carbonica atmosferica, onde è stata norma di tutte le fabbriche di seta-viscosa, di far maturare la sodio-cellulosa in recipienti ermeticamente chiusi. Però esperienze da noi fatte hanno provato che la sodio-cellulosa sottoposta all'azione dell'anidride carbonica sino a completa trasformazione della soda in carbonato, non subisce aumento di emi-cellulosa. La sodio-cellulosa sottoposta invece all'azione dell'ossigeno subisce una profonda alterazione, e quando si conserva fuori del contatto dell'aria la sua maturazione è di molto ritardata. Su questo fatto fu preso anzi un brevetto dalla Soie de Châtillon sin dal febbraio 1925, ciò che prova che i nostri studi sono precedenti a quella data.

Sull'azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa abbiamo raccolto un numero considerevole di dati che hanno portato a conseguenze degne di attenzione.

Abbiamo iniziato le nostre ricerche introducendo in un tubo, capovolto sopra un bagno di mercurio e contenente dell'ossigeno, una certa quantità di sodio-cellulosa, che forniva il 7.55 % di emi-cellulosa. Dopo alcuni giorni (a temperatura ambiente) si è osservata una diminuzione nel volume del gas, e la sodio-cellulosa conteneva dal 34 al 36 % di emi-cellulosa (prodotto solubile nella soda al 18 %), proporzione, che, come diremo in altra Nota, si trova nella seta artificiale.

In possesso di questi primi risultati abbiamo voluto determinare l'andamento della formazione di emi-cellulosa nella sodio-cellulosa di fabbrica, ottenendo i seguenti risultati:

Durata della maturazione	E-cellulosa % della sodio-cell.	E-cellulosa % della cell.
0 giorni	1.51	4.18
1 »	1.80	5.94
2 »	2.07	6.83
3 »	3.18	10.49
4 »	3.18	10.49

In seguito abbiamo fatto numerose esperienze, dalle quali estrarremo alcuni dati:



La sodio-cellulosa di fabbrica (gr. 20) sospesa in acqua (cc. 300) e sottoposta per 13 ore all'azione di una corrente di ossigeno, fornisce più del 32 % di ossi-cellulosa solubile in soda al 10 %.

Scaldata invece per cinque ore a 100° in corrente di ossigeno, fornisce 89.69 % di emi-cellulosa (87 %) e perciò praticamente priva di  $\gamma$ -cellulosa.

In altre esperienze scaldando a 100° la sodio cellulosa si riesce ad ottenere un prodotto completamente solubile.

Abbiamo fatto dell'esperienze partendo da un cotone linters della composizione seguente:

Umidità . . . . .	7.56 %
Ceneri . . . . .	0.15
E-cellulosa . . . . .	1.74
$\alpha$ -cellulosa . . . . .	98.63
Pentosani . . . . .	—

Da questi linters abbiamo preparato la sodio-cellulosa che presentava la seguente composizione:

$\alpha$ -cellulosa . . . . .	33.60 %
NaOH . . . . .	14.93
Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> . . . . .	0.26
Acqua . . . . .	51.21
	<hr/>
	100.00

Di questa sodio-cellulosa (che al momento dell'esperienza conteneva già 1.06 di emi-cellulosa, cioè 3.18 riferito alla cellulosa) furono spapolati gr. 40 in 300 cc. di soda al 18 %; si sottopose il liquido bollente all'azione di una corrente di ossigeno per 3, 6 e 12 ore, naturalmente in 3 distinte operazioni. La soluzione ingiallì tanto che dopo 12 ore diventò bruna. Si ebbero i seguenti risultati:

	E-cell. riferita all'alcali	E-cell. riferita alla cell.	E-cell. formatasi dedotta la preesistente
3 ore	3.84	10.90	7.72
6 »	4.59	15.13	11.95
12 »	5.16	17.33	14.75

Abbiamo pure sottoposto all'azione dell'ossigeno la sodio-cellulosa di fabbrica, riscaldandola in un tubo alla temperatura di 100° e di 150°, in corrente di ossigeno privo di CO<sub>2</sub> e dissecato. L'acqua sprigionata era raccolta in un tubo immerso in un miscuglio frigorifero, il quale era congiunto ad un altro tubo a cloruro di calcio. I risultati sono riportati nella seguente tabella:

Temp.	Durata del riscald.	Aumento peso	Solubile in NaOH		
			Totale	Corretto	β-cellulosa
100°	3 ore	4.13 %	53.60	47.24	—
»	6 »	4.73	63.63	57.27	63.20
150°	3 »	3.29	62.00	55.64	37.20
»	6 »	3.51	46.66	40.37	23.00

Ma queste esperienze non presentano le necessarie garanzie per ragioni diverse.

Invece più concludenti sono le esperienze fatte con una sodio-cellulosa già matura, della composizione:

NaOH	. . . . .	14.93 %
Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	. . . . .	0.26
α-cell.	. . . . .	33.60
E-cell.	. . . . .	17.12 <sup>(1)</sup>

Scaldando a 100° in corrente di ossigeno ha dato:

Durata del riscald.	Emi-cellulosa		β-Cellulosa	
	Totale	Corretta	Totale	Corretta
3 ore	70.38 %	53.26	59.90	44.20
6 »	71.28	54.16	70.35	54.65
9 »	73.64	56.49	72.26	56.56
12 »	75.64	58.62	74.90	59.20

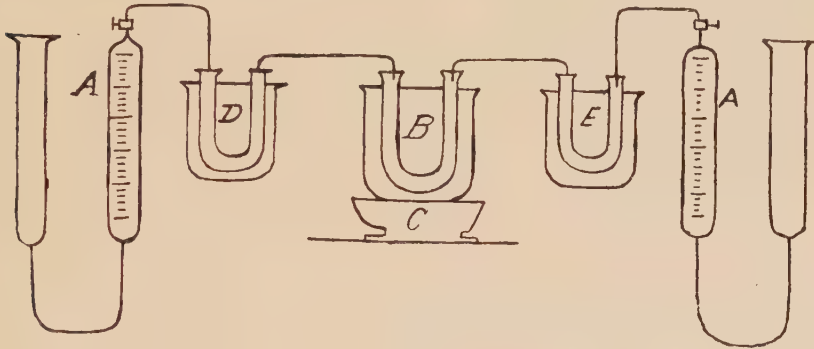
Risultati questi che confermano come per azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa si forma β-cellulosa (ossi-cellulosa) soltanto, e non si producono quei prodotti secondari indicati col nome di γ-cellulosa.

Quantunque le esperienze, delle quali abbiamo resoconto, siano sufficienti a spiegare la natura del fenomeno della maturazione della sodio-cel-

(1) Più precisamente il 17.12 % di emi-cellulosa conteneva il 15.5 di β-cellulosa e 1.62 di γ-céll.

lulosa, e chiariscano i processi e la composizione della seta artificiale, pure abbiamo voluto estenderle determinando meglio le condizioni di assorbimento dell'ossigeno da parte della sodio-cellulosa. Abbiamo determinato perciò volumetricamente l'andamento dell'assorbimento col tempo e con la temperatura.

L'apparecchio da noi impiegato, quantunque non presenti la garanzia di uno studio rigoroso, ci è sembrato corrispondente al nostro scopo. Esso è rappresentato dalla figura seguente:



- A — Tubi graduati contenenti l'ossigeno.  
 B — Tubo con l'alcalicellulosa posto nel b. m. B.  
 C — Fornello.  
 D-E — Tubi raffreddati per condensare il vapor d'acqua.

Operando sempre con gr. 15 di sodio-cellulosa e riscaldando a b. m. a 100°, si è ottenuto:

Durata del riscald.	Ossigeno		Emi-cellulosa		β-Cellulosa	
	% di sodio-cell.	% di cell.	Totale	Corretta	Totale	Corretta
3 ore	0.50	1.35	44.19	38.85	43.94	38.92
6 »	1.85	4.77	50.78	45.46	49.00	44.00
6 »	2.07	5.55	58.27	52.93	—	—
9 »	2.67	7.20	65.80	60.46	—	—
10 »	2.72	7.30	—	—	—	—
20 »	4.38	11.80	—	—	—	—
28 »	5.56	14.97	—	—	—	—
31 »	5.75	15.49	—	—	—	—
35 »	6.05	16.31	—	—	—	—
38 »	6.32	17.04	—	—	—	—
42 »	6.47	17.44	—	—	—	—
48 »	6.53	17.59	80.86	75.52	66.01	60.99

Da questi dati risulta che l'assorbimento dell'ossigeno va aumentando con una notevole regolarità, e confermano ancora una volta che per l'azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa si forma esclusivamente  $\beta$ -cellulosa (ossi-cellulosa).

In queste esperienze fu notata una cosa assai importante, che cioè nella sodio-cellulosa, dopo il trattamento coll'ossigeno, era notevolmente aumentata la proporzione del carbonato, e poichè si adopera sempre ossigeno privo di acido carbonico, è necessario ammettere che l'acido carbonico sia proveniente dalla cellulosa.

Fischer e Topoch (Ber. 56, 2418) affermano che, scaldando la cellulosa a 300° con liscivia di soda, si forma acido carbonico, ma non dicono come se ne sono assicurati, essendo l'anidride carbonica assorbita dalla soda.

In ogni modo la formazione dell'anidride carbonica si spiega con la contemporanea produzione di pentosani



E le esperienze da noi eseguite dimostrano effettivamente la formazione di quantità, per quanto piccole, di pentosani:

Alcali cell. appena prep.	Dopo 3 ore a 100°	6 ore a 100°	24 ore a 100°	a 60°	
tracce	0.06 %	0.14	0.2	6 ore	00.2
				9 ore	0.03
				24 ore	0.04

Abbiamo anche voluto vedere se operando, a temperature inferiori a 100°, si avesse diminuzione nella formazione di carbonato aumentando perciò quella dell'ossi-cellulosa, tanto più che una determinazione di carbonato, eseguita sopra sodio-cellulosa riscaldata a 100° per 30 ore, aveva dato per il carbonato un numero troppo elevato. Terminando daremo i dati ottenuti operando alla temperatura di 60°:

Durata del riscald. a 60° C ore	cc. di ossigeno per 15 gr. alc. cell.	gr. ossigeno per 100 gr. di alc. cell.	gr. ossigeno per 100 gr. di cellulosa	Emi-cellul. totale o/10 gr. di cellulosa	Emi-cell. corretta o/10 gr. di cellulosa	$\beta$ -cellulosa totale o/10 gr. di cellulosa	$\beta$ -cellulosa corretta o/10 gr. di cellulosa	Aumento Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> o/10 gr. di cellulosa
6	58.9	0.56	1.42	50.82	46.74	49.90	45.95	0.43
9	150.6	1.43	3.59	53.40	49.32	49.68	45.73	0.63
12	157.6	1.50	3.79	53.55	49.47	48.00	44.05	0.75
24	299.5	2.86	7.20	58.08	54.00	57.03	53.08	1.00
46	429.1	4.09	10.31	76.23	72.15	74.00	70.05	2.50



Da questi primi dati, che saranno completati, risulta intanto che la presenza dei pentosani non è dubbia, e che alla temperatura di 60° si forma il 70 % di  $\beta$ -cellulosa con un minor assorbimento di ossigeno (gr. 10.31 per 100 di cellulosa invece di 17.56).

Quando una sola di queste esperienze era stata fatta era già da tempo preso il Brevetto, e quando questa Nota era già scritta è stato pubblicato un modesto studio di Kullgren sull'azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa (Papier Fabr. 1926, p. 187) che ha spinto Weltsin e Gerhard (Pap. Fabr. 27, p. 418) a fare sapere che dell'argomento anche essi si occupano da molto tempo. Ma ciò non toglie nulla al nostro lavoro, diversamente concepito e ricco di risultati importanti per la scienza e per la pratica.

**Chimica.** — *Sulla maturazione della sodio-cellulosa.* Nota <sup>(1)</sup>  
del Socio E. PATERNO.

Nelle Note sull'ossi-cellulosa e sull'azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa, si trova la prova che la maturazione della sodio-cellulosa è un fenomeno di ossidazione; ma poichè questo argomento che è stato base di un brevetto può richiedere la pubblicazione di alcuni elementi senza necessità di rendere note tutte le nostre ricerche, non crediamo inutile trattarne a parte.

Era stato provato sin dai primi tempi nei quali venne preparata la sodio-cellulosa, che essa non era adatta alla preparazione del xantogenato e per conseguenza a quella della viscosa, se non dopo che era stata lasciata nei recipienti chiusi per alcuni giorni ad una determinata temperatura, e che avesse subito quel fenomeno che è stato chiamato *maturazione*. Ma sulla natura di questo fenomeno si avevano cognizioni del tutto errate, tanto che si prescriveva che la maturazione dovesse farsi in recipienti ben chiusi. Le prime esperienze fatte dalla Châtillon hanno provato che la sodio-cellulosa lasciata in ambiente privo di ossigeno non matura o matura molto più lentamente, fatto non privo d'importanza pratica perchè permetteva la sua conservazione per lungo tempo, ciò che in fabbrica può essere utile. Ma le ricerche sull'assorbimento dell'ossigeno da parte della sodio-cellulosa, che sono causa dell'aumento di emi-cellulosa o, meglio, di  $\beta$ -cellulosa, e che per noi non è altro che ossi-cellulosa, hanno messo fuori di dubbio che la maturazione è un processo chimico, con formazione di ossi-cellulosa. È notevole il fatto che nella stagionatura si produce ciò che comunemente chiamasi emi-cellulosa; ma mentre nella emi-cellulosa della cellulosa di fabbrica predomina quel miscuglio indefinito chiamato  $\gamma$ -cel-

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

lulosa, nella maturazione della sodio-cellulosa può dirsi che si formi esclusivamente la  $\beta$ -cellulosa. In una esperienza abbiamo trovato che l'emi-cellulosa che si forma nella maturazione della sodio-cellulosa, è costituita per 93 % da  $\beta$ -cellulosa. Mentre che nell'emi-cellulosa ottenuta dalla cellulosa di fabbrica ordinariamente è contenuto soltanto  $1/3$  di  $\beta$ -cellulosa.

Risulta da altre esperienze che la  $\beta$ -cellulosa, meglio l'ossi-cellulosa che si forma dalla sodio-cellulosa durante la maturazione, è trasportata attraverso il xantogenato fino alla seta, e che perciò essa rappresenta un costituente normale per la seta stessa. Si scorge dunque quanta luce sul processo di fabbricazione della seta-viscosa abbiano recato queste esperienze.

**Chimica:** — *La così detta cellulosa rigenerata.* Nota<sup>(1)</sup> del Socio E. PATERNÒ.

Non è possibile aprire un libro e leggere una memoria, antica o recente, in cui si parli di cellulosa senza incontrare la espressione di *cellulosa rigenerata*. Così fin dal 1864 Schutzenberger e Naudin, che pei primi ottennero derivati acetilici della cellulosa, affermano che questi per azione degli alcali rigenerano la cellulosa. Anche Cross e Bevan dicono di aver rigenerata la cellulosa dal loro supposto miscuglio di tri e tetra-acetilcellulosa, e fino ai giorni nostri Heuser e Scheider, nei loro affrettati studi sul carbonato di cellulosa, affermano che tale composto che si ottiene in cristalli, con punto di fusione determinato, per azione degli alcali, rigenera cellulosa. Si è parlato di cellulosa rigenerata dall'alcali-cellulosa e dal xantogenato, e, come graziosa concessione, taluni consentono che in certe reazioni si formi idro-cellulosa o uno qualunque dei suoi idrati, e si è detto che la seta alla viscosa è idro-cellulosa pura. Si è detto inoltre che l'acido solforico scioglie a freddo la cellulosa e per aggiunta di acqua rigenera questa, e che l'idrolisi avviene quando dopo un certo tempo, o per riscaldamento, non si ha più precipitazione con la diluizione.

Ora è doveroso affermare che tutta questa parte della chimica della cellulosa è semplicemente fantastica, e che ha fondamento solo in esperienze male eseguite e più leggermente interpretate. Nessuno che io sappia si è curato di esaminare il precipitato che si forma nelle soluzioni alcaline di composti cellulosici per aggiunta di un acido, e ci si è contentati del fatto che è insolubile nell'acqua, senza nemmeno curarsi del rapporto in peso fra la cellulosa rigenerata ed il prodotto dal quale si è partiti. Un esame singolo dei casi nei quali si è creduto di ottenere la cellulosa rigenerata, sarebbe opera troppo ingrata ed altrettanto lunga, onde noi ci limitiamo a

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

supporre che in certe esperienze sia sfuggita all'azione del reattivo usato qualche porzione della cellulosa, ed in questo caso sia stato possibile al microscopio riconoscere la fibra.

Per quello che concerne i casi in cui si forma invece idro-cellulosa, si è dimenticato di studiare questa idro-cellulosa, e non si è pensato che essa, come provano le esperienze da noi fatte, per quanto disseccata a 110° abbia la composizione vicina a quella della cellulosa, si ottiene sempre accompagnata da  $\beta$ -cellulosa che fa come da colla fra le pareti di cellulosa più o meno trasformata.

Prima di procedere oltre ci piace ricordare che il Süwern, a p. 311 della sua opera, dice che la cellulosa è rigenerata dalla soluzione cupro-ammoniacale, mentre altri chimici affermano che da tale soluzione si ottiene ossi-cellulosa. Anche Hess ha recentemente insistito (Abstracts, febbraio 1925) nell'affermazione che la cellulosa precipitata dalla soluzione cupro-ammoniacale sia identica alla cellulosa.

La verità è una, che cioè la cellulosa nelle sue varie trasformazioni può dirsi rigenerata soltanto nei casi in cui per lavaggio con acqua vengono eliminate le sostanze da essa assorbite, come avviene per il cotone mercerizzato e per la cellulosa trattata con carbonato sodico; ma se la cellulosa è impegnata in un composto oppure è entrata in soluzione (ed in questo caso intendiamo anche il fenomeno della dispersione colloidale) essa non può più essere rigenerata; così dalla soluzione in cloruro di zinco, dal xantogenato, dalla viscosa, dalla soluzione cupro-ammoniacale, o anche dalla soluzione in acido solforico e fosforico, o in acido cloridrico, quando non abbia subito la idrolisi che la trasforma più profondamente, la cellulosa non conserva più i suoi caratteri primari.

Questo è necessario che tutti i chimici, che studiano la cellulosa, tengano presente, compreso Hess con la sua cellulosa A, prodotto da saponificazione di un acetato cristallizzato. Quando un composto ha perduto le sue proprietà colloidali è assurdo parlare di rigenerazione della cellulosa.

Anche le fantastiche determinazioni di pesi molecolari di derivati colloidali della cellulosa con l'aiuto della crioscopia rappresentano soltanto il desiderio di riempire pubblicazioni con lusso di esperienze inconcludenti. Ma ritorneremo su questo argomento.

Con le osservazioni precedenti non intendiamo affermare che non possa ottenersi una cellulosa che, pure senza avere la forma fibrosa, sia chimicamente identica alla cellulosa del cotone. Non è improbabile che, nei processi nei quali la cellulosa passa in apparente soluzione, avvenga un attacco parziale della fibra, di struttura non omogenea, localizzato alla parte di minore resistenza, che produce lo sminuzzamento della fibra, spinto ad un limite tale, che parte della cellulosa inalterata rimanga *dispersa* nel liquido.

# MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sul contatto di due superficie.* Nota di E. BOMPIANI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Studio in questa Nota, servendomi di risultati già stabiliti relativi al contatto di curve piane o sghembe in un punto regolare o singolare per esse, il contatto del primo ordine fra due superficie

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma) \quad \chi = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{111} x^3 + \\ \quad + 3 a_{112} x^2 y + 3 a_{122} xy^2 + a_{222} y^3 + \dots \\ \bar{\sigma}) \quad \chi = \bar{a}_{11} x^2 + 2 \bar{a}_{12} xy + \bar{a}_{22} y^2 + \bar{a}_{111} x^3 + \\ \quad + 3 \bar{a}_{112} x^2 y + 3 \bar{a}_{122} xy^2 + \bar{a}_{222} y^3 + \dots \end{array} \right.$$

in un punto  $O(0, 0, 0)$  regolare per entrambe.

Possono presentarsi varî casi.

2. La curva d'intersezione abbia in  $O$  un punto doppio a tangenti distinte e i piani osculatori distinti dal piano tangente. Le due tangenti e la retta d'intersezione dei due piani osculatori possono assumersi come assi  $x, y, \chi$ . Con ciò, posto in generale  $A_{ikl} \dots = a_{ikl} \dots - \bar{a}_{ikl} \dots$ ,  $A_{11} = A_{22} = 0$ ,  $A_{12} = 0$ ,  $A_{111} = A_{222} = 0$ ,  $a_{11} a_{22} \neq 0$ .

Nel piano tangente in  $O$  ai due rami sono definite due *rette principali* e su ciascuna un *punto principale*<sup>(2)</sup>; assunta la retta di questi due punti come all'infinito e il punto unità sopra una delle rette principali si ha  $a_{11} = a_{22} = a \neq 0$ ,  $a_{111} = a_{222} = 0$ ; la curva d'intersezione è rappresentata da

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = - \frac{A_{1111}}{2 A_{12}} x^3 + [4] \\ \chi = ax^2 + \frac{a_{12} \bar{a}_{111} - \bar{a}_{12} a_{111}}{A_{12}} x^4 + [5] \end{array} \right.$$

e da analoghe (3) ottenute scambiando  $x$  con  $y$  e l'indice  $i$  con  $2$ .

3. Esiste una rete di quadriche aventi per generatrici gli assi  $x$  e  $y$  rispetto alle quali sono polari la retta all'infinito del piano tangente e l'asse  $\chi$ . Orbene:

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(2) E. BOMPIANI, *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe* [questi « Rendiconti », 19312].



Nella rete di quadriche anzidetta vi sono due fasci (rappresentati da  $\zeta = \pm axy + \beta z^2$ , con  $\beta$  arbitrario) tali che le sezioni prodotte su uno di essi da uno dei piani per l'asse  $\zeta$  e per una delle rette principali ( $x = \pm y$ ) si proiettano dai punti all'infinito di uno degli assi  $x$  o  $y$  sul piano  $y\zeta$  o  $x\zeta$  nelle coniche a contatto quadripunto con le analoghe proiezioni dei rami della curva d'intersezione.

4. In ciascun fascio vi sono poi due quadriche per le quali il procedimento precedente dà luogo alle coniche osculatrici (contatto 5-punto). Queste quadriche tagliano l'asse  $\zeta$  in due punti ( $\neq O$ ); il coniugato armonico di  $O$  rispetto ad essi può assumersi come quarto vertice del tetraedro (punto all'infinito sull'asse  $\zeta$ ).

5. Infine le due quadriche ora determinate in uno dei due fasci sono tagliate dal piano  $x = y$  in due coniche: la tangente ad una di esse nel punto d'incontro con l'asse  $\zeta$  ( $\neq O$ ) incontra l'altra conica in un punto che può assumersi come unità. Col riferimento invariante adottato le due quadriche hanno le equazioni  $\zeta = xy \pm \zeta^2$  e le superficie le altre:

$$\zeta = 2(x^2 + a_{12}xy + y^2) + 3(a_{112}x + a_{122}y)xy + (k_1a_{12} + 4)x^4 + (k_2a_{12} - 4)y^4 + \dots$$

$$\bar{\zeta} = 2(x^2 + \bar{a}_{12}xy + y^2) + 3(\bar{a}_{112}x + \bar{a}_{122}y)xy + (k_1\bar{a}_{12} + 4)x^4 + (k_2\bar{a}_{12} - 4)y^4 + \dots$$

ove i puntini indicano i termini in  $x^3y$ ,  $x^2y^2$ ,  $xy^3$  e i termini d'ordine  $> 4$ . Ogni termine di questi sviluppi è invariante.

6. Un piano generico per  $O$ ,  $\zeta = \lambda x + \mu y$ , taglia  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  in due curve aventi un *invariante di contatto* <sup>(1)</sup> dipendente dalla sola traccia del piano su quello tangente (se invece il piano passa per una delle tangenti nodali, p. es.  $\lambda = 0$ , le due curve hanno un *invariante infinitesimo di contatto* che vale  $2A_{12}x/\mu$ ). Le due sezioni, con i loro intorno del 3° ordine, determinano inoltre una *retta invariante* <sup>(2)</sup>; questa varia in un fascio quando il piano varia intorno alla traccia; e, al variare di questa, il piano involuppa un cono di 5ª classe di cui  $\zeta = 0$  è piano tangente quadruplo <sup>(3)</sup>.

(1) Il carattere proiettivo di quest'invariante è stato notato da C. SEGRE. Per ulteriori sviluppi, come per l'introduzione di invarianti infinitesimi (forme differenziali proiettivamente invarianti) v. la mia Nota: *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane* [questi «Rendiconti», 1926]. Di essi si è pure servito per il contatto fra superficie il dott. G. PALOZZI nella Nota: *Sugli invarianti proiettivi ecc.* [questi «Rendiconti», 1928<sub>1</sub>].

(2) *Invarianti proiettivi di contatto ecc.*, loc. cit., n. 3.

(3) L'equazione del cono involuppo, in coordinate omogenee di piani nella stella di centro  $O$ , si scrive:

$$\begin{aligned} & 4A_{12}\xi_3(\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)(\xi_1^2 + \bar{a}_{12}\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) = \\ & = 3(a_{112}\xi_2 + a_{122}\xi_1)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \bar{a}_{12}\xi_1\xi_2)\xi_1\xi_2 - \\ & - 3(\bar{a}_{112}\xi_2 + \bar{a}_{122}\xi_1)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + a_{12}\xi_1\xi_2)\xi_1\xi_2. \end{aligned}$$



Riassumendo:

Siano  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  due superficie tangenti in  $O$ ; la loro curva d'intersezione abbia un nodo ivi con tangenti nodali distinte dalle tangenti asintotiche di  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$ . Si possono determinare un tetraedro e un punto-unità invarianti servendosi dell'intorno del 4° ordine di  $O$  sulla curva d'intersezione. Di più un piano generico per  $O$  sega  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  in due curve tangenti: la retta invariante ad esse relativa descrive un fascio quando il piano varia per una tangente; e al variare di questa il piano del fascio involuppa un cono di quinta classe e di ottavo ordine la cui conoscenza equivale a quella dei coefficienti dei termini del 3° ordine negli sviluppi di  $\sigma$  e di  $\bar{\sigma}$ .

7. Esaminiamo ora il caso in cui la curva d'intersezione di  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  abbia un nodo in  $O$  e le tangenti nodali siano quelle asintotiche delle due superficie. Assunte quelle tangenti come assi  $x, y$  si hanno gli sviluppi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma) \quad \chi = 2a_{12}xy + a_{111}x^3 + 3a_{112}x^2y + 3a_{122}xy^2 + a_{222}y^3 + [4] \\ \bar{\sigma}) \quad \chi = 2\bar{a}_{12}xy + \bar{a}_{111}x^3 + 3\bar{a}_{112}x^2y + 3\bar{a}_{122}xy^2 + \bar{a}_{222}y^3 + [4] \end{array} \right.$$

con  $a_{12} \neq \bar{a}_{12}$ , cioè  $A_{12} \neq 0$ , altrimenti le due superficie avrebbero un contatto del 2° ordine in  $O$  (1).

Occorre anzitutto definire una retta invariante per  $O$  (non contenuta nel piano tangente) ed una nel piano tangente (ma non passante per  $O$ ).

A tale scopo consideriamo la sezione p. es. di  $\sigma$  con un piano per una tangente asintotica, sia  $\chi = \mu y$ ; essa è rappresentata da

$$y = \frac{a_{111}}{\mu} x^3 + \left( \frac{a_{111}a_{12}}{\mu^2} + \frac{a_{1111}}{\mu} \right) x^4 + \dots$$

Sulla tangente di flesso è definito un punto invariante (2) di ascissa  $x = 2a_{111}\mu / (a_{111}a_{12} + a_{1111}\mu)$  il quale descrive una punteggiata (al variare di  $\mu$ ) proiettiva al fascio di piani. Analoga proiettività si ha considerando la sezione dei piani dello stesso fascio con  $\bar{\sigma}$ . Possiamo quindi considerare una proiettività fra due punteggiate sovrapposte, su ciascuna tangente asintotica, e una proiettività fra due fasci sovrapposti.

La proiettività fra i fasci è rappresentata da

$$(a_{111}\bar{a}_{1111} - \bar{a}_{111}a_{1111})\mu\mu' + a_{111}\bar{a}_{111}(\bar{a}_{12}\mu - a_{12}\mu') = 0$$

(1) Avevo già notato altrove che  $a_{12}/\bar{a}_{12}$  è un invariante proiettivo delle due superficie; precisamente è l'invariante di contatto delle sezioni prodotte da un piano generico per  $O$  (v. *Determinazioni proiettivo-differenziali* ecc.; « Atti R. Acc. d. Scienze di Torino », vol. LIX, 1924, p. 417).

(2) E. BOMPIANI, *Per lo studio proiettivo-differenziale delle singolarità*, « Bollett. Unione Matem. Ital. », a. V, n. 3, 1926.

e perciò se il punto  $O$  è regolare per le asintotiche (cioè  $a_{111} \bar{a}_{111} \neq 0$ ) esiste un piano unito ben determinato diverso da  $\chi = 0$ , per il quale

$$\mu = \frac{a_{111} \bar{a}_{111} A_{12}}{a_{111} \bar{a}_{111} - \bar{a}_{111} a_{111}}.$$

Analogamente nella proiettività fra punteggiate su  $y = \chi = 0$  si ha un punto unito,  $\neq O$ , per cui

$$x = \frac{2 a_{111} \bar{a}_{111} A_{12}}{a_{111} \bar{a}_{111} a_{12} - \bar{a}_{111} a_{111} \bar{a}_{12}}.$$

A conclusioni del tutto simili si arriva per l'altra tangente asintotica. Se ora si assumono i punti uniti sugli assi  $x$  e  $y$  come loro punti all'infinito e la retta d'intersezione dei due piani uniti come asse  $\chi$  si ha

$$a_{111} = \bar{a}_{111} = a_{222} = \bar{a}_{222} = 0.$$

Il significato geometrico delle due rette ora introdotte è il seguente:

Si considerino le sezioni prodotte sulle superficie dal piano  $x\chi$  ( $o y\chi$ ); le cubiche aventi contatto 5-punto con esse nel flesso  $O$  e una cuspidale in un punto qualsiasi dell'asse  $\chi$  hanno ivi la stessa tangente cuspidale. Comunque vari il punto sull'asse  $\chi$  queste tangenti cuspidali incontrano l'asse  $x$  ( $o y$ ) tutte nello stesso punto (che abbiamo assunto come punto all'infinito).

Se e solo se il contatto fra le due superficie è ARMONICO, cioè  $a_{12} = -\bar{a}_{12}$ , le proiettività prima nominate sono involuzioni.

L'asse  $\chi$  può ancora esser caratterizzato così:

Ogni suo punto è centro d'un'omologia, di asse  $x$  e d'invariante  $\bar{a}_{111}/a_{111}$  (oppure di asse  $y$  e d'invariante  $\bar{a}_{222}/a_{222}$ ) che muta la sezione fatta da  $y = 0$  (oppure da  $x = 0$ ) sulla prima superficie in una curva avente contatto 5-punto con la sezione prodotta sulla seconda.

8. Sul ramo della curva d'intersezione di  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  tangente all'asse  $x$  si ha

$$\begin{cases} \chi = \frac{a_{12} \bar{a}_{111} - \bar{a}_{12} a_{111}}{A_{12}} x^3 - \frac{3}{2} \frac{a_{12} \bar{a}_{112} - \bar{a}_{12} a_{112}}{A_{12}^2} x^4 + [5] \\ y = -\frac{A_{111}}{2 A_{12}} x^2 + [3] \end{cases}$$

e analogamente sull'altro ramo.

Questi due rami, con tangenti diverse ma col medesimo piano osculatore  $\chi = 0$ , determinano in esso tre rette principali<sup>(1)</sup> rappresentate da<sup>(2)</sup>

$$(a_{12} \bar{a}_{111} - \bar{a}_{12} a_{111}) x^3 + (a_{12} \bar{a}_{222} - \bar{a}_{12} a_{222}) y^3 = 0;$$

(1) Cfr. la Nota: *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe*, già citata.

(2) Queste tre rette divengono indeterminate quando coincidono i tre invarianti  $\bar{a}_{12}/a_{12}$ ,  $\bar{a}_{111}/a_{111}$ ,  $\bar{a}_{222}/a_{222}$ .

pure invarianti sono i tre punti principali su di esse e la polare di  $O$  rispetto al loro triangolo.

Altri elementi geometrici possono definirsi per mezzo delle proiezioni dai punti all'infinito di uno degli assi  $x$  o  $y$  sul piano  $y\zeta$  o  $x\zeta$  della curva d'intersezione di  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  e finire così di determinare un tetraedro e un punto-unità invarianti; dopo di che tutto ha carattere invariante.

Sarebbe facile trarre di qua nozioni invarianti relative ad una superficie associando in ogni suo punto ad essa p. es. la quadrica di Lie.

9. Supponiamo ora che la curva d'intersezione abbia una cuspidale in  $O$ . Assunta la tangente cuspidale come asse  $x$ , e riferendosi alla (2),  $A_{11} = A_{12} = 0$ . Un piano generico per  $O$  sega  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  in due curve, a contatto del 1° ordine, il cui invariante di contatto, facile a scriversi, dipende soltanto dalla traccia del piano dato sul piano tangente.

Il contatto si eleva al 2° ordine per un piano,  $\zeta = \mu y$ , passante per la tangente cuspidale; e allora le due sezioni hanno un invariante infinitesimo di contatto  $(2a_{11}A_{22} + \mu A_{111})x/a_{11}\mu$ . Il valore di  $\mu$  per cui questo si annulla dà luogo ad un piano invariante che sega  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  in due curve aventi fra loro un contatto del 3° ordine.

Assunto questo come piano  $x\zeta$  ( $y = 0$ ) si ha  $a_{111} = \bar{a}_{111}$ , cioè  $A_{111} = 0$ . La proiezione della curva d'intersezione da un punto qualsiasi del piano invariante (qual'è il punto all'infinito dell'asse  $\zeta$  non ancora fissato in alcun modo) sul piano tangente è una curva con tacnodo in  $O$ .

I due rami tacnodali si rappresentano con sviluppi del tipo

$$y = px^2 + qx^3 + rx^4 + [5]$$

ove per  $p$  debbono prendersi le radici  $p_1, p_2$  dell'equazione

$$A_{22}p^2 + 3A_{112}p + A_{1111} = 0$$

e in corrispondenza ad essi i valori di  $q$  determinati da

$$(2A_{22}p + 3A_{112})q + 3A_{122}p^2 + 4A_{1112}p + A_{11111} = 0$$

e analogamente per  $r$ .

10. Per finir di determinare un tetraedro invariante esaminiamo la proiezione sul piano tangente della curva d'intersezione da un punto  $(x_0, 0, \zeta_0)$  del piano invariante.

Si trova subito che l'invariante di contatto  $p_1/p_2$  dei due rami tacnodali (che supponiamo  $\neq 1$ ; l'ipotesi opposta corrisponde ad una maggiore particolarizzazione della curva d'intersezione che tralasciamo d'esaminare) non dipende affatto dal centro di proiezione; cioè è un invariante di contatto relativo alle due superficie.

Questi due rami definiscono <sup>(1)</sup> una retta invariante (nel piano tangente, per O); a differenza di quanto ci si potrebbe aspettare, essa è unicamente determinata da  $\sigma$  e da  $\sigma$  e non dipende affatto dal centro di proiezione. Assunta come asse  $y$  si ha  $p_1 q_2 = q_1 p_2$ .

In conseguenza di ciò può determinarsi  $x_0/\chi_0$  così che si annullino i coefficienti di  $x^3$  negli sviluppi dei due rami tacnodali. Si ha quindi una retta invariante per O nel piano  $x\chi$ , che assunta come asse  $\chi$  dà  $q_1 = q_2 = 0$ .

I rami tacnodali presentano sviluppi del tipo

$$y = px^2 + \left( r - p \frac{a_{11}}{\chi_0} \right) x^4 + [5]$$

e pertanto le coniche ad essi osculatrici in O (a contatto 5-punto) sono

$$y = px^2 + \frac{1}{p^2} \left( r - p \frac{a_{11}}{\chi_0} \right) y^2.$$

Possiamo finire di determinare il centro di proiezione (cioè  $\chi_0$ ) con la condizione che queste coniche si tocchino (fuori di O): se quel centro si assume come punto all'infinito dell'asse  $\chi$  e la tangente alle due coniche osculatrici (= dall'asse  $x$ ) come retta all'infinito nel piano tangente si ha  $r_1 = r_2 = 0$ . Sicchè riassumendo:

*Se la curva d'intersezione di due superficie tangenti in O ha ivi una cuspide (senza altre particolarità) è determinato un piano invariante (per O e per la tangente cuspidale) dai cui punti quella curva vien proiettata sul piano tangente in una curva con tacnodo. Esiste un punto nel piano invariante per cui le coniche osculatrici ai rami tacnodali si toccano in un punto diverso da O: la corda di contatto e l'ulteriore tangente alle due coniche (diversa dalla tangente in O) finiscono di determinare un tetraedro invariante.*

(1) *Invarianti proiettivi di contatto ecc.*, già citata; n. 3.

**Matematica.** — Sullo sviluppo di  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n \left( \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \right)^n \right]$  in serie di potenze crescenti di  $x$ . Nota di U. BROGGI, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. TONELLI.

Il prodotto secondo Cauchy di  $p$  serie  $1 + a_1 + a_2 + \dots$ ,  $1 + b_1 + b_2 + \dots$ ,  $\dots$ , aventi come primo termine (al quale supponiamo corrispondere l'indice zero) l'unità, è una serie  $1 + A_1 + A_2 + \dots$  il cui termine generale  $A_n$  è la somma di tutti i prodotti tali che in ciascuno di essi due fattori siano termini di due delle  $p$  serie date e la somma degli indici dei fattori sia uguale ad  $n$ . Se i numeri  $s_1, s_2, \dots, s_h$  sono interi e positivi, ed è  $s_1 + s_2 + \dots + s_h = n$ , nel termine  $A_n$  della serie prodotto figureranno  $(p_h)$  prodotti tali che in ciascuno di essi i fattori (diversi dall'unità) abbiano per indici ordinatamente i numeri  $s_1, s_2, \dots, s_h$ .

Se le  $p$  serie coincidono, ed è

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots)^p = 1 + A_1 + A_2 + \dots$$

i  $(p_h)$  prodotti ora definiti coincideranno ed avranno per somma

$$(p_h) a_{s_1} a_{s_2} \dots a_{s_h}.$$

Sarà dunque

$$A_n = (p_1) \sum_n^1 a_s + (p_2) \sum_n^2 a_s + \dots = \sum_{h=1}^n (p_h) \sum_n^h a_s,$$

se  $\sum_n^h a_s$  esprime la somma di tutti i prodotti analoghi ad  $a_{s_1} a_{s_2} \dots a_{s_h}$ , essendo  $s_1, s_2, \dots, s_n$  numeri interi positivi uguali o disuguali aventi per somme  $n$ , e sia

$$\sum_n^h a_s = 0, \quad \text{se } h > n^{(2)}.$$

Se  $1 + a_1 + a_2 + \dots$  converge assolutamente, converge  $1 + A_1 + A_2 + \dots$  ed ha il valore  $(1 + a_1 + \dots)^p$ .

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1932.

(2) La notazione è del Cesàro (*Corso di An. Alg.*, p. 361), che riconduce alla forma appresso indicata la formula colla quale Schlömilch esprime la derivata  $n$ -esima di una funzione di funzione (*Kompendium der höh. Math.* II, 1879, p. 16). È forse superfluo notare che due termini di  $\sum_n^h a_s$  possono differire anche solo per l'ordine dei fattori.



Ma ove si voglia estendere la relazione

$$(1) \quad (1 + a_1 + a_2 + \dots)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{h=1}^n (p_h) \sum_n^h a_s \right)$$

a valori negativi e frazionari di  $p$ , e studiare la convergenza della serie del secondo membro nell'ipotesi che  $1 + a_1 + a_2 + \dots$  converga, conviene seguire altro cammino e prendere come punto di partenza la formola di Schlömilch-Cesàro esprimente la derivata  $n$ -esima di una funzione di funzione.

Se

$$u = \psi(x) \quad , \quad y = \varphi(u) = \varphi(\psi(x)) = f(x)$$

ed esistono le prime  $n$  derivate di  $u$  rispetto ad  $x$  e di  $y$  rispetto ad  $u$ , è anche

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\varphi'(u)}{1!} U_{n,1} + \frac{\varphi''(u)}{2!} U_{n,2} + \dots,$$

dove

$$U_{n,b} = \sum_n^b \frac{n^{(b)}}{s!}.$$

Ove sia

$$u = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

$$y = u^p = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

$p$  essendo razionale ed arbitrario, s'ottiene

$$\frac{1}{n!} \left( \frac{d^n y}{dx^n} \right)_{x=0} = A_n = \sum_{h=1}^n (p_h) \sum_n^h a_s,$$

$$A_0 = 1,$$

e pertanto

$$(2) \quad (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{h=1}^n (p_h) \sum_n^h a_s \right) x^n$$

nell'interno della circonferenza di centro nell'origine sulla quale si trova il punto singolare di modulo minimo di  $1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ . Il quale è il punto singolare più prossimo all'origine di  $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ , se  $p$  è intero e positivo, o questo o lo zero di modulo minimo di  $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ , in caso contrario.

La (1)

$$(1) \quad (1 + a_1 + a_2 + \dots)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{h=1}^n (p_h) \sum_n^h a_s \right)$$

sussiste qualunque sia il valore razionale di  $p$  se la serie  $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  ha un raggio di convergenza maggiore di 1, e se maggiore di 1 è il modulo del suo zero di modulo minimo.

La (1) e la (2) risolvono il problema di determinare il termine generale  $A_n$  (o il coefficiente  $A_n$  del termine generale  $A_n x^n$ ) della serie di termini costanti  $1 + A_1 + A_2 + \dots$  (o della serie di potenze  $1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ ) potenza  $p$ -esima di  $1 + a_1 + a_2 + \dots$  o di  $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  qualunque sia il valore di  $p$ .

Se  $p = -1$  è  $(p)_b = (-1)^b$ . Perchè sia

$$\frac{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

deve essere

$$\begin{aligned} c_n &= b_n - b_{n-1} a_1 + b_{n-2} \sum_{b=1}^2 (-1)^b \sum_2^b a_s + \dots + \sum_{b=1}^n (-1)^b \sum_n^b a_s \\ &= \sum_{k=0}^n \left[ b_{n-k} \sum_{b=1}^k (-1)^b \sum_k^b a_s \right]. \end{aligned}$$

Ove più generalmente sia

$$y = \varphi(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots,$$

$$u = \psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

e si ponga

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

è anche, per la formola di Schlömilch-Cesàro, se nella formazione di  $\sum_n^b a_s$  intervengono solo  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (con esclusione di  $a_0$ ),

$$A_n = \frac{\varphi'(a_0)}{1!} \sum_n^1 a_s + \frac{\varphi''(a_0)}{2!} \sum_n^2 a_s + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(a_0)}{n!} \sum_n^n a_s,$$

$$y = \varphi(a_0) + a_1 \varphi'(a_0) x + \left( \sum_{b=1}^2 \frac{\varphi^{(b)}(a_0)}{b!} \sum_2^b a_s \right) x^2 + \dots$$

Sia  $R$  il raggio di convergenza di  $b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots$  e  $|a_0| < R$ . Se

$$|a_0| + |a_1 W| + |a_2 W^2| + \dots$$

converge, e  $|a_0| < W$ , può determinarsi  $\rho$  così che

$$|\psi(x)| \leq W, \quad \text{se } |x| \leq \rho.$$

La serie

$$b_0 + b_1 \psi(x) + b_2 [\psi(x)]^2 + \dots$$

converge uniformemente in  $|x| \leq \rho$ .

Per il lemma di Weierstrass se

$$b_n x^n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} x + a_2^{(n)} x^2 + \dots,$$

le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

convergono, e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0^{(n)} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_1^{(n)} + \dots = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

è lo sviluppo in serie di Cauchy-Mac Laurin di  $\varphi(\psi(x))$ .

Per la (4) si ha

$$A_n = \sum_{h=1}^n \frac{\varphi^{(h)}(a_0)}{h!} S_n^h a_s,$$

e  $A_n$  appare così esplicitamente definito in funzione di  $\varphi'(a_0), \dots, \varphi^{(n)}(a_0), a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Matematica** (Analisi). — *Sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1 x + a_0)y'' + (b_1 x + b_0)y' - n b_1 y = 0$ . Nota I di G. SANSONE, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. P. BURGATTI.*

1. a) Il chiarissimo prof. P. Burgatti, in un recente lavoro<sup>(2)</sup> ha studiato le soluzioni polinomiali dell'equazione (di Laplace)

$$(I) \quad (a_1 x + a_0) y'' + (b_1 x + b_0) y' - n b_1 y = 0$$

con  $a_0, a_1, b_0, b_1$  costanti reali,  $b_1 \neq 0$ ,  $a_0$  e  $a_1$  non simultaneamente nulli,  $n$  intero non negativo. Egli prova che la presenza o meno di zeri non reali per il polinomio  $y_n(x)$  di grado  $n$  soluzione della (I) è legata al segno dell'invariante  $\delta = a_1 b_0 - a_0 b_1$ , ed ha dimostrato il seguente teorema: *Se  $y_n(x)$  è il polinomio di grado  $n$  soddisfacente la (I), l'equazione  $y_n(x) = 0$  ha tutte le radici reali quando l'invariante è positivo, oppure quando essendo negativo è in valore assoluto minore di  $a_1^2$ ; ne ha invece delle complesse quando l'invariante è negativo, ma in valore assoluto minore di  $a_1^2$ .* La dimostrazione vale nei casi  $\delta > 0$ ,  $\delta < -a_1^2$  e nel caso  $-a_1^2 \leq \delta \leq 0$  si ha la verifica del teorema per i polinomi  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$ ,  $y_4(x)$ .

(1) Nella seduta del 17 gennaio 1932.

(2) Cfr. « Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », I (2), pp. 165-172.

Noi vogliamo qui dare la dimostrazione in quest'ultimo caso, anzi preciseremo il numero degli zeri reali e non reali dei polinomi  $y_n(x)$ .

La (1) con la sostituzione  $t = x + b_0/b_1$  diventa

$$(2) \quad (c_0 t - c_1)y'' + ty' - ny = 0 \quad , \quad c_0 = a_1/b_1 \quad , \quad c_1 = \delta/b_1^2,$$

e per  $c_0 = 0$  si riduce a

$$(3) \quad c_1 y'' - ty' + ny = 0,$$

per la quale il teorema del Burgatti si verifica immediatamente.

Infatti per  $c_1 > 0$  [ $\delta > 0$ ] la (3) con la trasformazione  $t = (2 c_1)^{\frac{1}{2}} u$  diventa

$$(4) \quad y'' - 2 u y' + 2 n y = 0$$

cioè l'equazione dei polinomi di Hermite i quali hanno tutte le loro radici reali; se è invece  $c_1 < 0$  [ $\delta < 0$ ] si passa dalla (3) alla (4) colla trasformazione  $t = i (2 c_1)^{\frac{1}{2}} u$  ( $i$  unità immaginaria) e perciò i polinomi  $y_n(t)$  hanno tutte le loro radici puramente immaginarie.

Supporremo allora  $c_0 \neq 0$ , e siccome il cambiamento di variabile  $t = -u$  muta la (2) nella equazione  $(-c_0 u - c_1)y'' + uy' - ny = 0$ , supporremo senz'altro  $c_0 > 0$ .

*b)* Indicheremo con  $y_n(t)$  il polinomio di grado  $n$  col primo coefficiente uguale all'unità soluzione dell'equazione

$$(2) \quad (c_0 t - c_1)y_n'' + ty_n' - ny_n = 0 \quad , \quad c_0 > 0,$$

avremo in particolare

$$(5) \quad y_0 = 1 \quad , \quad y_1 = t \quad , \quad y_2 = t^2 + 2 c_0 t - c_1.$$

Tra i polinomi  $y_n$  sussistono le relazioni ricorrenti del Burgatti <sup>(1)</sup>

$$(6) \quad (c_0 t - c_1)y_n' = n c_0 y_n - n [c_1 + (n-1)c_0^2] y_{n-1} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(7) \quad y_n = [t + 2(n-1)c_0] y_{n-1} - (n-1)[c_1 + (n-2)c_0^2] y_{n-2} \quad , \quad n = 2, 3, \dots$$

e l'equazione che si ottiene derivando  $l-1$  volte la (2)

$$(8) \quad (c_0 t - c_1)y_n^{(l+1)} + [(l-1)c_0 + t] y_n^{(l)} - (n-l+1) y_n^{(l-1)} = 0$$

$$l = 1, 2, \dots$$

*c)* I polinomi  $y_n(t)$  per  $t > c_1/c_0$  hanno al più una sola radice reale e semplice.

(1) Cfr. P. BURGATTI, loc. cit. <sup>(2)</sup>, p. 169.

Si ha infatti per  $y_n(t)$  l'equazione differenziale

$$y_n'' + [t/(c_0 t - c_1)] y_n' - [n/(c_0 t - c_1)] y_n = 0$$

e poichè per  $t > c_1/c_0$  si ha  $n/(c_0 t - c_1) > 0$ , per cose note sulle equazioni differenziali del secondo ordine, segue la nostra affermazione (1).

d) Per i polinomi  $y_n(t)$  dimostreremo ora i seguenti teoremi:

A Se  $c_1 = -sc_0^2$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$

1 dei polinomi  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)$  soltanto quelli d'indice dispari ammettono una radice reale, e una soltanto, ed essa è maggiore di  $c_1/c_0$ ;

2 il polinomio  $y_{s+1}(t)$  ha la sola radice  $c_1/c_0$  multipla di ordine  $s + 1$ ;

3 i polinomi  $y_n(t)$  con  $n > s + 1$  hanno tutte le loro radici reali,  $s + 1$  di esse sono uguali a  $c_1/c_0$ , e tutte le altre sono minori di  $c_1/c_0$ ;

B Se  $-c_0 < c_1$ ,  $c_1 \neq 0$

1 per  $c_1 > 0$  il polinomio  $y_n(t)$  ha  $n$  radici reali tutte minori di  $c_1/c_0$ ;

2 per  $-c_0^2 < c_1 < 0$  il polinomio  $y_n(t)$  ha  $n$  radici reali delle quali  $n - 1$  minori di  $c_1/c_0$  e l'altra maggiore di  $c_1/c_0$ ;

C Se  $-(2r + 1)c_0^2 < c_1 < -(2r - 1)c_0^2$ ,  $c_1 \neq -2rc_0^2$ ,  
 $r = 1, 2, \dots$

1 i polinomi  $y_1, y_3, \dots, y_{2r-1}$  hanno una e una sola radice reale ed essa è maggiore di  $c_1/c_0$ ; i polinomi  $y_2, y_4, \dots, y_{2r}$  hanno tutte le loro radici non reali;

2 per  $-2rc_0^2 < c_1 < -(2r + 1)c_0^2$  i polinomi  $y_n$  con  $n > 2r$  hanno soltanto  $n - 2r$  radici reali tutte minori di  $c_1/c_0$ ;

3 per  $-(2r + 1)c_0^2 < c_1 < -2rc_0^2$  i polinomi  $y_n$  con  $n > 2r$  hanno soltanto  $n - 2r$  radici reali delle quali  $n - 2r - 1$  sono tutte minori di  $c_1/c_0$  e l'altra maggiore di  $c_1/c_0$ .

## 2. Dimostrazione del teorema A.

a) Sia  $c_1 = -sc_0^2$   $s = 0, 1, 2, \dots$

e cominciamo col verificare che l'equazione  $y_{s+1}(t) = 0$  ha soltanto la radice  $c_1/c_0$  multipla di ordine  $s + 1$ . [A 2].

(1) Cfr. ad es. M. PICONE, *Corso di Analisi Superiore*, «Circ. Mat. di Catania», 1923, p. 86, oppure E. GOURSAT, *Traité d'Analyse*, vol. III, 1923, p. 488.



La (6), quando si faccia  $n = s + 1$ , nella nostra ipotesi diventa

$$(c_0 t - c_1) y'_{s+1} = (s + 1) c_0 y_{s+1}$$

e derivando  $l$  volte e facendo poi  $t = c_1/c_0$  si ha

$$y_{s+1}(c_1/c_0) = y'_{s+1}(c_1/c_0) = \dots = y^{(l)}_{s+1}(c_1/c_0) = 0$$

e perciò

$$(9) \quad y_{s+1} = [t - c_1/c_0]^{s+1}.$$

b) Verifichiamo ora il teorema A 1, proviamo anzi più in generale che se  $c_1 \leq -sc_0^2$ , tra i polinomi  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , ...,  $y_s(t)$  soltanto quelli di indice dispari ammettono una radice reale e una soltanto, ed essa è maggiore di  $c_1/c_0$ . [Verifichiamo così contemporaneamente il teorema C 1].

Dalla (8) facendo  $n = k$  e  $t = c_1/c_0$  si ha

$$c_0^{-1}[(l-1)c_0^2 + c_1] y_k^{(l)}(c_1/c_0) = (k-l+1) y_k^{(l-1)}(c_1/c_0);$$

$$k = 1, 2, \dots, s; \quad l = 1, 2, \dots, k,$$

e poichè  $(l-1)c_0^2 + c_1 < 0$ ,  $k-l+1 > 0$ ,  $c_0 > 0$  ne viene che se  $y_k^{(l)}(c_1/c_0)$  e  $y_k^{(l-1)}(c_1/c_0)$  non sono tutti e due nulli hanno segno contrario, perciò la successione di Budan-Fourier relativa all'equazione  $y_k(t) = 0$

$$y_k(t), \quad y'_k(t), \quad y''_k(t), \dots, \quad y_k^{(k-1)}(t), \quad y_k^{(k)} = k!$$

per  $t = c_1/c_0$  presenta  $k$  variazioni. Ma tale successione presenta anche per  $t = -\infty$ ,  $k$  variazioni, ne viene che l'equazione  $y_k(t) = 0$  tra  $-\infty$  e  $c_1/c_0$  non ha radici reali. Si osservi poi  $[1, c]$  che l'equazione  $y_k(t) = 0$  tra  $c_1/c_0$  e  $+\infty$  non può ammettere che una sola radice reale, quindi le  $y_k(t)$  di indice pari non hanno radici reali, e le altre di indice dispari hanno una e una sola radice reale, maggiore di  $c_1/c_0$  (1).

c) Prima di verificare il teorema A 3 completiamo i risultati ottenuti in a) e b) con le seguenti proprietà che occorrono nel seguito.

1 Se  $\alpha$  è una radice multipla di  $y_n(t)$ , deve essere necessariamente

$$\alpha = c_1/c_0, \quad c_1 = -sc_0^2 \quad \text{con } s \text{ intero non negativo,} \quad n > s,$$

e la radice  $c_1/c_0$  è allora multipla di ordine  $s+1$  di ciascuno dei polinomi  $y_{s+1}^{(l)}, y_{s+2}^{(l)}, \dots$ .

Sia  $\alpha$  radice multipla di  $y_n(t)$ , avremo

$$(10) \quad y_n(\alpha) = 0, \quad y'_n(\alpha) = 0$$

(1) Supposto  $c_1 < -sc_0^2$ , la stessa proprietà vale per il polinomio  $y_{s+1}(t)$ .

e se  $\alpha \neq c_1/c_0$  dall'equazione (8) si ricava  $y_n''(\alpha) = \dots = y_n^{(n+1)}(\alpha) = 0$ , e perciò  $y_n(t)$  identicamente nullo, e ciò non è.

Se sussistono le (10) deve essere quindi

$$(11) \quad y_n(c_1/c_0) = 0 \quad , \quad y_n'(c_1/c_0) = 0,$$

e dalla (6) se  $c_1 + (n-1)c_0^2 \neq 0$ ;  $y_{n-1}(c_1/c_0) = 0$ . Si ha poi dalla (7) che se  $c_1 + sc_0^2 \neq 0$  con  $s = n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0$  è anche  $y_{n-2}(c_1/c_0) = \dots = y_0(c_1/c_0) = 0$ , ma è invece  $y_0 = 1$ . [cfr. (5)]. Abbiamo quindi che perchè sussistano le (11) deve essere

$$(12) \quad c_1 + sc_0^2 = 0$$

dove  $s$  è uguale a uno dei numeri  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Ma abbiamo visto in 2, b) che la (12) porta che i polinomi  $y_1(t), \dots, y_s(t)$  non si annullano in  $c_1/c_0$ , e siccome  $y_{s+1}(t)$  ha la radice multipla dell'ordine  $s+1$ , ci resta da provare che la stessa proprietà appartiene ai polinomi  $y_{s+2}(t), y_{s+3}(t), \dots$ .

La (7) per  $n = s+2$  dà  $y_{s+2} = [t + 2(s+1)c_0^2]y_{s+1}$ , e prendo ancora nella (7)  $n = s+3, \dots$  ne viene per induzione che il polinomio  $y_n(t)$  è divisibile per  $y_{s+1}(t)$  e perciò contiene la radice  $c_1/c_0$  almeno multipla di ordine  $s+1$ .

La (6) per  $n \geq s+2$  si scrive

$$(c_0 t - c_1) y_n' = n c_0 y_n - n(n-s-1) c_0^2 y_{n-1} \quad n = s+2, s+3, \dots$$

e derivando  $s+1$  volte e facendo  $t = c_1/c_0$  si ha

$$y_n^{(s+1)}(c_1/c_0) = n c_0 y_{n-1}^{(s+1)}(c_1/c_0)$$

e siccome  $y_{s+1}^{(s+1)}(t) = (s+1)!$  ne viene

$$(13) \quad y_n^{(s+1)}(c_1/c_0) > 0 \quad \text{per } n = s+2, s+3, \dots,$$

e quindi  $c_1/c_0$  è radice multipla di  $y_{s+2}, y_{s+3}, \dots$  dell'ordine  $s+1$  soltanto.

2 Se  $c_1 = -sc_0^2$ , con  $s$  intero non negativo, ciascuno dei polinomi  $y_{s+1}(t), y_{s+2}(t), \dots$  per  $t = c_1/c_0 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  positivo sufficientemente piccolo, ha il segno di  $(-1)^{s+1}$ .

Per il polinomio  $y_{s+1}$  la proprietà è conseguenza immediata della (9); infatti per  $t < c_1/c_0$ ,  $y_{s+1}$  ha il segno di  $(-1)^{s+1}$ .

Si ha poi per 2, c), 1

$$(14) \quad y_{s+k}(t) = A_{k-1}(t) (t - c_0/c_1)^{s+1}$$

con  $A_{k-1}(t)$  polinomio di grado  $k-1$  in  $t$ , e derivando  $s+1$  volte

$$y_{s+k}^{(s+1)} = (s+1)! A_{k-1} + (t - c_0/c_1) B_{k-2}$$

con  $B_{k-2}$  polinomio di grado  $k-2$  in  $t$ ; si ha da qui  $y_{s+k}^{(s+1)}(c_1/c_0) = (s+1)! A_{k-1}(c_1/c_0)$  e per la (13)  $A_{k-1}(c_1/c_0) > 0$ , si avrà quindi  $A_{k-1}(t) > 0$  in un intorno di  $c_1/c_0$  e la (14) prova allora la nostra proprietà.

In una prossima Nota daremo la dimostrazione del teorema A 3 e dei teoremi B e C.

**Matematica.** — *Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1 x + a_0) y'' + (b_1 x + b_0) y' - nb_1 y = 0$ .* Nota II di G. SANSONE, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sur le calcul des variations.* Nota di N. SAKELLARIOU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Considerazioni sugli impulsi nei corpi elastici isotropi.* Nota di F. CONFORTO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È noto che, quando in un sistema qualsiasi si esercitano delle azioni aventi carattere impulsivo, avvengono cioè in un determinato istante degli urti, intervengono delle brusche variazioni delle velocità dei punti, che compongono il sistema stesso. È altresì noto che le equazioni, dalle quali si debbono calcolare tali brusche variazioni, si ottengono normalmente dalle equazioni della dinamica del sistema integrandole fra l'istante  $t_0$ , nel quale agiscono le azioni impulsive, ed un istante successivo  $t_0 + \tau$ , e facendo poi tendere  $\tau$  a zero. Così operando, il termine che rappresenta l'accelerazione dà origine alla differenza di velocità dopo e prima dell'urto, i termini corrispondenti alle sollecitazioni danno origine ai corrispondenti impulsi.

Il procedimento ora ricordato riesce pienamente nel caso delle equazioni della dinamica dei sistemi di punti materiali, (sia nel caso delle equazioni di Newton, come nel caso delle equazioni di Lagrange) e per le equazioni dell'idrodinamica dei fluidi incompressibili<sup>(2)</sup>.

Se però si tentasse di applicare il procedimento di integrazione alle equazioni della dinamica dei corpi elastici isotropi, non si otterrebbe un

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(2) LAMB, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, Teubner, 1907, p. 13.

risultato soddisfacente. Infatti le equazioni della dinamica dei corpi elastici isotropi sono:

$$(1) \quad X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 u = 0 \quad \text{ecc.}$$

con il significato dei simboli usuale nella teoria della elasticità <sup>(1)</sup>.

Se ora si applica il procedimento indicato a tali equazioni, i primi due termini ci danno senz'altro gli impulsi delle forze di massa e la brusca variazione delle componenti della velocità. Per gli ultimi due termini, però, non si saprebbe come eseguire la integrazione, perchè apparirebbero come funzioni integrande delle derivate, rispetto a coordinate spaziali, degli spostamenti.

Si potrebbe, sorvolando sulla questione di rigore, invertire l'operazione di integrazione con le operazioni di derivazione; si vedrebbe però allora che i due ultimi termini non portano nessun contributo perchè gli spostamenti si mantengono sempre continui. Si vede dunque che in questo caso il procedimento indicato conduce a delle difficoltà.

Cercando ora di cogliere le ragioni concettuali di tali difficoltà, tali ragioni potrebbero trovarsi nell'osservazione seguente: le equazioni, alle quali si mira attraverso al procedimento dell'integrazione e col far tendere successivamente  $\tau$  e a zero, dovrebbero essere atte a determinare la discontinuità subita dalla velocità, nell'istante dell'urto, di tutti i punti del corpo elastico. Si ammette dunque implicitamente che la velocità di ogni punto riceva, nell'istante dell'urto, una brusca variazione. La discontinuità della velocità, quindi, per così dire, si propagherebbe con una velocità infinita, giacchè, contemporaneamente, tutti i punti del solido subiscono una brusca variazione di velocità. Con la teoria delle caratteristiche, però, è stato dimostrato <sup>(2)</sup> che è compatibile con le equazioni (1) una propagazione di discontinuità nella velocità con velocità finita. Si capisce come questo fatto sia inconciliabile con l'ufficio, che dovrebbero avere le equazioni (1), nel problema di determinare le equazioni, dalle quali dipende la propagazione con velocità infinita. In altre parole, per determinare tali equazioni non si può partire dalle (1), perchè, mentre le (1) consentono una propagazione di discontinuità con velocità finita, le equazioni che si dovrebbero ottenere da queste esprimerebbero una propagazione istantanea.

Corrispondentemente, dal punto di vista analitico, partendo dalle (1), si incontrano le difficoltà alle quali abbiamo più sopra accennato. Con l'osservazione precedente, però, tali difficoltà rimangono previste e spiegate, almeno dal punto di vista concettuale.

(1) MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Hoepli, 1904, p. 154.

(2) Cfr. le Note del dott. LAMPARIELLO nei vol. XIII e XIV (1931) di questi «Rendiconti»; in particolare *Onde di discontinuità nei mezzi elastici più generali*, pp. 338-340 del vol. XIV.

Ammettendo però, e questo sarà sempre possibile a titolo di approssimazione, che nel corpo elastico l'applicazione di azioni impulsive generi, nell'istante dell'urto, una variazione brusca delle velocità di tutti i punti, si potrà sempre porre il problema della determinazione di tale discontinuità, solamente che, come si è detto, non si potrà partire dalle (1). In questa Nota io ho ottenuto le equazioni, che determinano la discontinuità, per una via indipendente dalle (1), e facendo capo ai principii generali che corrispondono, nel caso di azioni impulsive, alle equazioni cardinali della dinamica. Ho avuto cura di procedere quanto più innanzi possibile senza l'introduzione di ipotesi estranee. Delle equazioni che ho ottenuto spero di far conoscere, in altri lavori, delle applicazioni.

2. Consideriamo dunque un corpo elastico isotropo; per stabilire le equazioni differenziali a derivate parziali, dalle quali dipende la determinazione delle discontinuità nelle velocità, applicheremo i due principii fondamentali espressi dalle due relazioni (1):

$$(2) \quad \Delta Q = R \quad , \quad \Delta M^q = M$$

applicabili ad un generico sistema meccanico, nelle quali  $\Delta Q$  rappresenta la variazione subita dal vettore quantità di moto in conseguenza dell'azione impulsiva, e  $\Delta M^q$  ha l'analogo significato per il momento della quantità di moto, mentre  $R$  ed  $M$  sono la risultante ed il momento, rispetto ad un generico punto fisso, degli impulsi di origine esterna, derivanti dall'azione impulsiva.

Noi ammetteremo come dato un campo di impulsi caratterizzato da tre funzioni

$$X \quad , \quad Y \quad , \quad Z$$

dei punti dello spazio. Si tratterà di impulsi unitari, di modo che le componenti dell'impulso agente sopra l'elemento  $d\tau$ , chiamando con  $\rho$  la densità del corpo, saranno:  $\rho X d\tau$ ,  $\rho Y d\tau$ ,  $\rho Z d\tau$ . Come conseguenza dell'applicazione di tale campo di impulsi si formeranno nel corpo degli sforzi, che avranno pure carattere impulsivo. Denotiamo con:

$$X_x \quad , \quad Y_x \quad , \quad Z_x$$

le componenti secondo gli assi coordinati dell'impulso unitario che si esercita sopra una faccetta perpendicolare alla direzione  $x$ . Aquisteranno significato allora anche i simboli:

$$\begin{aligned} X_y \quad , \quad Y_y \quad , \quad Z_y \\ X_z \quad , \quad Y_z \quad , \quad Z_z . \end{aligned}$$

(1) T. LEVI-CIVITA ed U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II, parte II. Zanichelli, 1927, pp. 578 e 586.



Con

$$X_n \quad , \quad Y_n \quad , \quad Z_n$$

si denoteranno le componenti dell'impulso unitario agente sopra una faccetta perpendicolare alla direzione di coseni direttori:

$$\cos nx \quad , \quad \cos ny \quad , \quad \cos n\zeta.$$

Molto facilmente si dimostrano, per queste componenti di impulso unitario, delle relazioni perfettamente analoghe alle relazioni che valgono fra le componenti degli sforzi unitari, nel caso non impulsivo. A base di tale dimostrazione si deve prendere la prima delle (2); così si dimostra che si ha:

$$X_n = -X_{-n} \quad , \quad Y_n = -Y_{-n} \quad , \quad Z_n = -Z_{-n}$$

con ovvio significato dei simboli. Si ha anche:

$$(3) \quad \begin{cases} X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_\zeta \cos n\zeta \\ Y_n = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_\zeta \cos n\zeta \\ Z_n = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_\zeta \cos n\zeta. \end{cases}$$

Ciò posto, passiamo senz'altro alla deduzione delle equazioni fondamentali a partire dalle (2); indichiamo con  $u, v, w$  le componenti del vettore differenza fra la velocità dopo e prima dell'urto. Se allora  $S$  è uno spazio tutto contenuto nel corpo elastico e  $\sigma$  è la superficie chiusa che lo racchiude, applicando a tale spazio la prima delle (2), tenuto conto delle (3), si avrà:

$$\int_S \rho u dS = \int_\sigma (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_\zeta \cos n\zeta) d\sigma + \int_S \rho X dS, \text{ ecc.}$$

Da questa, applicando il lemma di Green e tenendo conto dell'arbitrarietà di  $S$ , si ricavano immediatamente le equazioni:

$$(4) \quad \begin{cases} \rho u + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_\zeta}{\partial \zeta} - \rho X = 0 \\ \rho v + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_\zeta}{\partial \zeta} - \rho Y = 0 \\ \rho w + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_\zeta}{\partial \zeta} - \rho Z = 0. \end{cases}$$

La seconda delle (2), poi, aggiunta alle (4), ci dà nel modo solito le relazioni:

$$X_y = Y_x \quad , \quad X_\zeta = Z_x \quad , \quad Y_\zeta = Z_y.$$

Le (4) sono le equazioni fondamentali ricercate. In queste tutte le quantità  $X_x \dots$  in numero di sei, appaiono come incognite. Si può però ulteriormente precisare la questione.

3. Indicando con  $\delta u, \delta v, \delta w$  una variazione virtuale delle quantità  $u, v, w$  e con  $\delta L$  il lavoro virtuale compiuto dalle forze interne allo spazio  $S$ , scrivendo quell'espressione che si deve considerare, nel caso di sollecitazioni impulsive, come il corrispondente del principio di D'Alembert <sup>(1)</sup> otterremo:

$$\int_S \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dS + \int_{\sigma} (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) d\sigma + \int_S \delta L dS - \\ - \int_S \rho (u \delta u + v \delta v + w \delta w) dS = 0.$$

Da questa relazione, applicando il lemma di Green, tenuto conto delle equazioni (4) e dell'arbitrarietà di  $S$ , viene:

$$(5) \quad -\delta S = X_x \delta a + Y_y \delta b + Z_z \delta c + Y_z \delta f + Z_x \delta g + X_y \delta h$$

dove:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a = \frac{\partial u}{\partial x} & , & b = \frac{\partial v}{\partial y} & , & c = \frac{\partial w}{\partial z} \\ f = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & , & g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & , & h = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} . \end{array} \right.$$

Se ora, come è nella natura della questione, noi supponiamo che il nostro sistema sia un sistema conservativo, dalla espressione (5) si deduce, con ragionamento analogo a quello che porta, nel caso non impulsivo della teoria dell'elasticità, alla introduzione del potenziale di elasticità, che esiste un'unica funzione  $\Pi$  delle quantità (6) tale che si abbia:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{lll} X_x = \frac{\partial \Pi}{\partial a} & , & Y_y = \frac{\partial \Pi}{\partial b} & , & Z_z = \frac{\partial \Pi}{\partial c} \\ Y_z = \frac{\partial \Pi}{\partial f} & , & Z_x = \frac{\partial \Pi}{\partial g} & , & X_y = \frac{\partial \Pi}{\partial h} . \end{array} \right.$$

Avviene dunque che le quantità  $X_x \dots$  si devono considerare come funzioni delle quantità (6). Le (7), sostituite nelle (4), danno un sistema di equazioni a derivate parziali per  $u, v, w$ .

(1) ROBIN, *Oeuvres scientifiques*, vol II; *Percussions et explosions dans les liquides*, pp. 96-122, Gauthier-Villars, 1899.

4. Riguardo alla funzione  $\Pi$  essa, soltanto a titolo di esempio e di approssimazione, si potrà ritenere quadratica nelle quantità (6). Infatti non sussiste qui la circostanza che  $u, v, w$  debbano considerarsi come quantità piccolissime; comunque, però, ammessa una volta tale forma, il fatto che il corpo sia isotropo lega i coefficienti tal quale come succede, nella teoria della elasticità, nel legame tra sforzi e componenti di deformazione. Talchè, ancora qui sussisteranno le formule:

$$(8) \left\{ \begin{array}{lll} -X_x = \lambda \theta + 2\mu a & , & -Y_y = \lambda \theta + 2\mu b & , & -Z_z = \lambda \theta + 2\mu c \\ -Y_z = \mu f & , & -Z_x = \mu g & , & -X_y = \mu h. \end{array} \right.$$

Nelle (8) con  $\theta$  si è indicata la quantità  $a + b + c$ ;  $\lambda$  e  $\mu$  sono due costanti, ma non si può asserire che esse siano le stesse delle costanti  $\lambda$  e  $\mu$  che legano gli sforzi alle componenti di deformazione, nel caso non impulsivo. Questo si potrà tuttavia ammettere come ipotesi abbastanza naturale.

Le (8), sostituite nelle (4), danno origine a un sistema di equazioni a derivate parziali, dalle quali si dovrà ricavare  $u, v, w$ . Le (4) valgono in tutto lo spazio occupato dal corpo elastico.

**Meccanica.** — *Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare.* Nota di N. MOISSEIEV, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

#### INTRODUZIONE.

Ci proponiamo nel presente articolo di esporre la deduzione della legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare, basandoci sugli stessi schemi che furono già posti a fondamento di talune sezioni di un nostro precedente lavoro <sup>(2)</sup>.

Questioni relative alla teoria del moto in un mezzo resistente cominciano nuovamente a suscitare interesse fra gli studiosi che lavorano nel campo della cosmogonia ed in campi affini. Indichiamo ad esempio la serie dei lavori pubblicati dal prof. T. Levi-Civita <sup>(3)</sup>, i quali mirano tanto a dedurre la legge razionale di resistenza al moto, quanto a stabilire le

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(2) N. MOISSEIEV, *Ueber einige Grundfragen der Theorie des Ursprungs der Kometen, Meteore und des kosmischen Staubes*, I, II, III. Teil, « Publications de l'Institut Astrophysique », vol. V, fasc. 1.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Corpuscoli cosmici e distribuzione Maxwelliana*, « Atti Acc. Pontificia », Anno LXXXIII (1930), pp. 176-189; *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile*, questi « Rendiconti », vol. XI, 1930, pp. 626-632; ecc.

equazioni differenziali del moto stesso, ed altresì la serie di studi di G. N. Duboscin (Russ. Astronomical Journal), dedicati principalmente all'analisi generale delle forme e delle proprietà del moto di un punto in un mezzo resistente ed in campi di forze centrali.

Il problema stesso può essere trattato da due punti di vista diversi: come problema di resistenza di un fluido compressibile o no al moto in seno di esso, oppure come problema di resistenza al moto di un mezzo composto di punti discreti, di molecole, l'azione reciproca delle quali ha importanza e va presa in considerazione solamente per definire la struttura del mezzo nel suo insieme, mentre nell'interrelazione loro col corpo che subisce resistenza al suo moto, dette particelle reagiscono su di esso in modo affatto indipendente l'una dall'altra.

La prima questione, che rappresenta in sostanza un problema di idrod aerodinamica, può presentare interesse per l'astronomia solamente in relazione al moto in mezzi di densità sufficientemente grande, come per es. il passaggio di una meteora attraverso l'atmosfera di un pianeta ecc.

Il secondo problema per altro presenta per la cosmogonia un interesse considerevolmente maggiore, avendo esso da fare con mezzi molto rarefatti. Ed è per l'appunto questo secondo aspetto del problema che prendiamo di mira nel presente lavoro.

### § 1. - *Espressioni generali per la resistenza nel caso di flusso semplice.*

Rappresentiamoci un corpo sferico  $S$ , di raggio  $D$  intorno al cui centro è descritta una sfera di raggio  $\rho$ , che divide il campo — in cui si può trascurare l'attrazione di questo corpo  $S$  — dal campo, interno per rapporto a questa « sfera d'azione », — in cui il moto di un punto isolato viene retto unicamente dall'attrazione del corpo  $S$ . Rappresentiamo con  $x_0$  il quoziente  $\frac{D}{\rho}$ .

Ammettiamo poi che lo spazio esterno alla sfera d'azione sia, con densità uguale, riempito di particelle materiali tanto piccole per dimensioni e per massa che si possa non tener conto della loro azione reciproca. Sia  $n$  il numero di particelle per unità di volume e  $\mu$  la massa di una particella isolata. Supponiamo, che tutte le particelle abbiano masse eguali.

Supponiamo poi che il corpo  $S$  si muova rispetto al « centro di moto » <sup>(1)</sup> del complesso di particelle con una velocità  $r$ . Esaminiamo, nel paragrafo presente, il caso in cui le particelle non abbiano velocità proprie per rapporto al loro « centro di moto ». Questo caso per l'appunto noi chiameremo caso di flusso semplice. Chiameremo *asse del flusso* la direzione della velocità del corpo per rapporto allo sciame di particelle.

(1) Vedi *Ueber einige Grundfragen ecc.*, I. Teil, § 1.

La resistenza che le particelle offriranno al moto del corpo S conterà di due contributi diversi:

1. Resistenza delle particelle che passano attraverso la sfera d'azione senza urtare il corpo S;

2. Resistenza di particelle urtanti il corpo. L'urto si considererà come assolutamente anelastico.

Applichiamoci a dedurre la formola che corrisponde alle particelle della prima specie.

Indichiamo, come si usa<sup>(1)</sup>, con  $\alpha$  l'angolo fra la velocità di una particella e il raggio vettore nel momento d'entrata nella sfera d'azione; esso sarà anche eguale all'angolo del raggio vettore del punto d'entrata coll'asse del flusso. Siano poi  $R$  e  $N$  le coordinate polari, per le quali l'asse del flusso serve di asse polare, e finalmente  $N(\rho)$  — l'angolo  $N$  corrispondente al punto d'uscita dalla sfera d'azione.

Allora, la proiezione della velocità d'entrata sull'asse del flusso sarà:

$$-r,$$

e la proiezione della velocità d'uscita dello stesso punto:

$$r \cos (N(\rho) + \alpha).$$

Perciò l'aumento di quantità di moto per il corpo S in direzione dell'asse del flusso in conseguenza dell'incontro con una particella sarà eguale a:

$$(1) \quad -\mu r \cos^2 \frac{1}{2} (N(\rho) + \alpha).$$

D'altra parte l'equazione della traiettoria di una particella entro la sfera d'azione può essere assunta sotto la forma:

$$(2) \quad r^2 \rho \sin^2 \alpha + \frac{R}{\rho} (1 - r^2 \rho) \sin \alpha \sin N + \frac{R}{\rho} \cos \alpha \cos N - \frac{R}{\rho} = 0,$$

donde ricaviamo:

$$(3) \quad \frac{1}{2} [N(\rho) + \alpha] = \arctg [(1 - r^2 \rho) \operatorname{tg} \alpha].$$

Così l'espressione (1) si trascrive nel modo seguente:

$$(1.1) \quad -2\mu r \cdot \frac{1}{1 + (1 - r^2 \rho)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

(1) V. loc. cit.



Perciò il completo aumento di quantità di moto del corpo in direzione dell'asse del flusso nell'intervallo di tempo  $\delta t$  provocato dall'incontro con particelle che non vengano ad urtare il corpo stesso sarà:

$$(4) \quad M \delta \tau = - \mu n 4 \pi \rho^2 r^2 \delta t \int_{\alpha = \alpha(D)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{1 + (1 - r^2 \rho)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

dove  $\alpha(D)$ , rappresenta il valore limite di  $\alpha$ , che corrisponde al caso in cui la particella viene a contatto col corpo S, cioè:

$$\alpha(D) = \arcsin \sqrt{\frac{D^2}{\rho^2} + \frac{2D}{\rho^2} \left(1 - \frac{D}{\rho}\right) \frac{1}{r^2}},$$

e M la massa del corpo S.

E così, finalmente, per la reazione cercata abbiamo l'espressione

$$(5) \quad \mathfrak{R}_1 = M \cdot \left( \frac{dr}{dt} \right)_1 = \frac{\mu n 2 \pi \rho}{(2 - r^2 \rho)} \left[ \frac{(1 - r^2 \rho)^2}{r^2 \rho (r^2 \rho - 2)} \ln \frac{(1 - r^2 \rho)^2}{1 + r^2 \rho (r^2 \rho - 2) \sin^2 \alpha(D)} - 1 + \sin^2 \alpha(D) \right]$$

Occupiamoci ora della deduzione della seconda parte della reazione, dovuta all'urto con le particelle per le quali

$$\alpha < \alpha(D).$$

È facile vedere che se  $\omega_R$  è l'angolo del raggio vettore con la velocità, alla distanza R, e  $r_R$  la velocità alla stessa distanza, la componente della quantità di moto di una particella urtante il corpo S nel punto (N, D) lungo l'asse del flusso sarà:

$$(6) \quad - \mu r_D \cos(N - \omega_D).$$

Approfittando dell'equazione della traiettoria e della legge delle aree otteniamo:

$$(6.1) \quad \cos(N - \omega_D) = \frac{\sqrt{x^2(r^2 \rho - 2) + 2x - r^2 \rho \sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha - \sqrt{r^2 \rho(1 - r^2 \rho)} [x(r^2 \rho - 2) + 1] \sin^2 \alpha}{[1 + r^2 \rho(r^2 \rho - 2) \sin^2 \alpha] \sqrt{x^2(r^2 \rho - 2) + 2x}}.$$

Per trovare l'espressione spettante alla variazione di velocità del corpo S nel piccolo intervallo di tempo  $\delta t$ , in conseguenza dell'urto colle particelle del nostro sciame, possiamo procedere nel modo seguente:

Immaginiamoci un certo corpo  $P^*$ , la cui massa  $\mu^*$  sia eguale alla somma delle masse di tutte le particelle, che verranno ad urtarsi col corpo S durante l'intervallo di tempo  $\delta t$ , mentre la componente della quantità di

moto rispetto al corpo S sia eguale alla somma delle componenti delle quantità di moto delle particelle medesime, cioè alla somma delle quantità (6). Essendo  $\delta t$  abbastanza piccolo, l'effetto dell'urto con questo corpo fittizio  $P^*$  e l'effetto dell'urto con lo sciame delle particelle coincideranno fra loro. Così, l'aumento di velocità del corpo S si esprimerà con la formola seguente, derivante dalle legge di urto di corpi assolutamente anelastici:

$$(7) \quad \delta r = \frac{(\mu r)^*}{M + \mu^*}$$

dove  $M$  e  $\mu^*$  sono rispettivamente le masse dei corpi S e  $P^*$  e  $(\mu r)^*$  la componente delle quantità di moto del corpo  $P^*$  rispetto a S. La formola (7) rimane naturalmente valida indipendentemente dalle velocità assolute dei corpi in questione, poichè in essa intervengono solo velocità relative.

Abbiamo poi:

$$(8) \quad (\mu r)^* = - \mu n 2 \pi \rho^2 \int_{\alpha=0}^{\alpha(D)} r r_D \cos(N - \omega_D) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \cdot \delta t$$

e

$$(9) \quad \mu^* = \mu n 2 \pi \rho^2 \int_{\alpha=0}^{\alpha(D)} r \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \cdot \delta t.$$

Perciò la reazione cercata sarà in questo caso semplicemente eguale a:

$$(10) \quad \Re_2 = M \cdot \left( \frac{dr}{dt} \right)_2 = - \mu n 2 \pi \rho^2 r r_D \int_{\alpha=0}^{\alpha(D)} \cos(N - \omega_D) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

dove a  $\cos(N - \omega_D)$  va sostituita la sua espressione (6.1).

Per  $r_D$  abbiamo la formola seguente:

$$(6.2) \quad r_D = \frac{1}{\sqrt{\rho x}} \cdot \sqrt{2 - x + r^2 \rho x}.$$

Riassumendo ciò che precede, perveniamo alla conclusione che la forza di resistenza offerta dal nostro mezzo al moto del corpo S sarà rappresentata dalla formola:

$$(11) \quad \Re = \Re_1 + \Re_2.$$

Quest'espressione — particolarmente per il secondo addendo — riesce abbastanza complicata. Non staremo perciò a trascrivere le espressioni complete per il caso generale, ma ci limiteremo all'analisi della legge trovata nelle sue caratteristiche essenziali. E per questo esamineremo in una prossima Nota i casi particolari più importanti.

**Geodesia.** — *Treni d'onde emessi ad intervalli di tempo costanti* <sup>(1)</sup>. Nota di G. PETRUCCI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. M. LA ROSA.

In un Nota precedente <sup>(3)</sup> è stato descritto un particolare circuito ad onde corte emittente treni d'onda discontinui. In questa Nota viene studiata sistematicamente l'influenza che sul fenomeno esercita, sia la corrente di accensione e la tensione come pure i diversi elementi del circuito e ciò allo scopo di vederne la *possibilità d'impiego per l'emissione dei segnali radio ad intervalli di TEMPO COSTANTI*. Lo schema di circuito che qui riporto è lo stesso di quello descritto nella Nota precedente <sup>(3)</sup>.

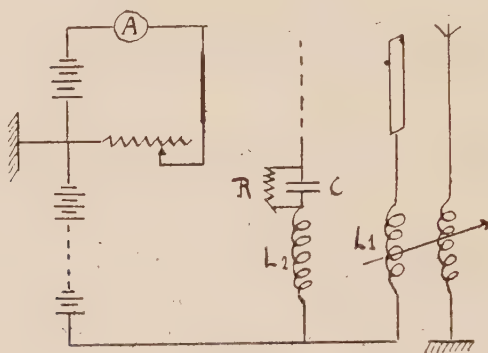


Fig. 1.

Ho fatto, per prima cosa, variare la corrente di accensione del filamento mentre rimanevano costanti la capacità  $C$  le autoinduzioni,  $L_1$ ,  $L_2$  ( $L_1 = 4.5$  microhenrys,  $L_2 = 5$  microhenrys) e la tensione anodica (215 volta). I risultati sono riprodotti nei seguenti diagrammi ottenuti per due valori diversi della capacità, ( $0.01 \mu F$ ,  $0.002 \mu F$ ).

Sull'asse delle ascisse ho riportato i valori della corrente in milliamper e sull'asse delle ordinate gli intervalli di tempo tra l'emissione di un treno d'onda, e il successivo (periodo di silenzio  $T_s$ ).

Come ben si vede l'andamento di questi intervalli in funzione della corrente di accensione del filamento richiama in modo evidente quello delle curve del Langmuir ciò che sta a denotare che la carica spaziale interviene

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Fisico della Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 17 gennaio 1932.

(3) M. LA ROSA e G. PETRUCCI, «Rendiconti R. Acc. Naz. Lincei», XII, serie 6<sup>a</sup>, fasc. 5-6, 1930, p. 199.

nel fenomeno. Notevoli sono i tratti rettilinei paralleli all'asse delle ascisse nei quali si mantiene costante il tempo  $T_s$ .

Studiando l'influenza della tensione anodica sul periodo nelle condizioni seguenti:  $I = 0.750$  A,  $L_1 = 12$  microhenrys,  $L_2 = 10$  microhenrys,  $C = 0.001 \mu F$  è stato trovato che essa è piccolissima; è stato infatti osservata una diminuzione di soli 0.64 nel passare da 40 a 60 volta mentre nel passare da 60 a 120 il  $T_s$  è rimasto costante. Il diagramma annesso dove sull'asse delle ascisse sono riportate le tensioni e sull'asse delle ordi-

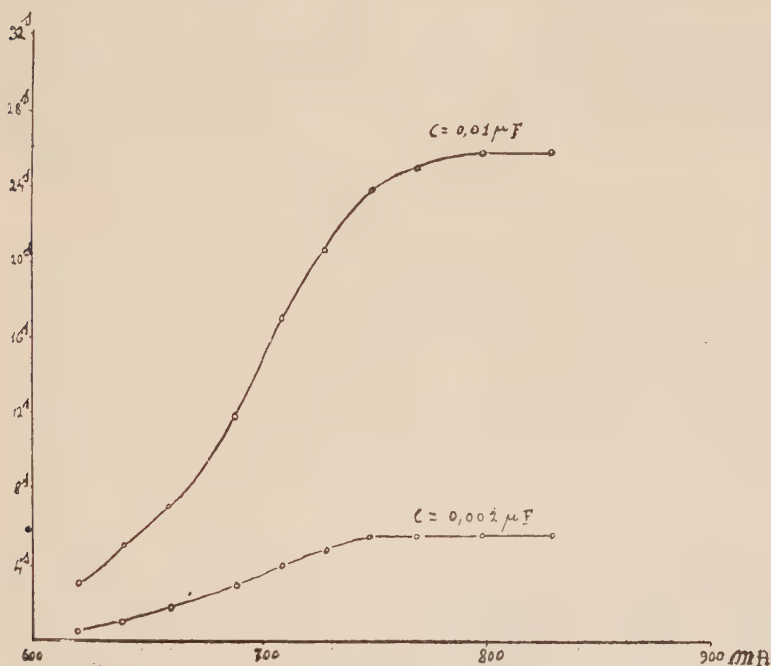


Fig. 2.

nate il numero dei treni d'onda emessi in 1 minuto primo dimostra quanto sopra.

Altre esperienze hanno mostrato sempre una piccola influenza della tensione nel detto periodo.

L'andamento in funzione della capacità del ramo di griglia è dato dai diagrammi seguenti ricavati per 2 valori diversi della corrente di accensione e precisamente  $I_1 = 0.750$  A,  $I_2 = 0.620$  A e per  $V = 215$  volta,  $L_1 = 12$  microhenrys,  $L_2 = 6.8$  microhenrys.

Da cui si deduce che l'intervallo di silenzio  $T_s$  dipende linearmente dalla capacità del ramo di griglia.

Per conoscere l'influenza della induttanza  $L_1$  ed  $L_2$  sul detto intervallo ho rilevato i diagrammi seguenti per gli stessi valori della tensione (215

volta) e della capacità  $0.002 \mu F$ . Quello segnato con (1) è stato ottenuto dando a  $L_1$  il valore costante di 2.7 microhenrys e facendo variare la  $L_2$ ; l'altro diagramma segnato (2) è stato ottenuto con  $L_2 = 6.7$  microhenrys e facendo variare  $L_1$ .

Da questi diagrammi si nota che il periodo di silenzio presenta un massimo col variare di una delle due induzioni e che detto massimo si ha per  $L_2 = L_1$ .

Anche la resistenza  $R$  ha una funzione importantissima nel fenomeno. Nelle esperienze descritte si è fatta variare da 2 a  $10 M\Omega$ .

Il suo valore risulta legato al valore della capacità e della corrente di accensione del filamento nel senso che per valori dati di  $C$  e di  $I$  si nota un valore minimo di  $R$  al disotto del quale la emissione diviene continua.

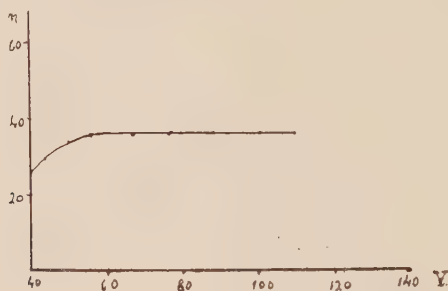


Fig. 3.

È superfluo rilevare che va tenuto conto della resistenza interna del condensatore essendo essa in parallelo con la  $R$ .

Riassumendo, gli elementi che possono influire sulla variazione dell'intervallo sono: la corrente di accensione, la tensione anodica, la capacità  $C$ , le autoinduzioni  $L_1$ ,  $L_2$  e la resistenza  $R$ . Volendo dunque impiegare il dispositivo per la emissione dei segnali di tempo ad intervalli costanti occorrerebbe assicurare la costanza della tensione e della corrente di accensione in modo da garantire la precisione richiesta nel valore di  $T_s$  (per esempio  $1^s/1000$ ) poichè resistenza, autoinduzioni e capacità se ben costruite, con materiale adatto, vanno soggetti alle variazioni dovute alla temperatura, ossia del genere di quelle che si fanno sentire in tutti i sistemi comunemente usati.

Requisito essenziale del condensatore è quello che esso abbia una resistenza interna praticamente costante per evitare che essa possa intervenire in modo variabile e disturbare la regolarità del fenomeno. E si sa che un buon condensatore in mica può rispondere a questi requisiti. In quanto alle autoinduzioni scegliendole di valore conveniente e presso a poco uguali ci metteremo nella condizione di massimo (vedi fig. 5), in modo da ridurre



al minimo l'influenza delle variazioni accidentali che una di esse potrebbe subire.

In quanto alla corrente di accensione i diagrammi della fig. 2 mostrano che se si fa lavorare il circuito con corrente elevata (tratto rettilineo) il periodo di silenzio risulta *indipendente dalle variazioni di essa*.

Le considerazioni precedenti fanno prevedere che con una accurata disposizione del circuito si potrà ottenere una grande costanza nel periodo

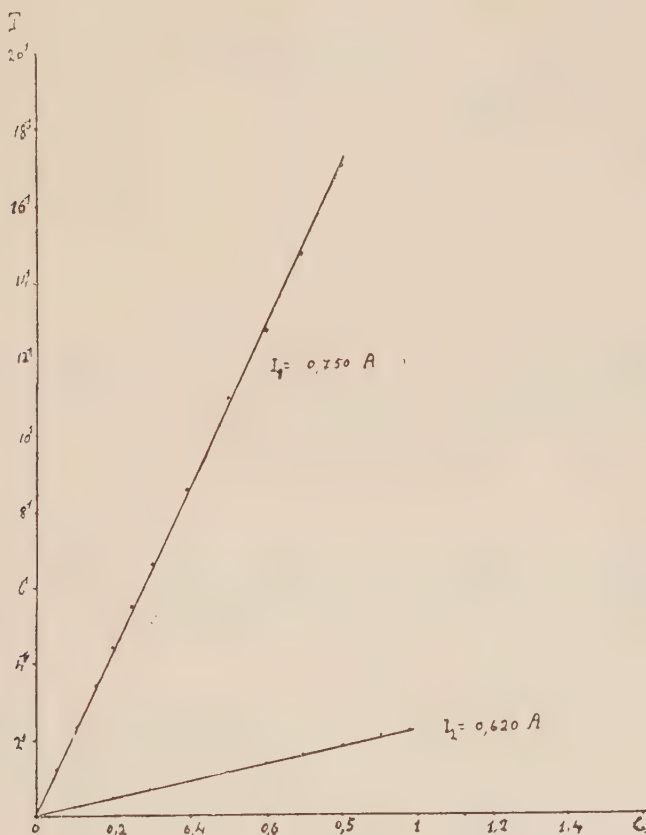


Fig. 4.

$T_s$ , specialmente per il fatto che detto periodo può rendersi indipendente dalla corrente di accensione facilmente variabile, e che la tensione anodica pochissimo influisce e facilmente potrà tenersi costante.

Alcune misure preliminari atte a studiare la detta costanza degli intervalli  $T_s$  danno molto a sperare sulla precisione che col detto dispositivo si potrà raggiungere. Pertanto sono in corso delle nuove misure con i metodi precisi usuali delle quali presto riferiremo.

Un'altra utile applicazione può avere il detto circuito, infatti la proporzionalità riscontrata tra l'intervallo di silenzio e la capacità (V. diagramma

della fig. 4) suggerisce l'idea di sfruttare il circuito per il confronto di capacità come è stato fatto pel circuito a due valvole dal dr. Sesta<sup>(1)</sup>. Nel nostro caso, però, se si ha il vantaggio di adoperare un circuito più sem-

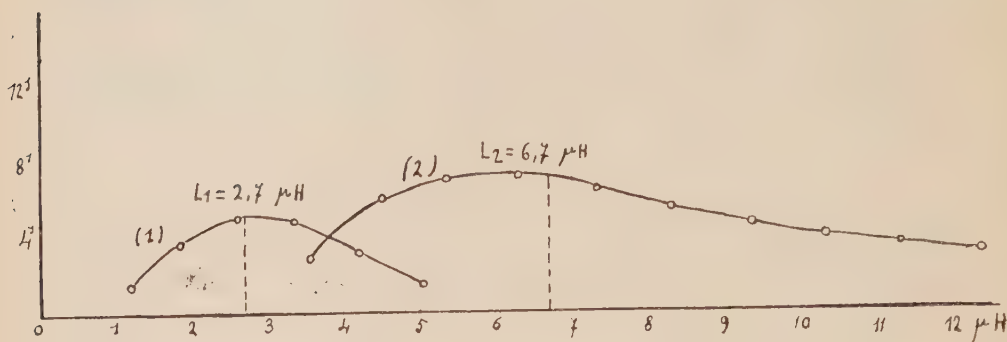


Fig. 5.

plice occorre d'altra parte impiegare un ricevitore adatto per potere contare i segnali emessi. Sono però in corso delle esperienze per adattare il dispositivo per le frequenze acustiche e quindi potere adoperare il telefono od una cuffia per l'apprezzamento dei detti segnali.

**Fisica.** — *Verifica sperimentale dell'assorbimento selettivo delle onde Hertziane provocato da un gas elettronico in campo magnetico*<sup>(2)</sup>.  
Nota di G. TODESCO, presentata<sup>(3)</sup> dal Socio Q. MAJORANA.

1. È noto che la presenza di un campo magnetico in un gas jonizzato (un gas elettronico, in particolare) dà luogo ad una specie di frequenza di risonanza per questo mezzo. Tale frequenza si calcola facilmente nel caso di elettroni liberi di carica  $e$ , animati da velocità  $\vec{v}$  e sottoposti ad un campo magnetico di intensità  $\vec{H}$ . L'elettrone è soggetto in tal caso ad una forza ponderomotrice  $e (\vec{v} \wedge \vec{H})$  che si esercita normalmente al piano  $\vec{v}, \vec{H}$ . Se la velocità è normale al campo, la carica  $e$ , di massa  $m$ , descrive un'orbita circolare il cui raggio  $r$  si ottiene eguagliando la forza centrifuga  $\frac{mv^2}{r}$  alla forza ponderomotrice  $e \cdot v \cdot H$ .

(1) « Nuovo Cimento », VIII, n. 3 (1931); « Boll. Rad. R. Esercito », n. 3 e 4 (1931)

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Bologna.

(3) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

La frequenza del moto sull'orbita è unicamente funzione del campo secondo la semplice relazione:

$$(1) \quad n = \frac{He}{2\pi m}$$

e risulta indipendente dalla velocità  $\vec{v}$  che influisce solo sulla grandezza del raggio dell'orbita percorsa dall'elettrone.

Sino dal 1925, Appleton <sup>(1)</sup> ha segnalato la probabile influenza del campo magnetico terrestre sulla propagazione delle onde elettromagnetiche attorno al globo, che si effettua notoriamente, almeno in parte, in un mezzo ionizzato. Se si suppone che tale mezzo sia principalmente costituito da elettroni liberi ( $\frac{e}{m} = 1,77 \cdot 10^7$  u. e. m.) e si applica la (1) al campo terrestre ( $H = 0,5$  gauss), si ottiene per  $n$  il valore

$$n = \frac{1,77 \cdot 10^7 \times 0,5}{6,28} = 1,4 \cdot 10^6$$

cui corrisponde una lunghezza d'onda di 214 m. Se ne deduce che se un'onda di questa lunghezza si propaga nella ionosfera, essa aumenterà l'energia degli elettroni in movimento e si verificheranno probabilmente delle anomalie nella propagazione. Ora il Taylor <sup>(2)</sup>, rappresentando graficamente le portate sicure ottenute in T. S. F. da un certo numero di stazioni emittenti, per una potenza di emissione di 5 Kw., in funzione della lunghezza d'onda, ha ottenuto delle curve che mostrano l'esistenza di un minimo abbastanza marcato nelle vicinanze di  $\lambda = 200$  m. Le anomalie in questione si tradurrebbero quindi in un affievolimento dell'onda in arrivo.

Non è possibile tuttavia accordare a questo risultato un valore nettamente probativo a favore delle note *teorie dell'assorbimento e rifrazione ionica* <sup>(3)</sup> sulla propagazione delle onde elettromagnetiche attorno alla terra. Da un lato infatti tali teorie portano a risultati che sembrano talvolta nettamente contraddetti dall'esperienza, specialmente in ciò che concerne una eventuale rotazione del piano di polarizzazione dell'onda incidente che dovrebbe accompagnare il constatato assorbimento <sup>(4)</sup>; d'altro canto le stesse

(1) E. V. APPLETON, «Proc. Phys. Soc.», London, t. 37, pp. 160-230, 1925.

(2) A. H. TAYLOR, «Proc. Inst. Radio Eng.», t. 13, pp. 677-685, 1925.

(3) H. W. NICHOLS e J. C. SCHELLENG, «Bell Syst. Techn. Journ.», t. 4, p. 215-1925; L. SCHEKULIN, «Zeitsch. f. Hochfr. Techn.», t. 36, p. 172, 1930.

(4) Per un esame più dettagliato della questione vedasi il lavoro di R. MESNY, «Onde Elettr.», t. V, p. 434, 1926, dal quale si rileva che se un certo numero di osservatori (fra cui Anderson, Bailey, Espechied, Hulburt, Smith-Rose) hanno creduto di constatare una influenza del campo magnetico terrestre sulla propagazione delle onde, le osservazioni di altri sperimentatori (fra cui Pickard, Gherzi, Mesny ed Eckersley) hanno fornito risultati nettamente contrari a tale ipotesi.

misure di intensità di recezione sulle quali sarebbe basata la constatazione del minimo relativo all'onda di 214 m. sono grandemente falsate dall'intervento di numerosi fenomeni perturbatori dovuti principalmente all'influenza delle condizioni meteorologiche che agiscono sull'altezza e sulla costituzione della ionosfera, all'esistenza del *fading*, all'incostanza dell'emissione, ecc.

Per tali ragioni, le osservazioni sperimentali eseguite con stazioni radiotrasmittenti, se danno qualche indizio a favore dell'ipotesi di Appleton circa l'assorbimento dell'onda di 214 m. nel campo terrestre, non possono assumersi come prova sicura dell'esistenza del fenomeno.

2. Dalle suesposte considerazioni si rileva l'opportunità di istituire delle esperienze di laboratorio intese a mettere direttamente in rilievo le modalità della propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo ionizzato sottoposto a campo magnetico. In linea di principio si dovrà disporre di un oscillatore che emetta un'onda elettromagnetica persistente di conveniente lunghezza, incanalare tale onda in uno spazio contenente un gas elettronico sul quale possa agire un campo magnetico di opportuno valore e riceverla infine su di un risuonatore accordato che si presti ad eseguire misure di intensità.

La difficoltà principale sin qui frapposta all'esecuzione di esperienze di questo tipo, è senza dubbio costituita dalla necessità di disporre di onde elettromagnetiche persistenti <sup>(1)</sup> di lunghezza d'onda convenientemente piccola per modo che le dimensioni dei congegni da adottarsi nella disposizione sperimentale, risultino accettabili.

Recentemente il Pierret <sup>(2)</sup> è riuscito a produrre, mediante lampade a tre elettrodi *a corna* (tipo T. M. C. della Radio Militare francese), delle oscillazioni elettromagnetiche persistenti di lunghezza d'onda compresa fra 15 e 19 cm. Tali oscillazioni sembrano dovute ad un movimento periodico degli elettroni emessi dal filamento, da una parte e dall'altra del conduttore di griglia (che è portato ad un conveniente potenziale positivo), e possono essere irradiate nello spazio ponendo sulla corna collegata alla griglia una piccola antenna di circa 4 cm. di lunghezza che viene così eccitata « in quarto d'onda ».

L'oscillatore di Pierret, per l'energia relativamente notevole messa in giuoco, per la estrema semplicità del suo montaggio e soprattutto per la piccola lunghezza d'onda emessa, sembra prestarsi particolarmente bene alla verifica sperimentale di cui è questione nella presente Nota.

3. L'esperienza può progettarsi in base alle seguenti considerazioni. Supposto di disporre di un gas elettronico in cui l'onda possa propagarsi,

(1) Il caso di onde smorzate non è da prendersi in considerazione per ovvie ragioni inerenti alla insufficienza dell'energia messa in giuoco, alla incostanza dell'emissione, alla poca acuità dei fenomeni di risonanza, ecc.

(2) E. PIERRET, «C. R.», 186 (1928) p. 1284 e 1601; 187 (1929) p. 1132 e 1288,

dovremo anzitutto calcolare il valore del campo magnetico cui corrisponde la frequenza di risonanza di  $1,67 \cdot 10^9$  hertz, propria dell'onda incidente ( $\lambda = 18$  cm.).

Dalla (1) si ottiene:

$$H = \frac{2 \pi m v}{e} = 6,28 \cdot 5,65 \cdot 10^{-8} \cdot 1,67 \cdot 10^9 = 592,54 \text{ gauss.}$$

Tale valore del campo appare facilmente raggiungibile, anche in uno spazio non trascurabile di fronte alla lunghezza d'onda incidente, mediante una conveniente bobina e senza far uso di ferro.

All'azione di questo campo magnetico si dovrà sottoporre un ambiente in cui si trovino elettroni liberi i quali percorreranno, per le ragioni anzidette, delle orbite circolari con la frequenza obbligata di  $1,67 \cdot 10^9$  periodi al secondo. Nasce spontanea l'idea di servirsi a tale scopo dello spazio filamento-placca di un diodo, disposto nell'interno della bobina che genera il campo, col filamento parallelo alle linee di forza. In tale spazio, sotto l'azione combinata del campo magnetico e del campo elettrico dovuto alla tensione di placca, gli elettroni percorreranno appunto delle orbite chiuse, normali al campo, che si possono ritenere circolari con buona approssimazione se — come effettivamente si verifica in pratica — il raggio del filamento è trascurabile di fronte a quello della placca.

La teoria del diodo in campo magnetico, formulata da Hull nel 1921 <sup>(1)</sup>, permette di calcolare il diametro  $d$  di tali orbite che dipende dal raggio anodico  $R$ , dal campo magnetico  $H$  e dalla tensione di placca  $V$ , secondo la relazione

$$(2) \quad d = 4 \sqrt[4]{\frac{m}{e}} \frac{V^{\frac{3}{4}}}{R^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}}}.$$

Fissata ad un certo valore ammissibile la tensione anodica da applicarsi ad un diodo avente un determinato raggio anodico, è possibile calcolare, mediante la (2), quale debba essere il raggio dell'orbita percorsa dall'elettrone con la frequenza di  $1,67 \cdot 10^9$  hertz, imposta dal campo di 592,54 gauss.

Per la pratica realizzazione dell'esperienza più avanti descritta, è conveniente fare il calcolo per un diodo avente un raggio anodico di cm. 0,57 e capace di sopportare una tensione di placca di 600 volt. In tali condizioni il diametro dell'orbita elettronica, sotto l'azione del campo magnetico anzidetto, risulta di cm. 0,21. La velocità periferica degli elettroni sulle orbite stesse (dovuta in parte al campo elettrico e in parte al campo magnetico) è dell'ordine di 15.000 Km. al secondo.

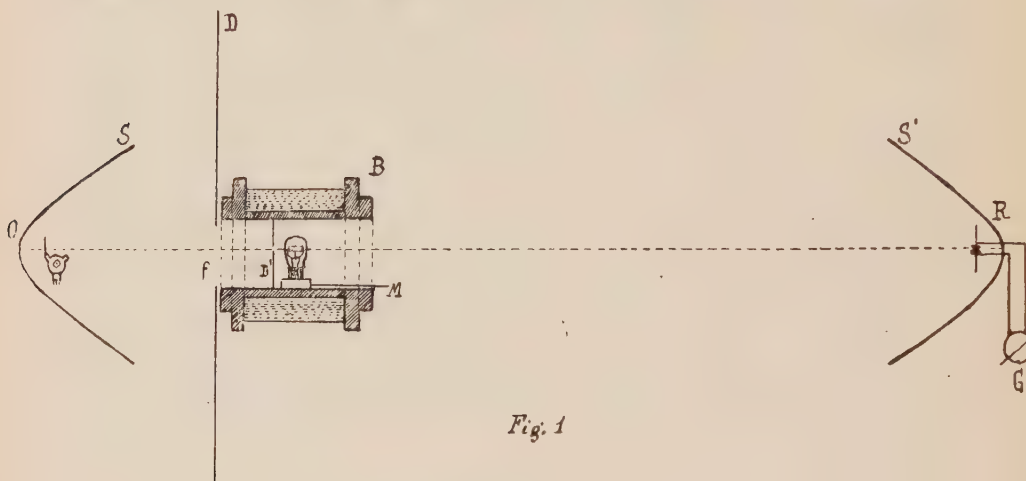
(1) H. W. HULL, «Phys. Rev.», vol. XVIII, Serie II, p. 31, 1921.



Appare dunque realizzabile un'esperienza di laboratorio tendente a mettere in rilievo un eventuale assorbimento subito da un'onda elettromagnetica di 18 cm. di lunghezza, per il fatto che l'onda stessa abbia traversato uno spazio contenente un gas elettronico sottoposto ad un campo magnetico di 592,54 gauss.

4. Ho effettivamente eseguito l'esperienza in questione adottando, dopo numerosi tentativi, la disposizione illustrata in fig. 1.

In O è situato l'oscillatore (tipo Pierret) munito di un opportuno riflettore cilindrico-parabolico S. A 16 cm. dal bordo di detto riflettore trovasi un largo diaframma rettangolare di zinco D, di m.  $1,74 \times 0,70$ , che porta al centro un foro  $f$  di 12 cm. di diametro, ed è destinato ad attenuare per quanto possibile l'effetto dei fenomeni di diffrazione che sono



particolarmente intensi per essere le dimensioni degli oggetti con cui si sperimenta, dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda.

Contro il foro  $f$  si appoggia una grossa bobina di legno sostenente un avvolgimento conduttore formato da 300 spire di filo di rame da 18/10, disposte su 15 strati concentrici. La bobina, lunga 30 cm., presenta un canale longitudinale di 14 cm. di diametro. Nell'interno di questo canale è posto il diodo avente le caratteristiche sopra descritte, con il filamento diretto parallelamente alle linee di forza del campo. Mediante la manetta M, il diodo può ruotare nell'interno della bobina, il che permette di regolare accuratamente l'anzidetto parallelismo. Fra il diaframma D e il diodo, trovasi un secondo schermo di zinco D' munito di un foro il cui diametro è esattamente eguale a quello della placca del diodo. Questo secondo schermo può esser tolto d'altronde, in certi casi, senza che l'andamento dei fenomeni osservati vari sensibilmente. Il diodo è munito di un dispositivo, non rappresentato in figura, costituito da autoinduzioni e capacità opportunamente

disposte, per modo da impedirgli di oscillare per suo conto nel campo magnetico (senza questa precauzione il diodo funziona da *magnetron* <sup>(1)</sup> ed emette oscillazioni assai intense che perturbano l'osservazione dell'effetto ricercato).

In R, a circa m. 1,50 di distanza dal diaframma D, è disposto il risuonatore costituito da una piccola antenna rettilinea vibrante « in mezza onda » e accordata sull'oscillazione di 18 cm. emessa dall'oscillatore. Al centro dell'antenna è inserito un minuscolo rivelatore a cristallo (contatto galena-platino) collegato con un galvanometro sensibile. Il risuonatore descritto è collocato nel fuoco di uno specchio cilindro-parabolico S', identico a quello dell'oscillatore.

Eccitato l'oscillatore O, si nota al galvanometro una deviazione permanente dovuta all'onda di 18 cm. in arrivo <sup>(2)</sup>. Se si invia corrente nella bobina B, si mette la placca del diodo sotto tensione e si accende il filamento, la deviazione galvanometrica resta in generale immutata. Ma se con un conveniente reostato si aumenta grado a grado l'intensità della corrente magnetizzante nella bobina, si osserva che la deviazione va man mano diminuendo, raggiunge un minimo in corrispondenza di un valore del campo di circa 600 gauss (campo teorico 592,54 gauss) e torna a crescere col crescere dell'intensità della corrente magnetizzante. La diminuzione è nettissima e si verifica entro un ambito assai ristretto dei valori del campo. I diagrammi rilevati in proposito, che mi riservo di presentare in una relazione più dettagliata dell'esperienza, di cui ora rendo conto sommariamente, mostrano che basta una variazione nel valore del campo dell'1 % circa, per ridurre ad 1/3 l'entità dell'effetto.

Una volta trovato sperimentalmente il valore esatto del campo che produce il massimo effetto di assorbimento, si può verificare che il solo fatto di accendere o spengere il diodo nel campo magnetico (il che equivale a generare o distruggere le orbite elettroniche assorbenti), produce una netta diminuzione della deviazione galvanometrica dovuta all'onda in arrivo.

Ad accertarmi che l'effetto osservato è da interpretarsi effettivamente come assorbimento dell'energia dell'onda di 18 cm., provocata dalle orbite elettroniche generate nell'interno del diodo, ho eseguito i controlli e le verifiche seguenti:

1° Ho cambiato in diversa guisa le posizioni reciproche dell'oscillatore, dello schermo metallico, della bobina e del risuonatore col che si

(1) K. OKABE, «Proc. Inst. Radio Eng.», t. 17, p. 652, 1929.

(2) Tale deviazione si annulla quasi completamente se si pone uno schermo metallico di fronte all'apertura della bobina B rivolta verso il risuonatore. La piccola deviazione residua è dovuta ad energia che arriva in R in causa di fenomeni di diffrazione, riflessione sulle pareti della stanza ed emissione di onde secondarie per parte dei corpi investiti dalla radiazione primaria.

viene certamente a variare l'andamento delle linee di forza dovute, sia al raggio proveniente direttamente dall'oscillatore, che a quelli originati da diffrazione, riflessione od altre cause perturbatrici: l'effetto si ritrova costantemente purchè si abbia cura di operare una esatta centratura del diodo nel campo.

2° Ho verificato che l'effetto si attenua di molto o addirittura scompare se si ruota, anche di poco, il diodo nell'interno della bobina.

3° Ho cambiato la valvola dell'oscillatore ed ho sperimentato con tre o quattro tipi di diodi aventi analoghe dimensioni e caratteristiche, ottenendo in ogni caso l'effetto, per valori del campo di poco diversi.

4° Ho verificato che l'entità dell'effetto è proporzionale alla corrente elettronica emessa dal filamento del diodo, ossia al numero delle orbite elettroniche presenti nello spazio filamento-placca ed ho constatato inoltre che — a parità di numero di orbite elettroniche assorbenti — la diminuzione della deviazione galvanometrica è tanto maggiore quanto più grande è la deviazione iniziale dovuta all'onda di 18 cm.

5° Finalmente, anche per suggerimento del prof. Majorana, ho potuto assicurarmi in modo indubbio che l'effetto è realmente provocato dalla radiazione incidente. A tal uopo, dopo aver verificato che disponendo il risuonatore orizzontalmente (a 90° dall'oscillatore) la deviazione galvanometrica si annulla e l'effetto non si manifesta, ho posto di fronte all'oscillatore un disco di gesso del diametro di 12 cm. e di cm. 3,5 di spessore. Esso polarizza ellitticamente la radiazione incidente per modo che, girandolo nel proprio piano, è possibile ottenere una deviazione al galvanometro anche con il risuonatore orizzontale (dovuta ad una componente della vibrazione ellittica, polarizzata nel piano del risuonatore). Ho verificato che in tali condizioni l'effetto si presenta nuovamente e varia nella sua entità, o scompare del tutto, ruotando anche di pochissimo il disco di gesso nel proprio piano, attorno alla detta posizione di massimo. Se si pensa che agli effetti cinematici della vibrazione incidente, l'orbita elettronica circolare nell'interno del diodo può scomporsi in due moti vibratorii effettuanti in piani perpendicolari, appare immediata l'interpretazione da darsi a quest'ultima verifica eseguita, il cui valore probativo si dimostra particolarmente efficace.

Mi riservo di illustrare più ampiamente in altra occasione i dettagli delle esperienze eseguite, gli artifici adottati per eliminare o rendere minime le numerose cause perturbatrici presentatesi via via nel corso della ricerca, ed i risultati quantitativi ottenuti.

Ma fin d'ora mi sembra non privo d'interesse segnalare che le constatazioni surriferite sembrano tali da autorizzare a concludere che: l'esecuzione di una esperienza di laboratorio sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in gas elettronico sottoposto a campo magnetico, ha fornito risultati in buon accordo con l'ipotesi di Appleton circa il comportamento anormale dell'onda di 214 m. nel campo magnetico terrestre.

**Fisica** (Fisica matematica). — *Alcune proprietà di media nella Elastostatica ordinaria.* Nota di A. SIGNORINI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Per un qualsiasi sistema continuo in equilibrio i valori medi delle consuete caratteristiche dello stress sono individuati dalla sollecitazione totale (forze di massa + forze al contorno, attive e vincolari) e dalla configurazione attuale del sistema, senza alcun concorso della sua costituzione materiale. Invero essi — purchè cambiati di segno e moltiplicati pel volume attuale del sistema — ordinatamente coincidono colle cosiddette coordinate astatiche della sollecitazione (n. 1); onde si annullano tutti e sei quando e soltanto quando la sollecitazione è (attualmente) astatica; e sono suscettibili di espressioni molto semplici anche per altri tipi interessanti di sollecitazione, ad es., quando tutte le forze al contorno e tutte le forze di massa abbiano una stessa direzione (n. 2).

Nella teoria ordinaria della termoeasticità lo stesso teorema dà luogo — per ogni sistema omogeneo — ad espressioni della quantità di calore assorbita dal sistema e dei valor medi delle singole caratteristiche di deformazione, lineari nel valor medio della temperatura e nelle coordinate astatiche della sollecitazione (n. 3). Più in particolare, quando la trasformazione è in media isoterma od adiabatica si ritrovano, in forma semplice e completa, le espressioni dei valori medi delle singole caratteristiche di deformazione a mezzo della sola configurazione e sollecitazione; e resta messo in evidenza che lo spostamento elastico è rigido in media quando e soltanto quando la sollecitazione è astatica, ecc. (n. 4).

1. Sia S un qualsiasi sistema continuo in quiete rispetto alla terna trirettangola  $Ox_1 x_2 x_3$ .

Rappresentando con C la configurazione attuale di S, con  $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$  il suo punto generico e con  $\Sigma$  il suo contorno completo, scriviamo le equazioni fondamentali di Cauchy nella forma

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} kF_r = \sum_s \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_s} \dots C \\ f_r = \sum_s X_{rs} \cos \widehat{nx_s} \dots \Sigma \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, 3),$$

ove resta sottinteso che

$$(2) \quad X_{rs} = X_{sr} \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.



Poniano anche

$$a_{pq} = - \frac{1}{C} \left\{ \int_C x_q \cdot k F_p dC + \int_{\Sigma} x_q \cdot f_p d\Sigma \right\} \quad (p, q = 1, 2, 3);$$

ciò che corrisponde a rappresentare con  $-Ca_{pq}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ) le coordinate astatiche <sup>(1)</sup> della sollecitazione totale ed implica, per solo effetto della 2ª equazione cardinale (vettoriale) della statica,

$$(2') \quad a_{pq} = a_{qp} \quad (p, q = 1, 2, 3).$$

Dalle (1) segue

$$Ca_{pq} = - \int_C \sum_s^3 \frac{\partial (x_q X_{ps})}{\partial x_s} dC + \int_C X_{pq} dC - \int_{\Sigma} \sum_s^3 x_q X_{ps} \cos \widehat{nx_s} d\Sigma.$$

Basta allora trasformare gli integrali di superficie in integrali di volume mediante il teorema di Gauss e convenire, una volta per tutte, di accennare col soprassegno il valor medio in  $C$  di una generica funzione di  $P$ , per concludere che [indipendentemente <sup>(2)</sup> dalle (2)-(2'), ma in perfetto accordo con esse] è sempre

$$(I) \quad a_{pq} = \bar{X}_{pq} \quad (p, q = 1, 2, 3).$$

2. Accenniamo alcune conseguenze immediate delle (I). Ove sia il caso indicheremo con  $\Sigma_e$  il contorno esterno di  $C$ , con  $\Sigma_i$  il contorno interno, con  $K$  il volume complessivo delle cavità.

a) **Sollecitazione astatica.** — Se la sollecitazione totale  $S$  è (attualmente) astatica, si annulla ciascuno degli  $\bar{X}_{rs}$ ; e viceversa.

b) **Pressione o trazione uniforme.** — Supponiamo che, insieme ad  $F_r = 0$  ( $r = 1, 2, 3$ ), si abbia

$$f_r = \begin{cases} p_e \cos \widehat{nx_r} \dots \Sigma_e \\ p_i \cos \widehat{nx_r} \dots \Sigma_i \end{cases} \quad (r = 1, 2, 3)$$

con  $p_e, p_i$  costanti (ciò che rende automaticamente verificate tutte le equazioni cardinali della statica). Allora risulta

$$\bar{X}_{rr} = p_e + (p_e - p_i) \frac{K}{C} = p_*, \quad \bar{X}_{rs} = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3; r \neq s):$$

(1) F. MINDING, *Handbuch der Differential- und Integralrechnung*, 2ª parte, p. 78 e sgg. (Berlin, 1837).

(2) Non insistiamo sull'interpretazione omografica delle (I):

$$\bar{\alpha} = - \frac{1}{C} \int_C H(OP, \text{grad } \alpha) dC - \frac{1}{C} \int_{\Sigma} H(OP, \alpha \mathbf{N}) d\Sigma.$$



ad es., se è  $p_e = 0$  e  $p_i > 0$ , ciascuno degli  $\bar{X}_{rr}$  non può essere che negativo.

c) **Forze parallele.** — La  $S$  sia costituita da un sistema di forze parallele e concordi — di centro  $G'$  e risultante  $\mathbf{R}$  — equilibrato da un secondo sistema dello stesso tipo, di centro  $G''$  (ciò che implica il parallelismo tra  $G'G''$  ed  $\mathbf{R}$ ). Sia  $l = |G'G''|$  ed  $N = \pm R$ , col segno  $\pm$  a seconda che la  $S$  ha il carattere di una pressione o di una trazione (cioè, a seconda che  $\mathbf{R}$  ha proprio l'orientamento di  $G'G''$  ovvero l'orientamento opposto). Non appena si dia all'asse  $x_1$  la direzione di  $\mathbf{R}$ , risulta

$$\bar{X}_{11} = \frac{lN}{C},$$

mentre tutti gli altri  $\bar{X}_{rs}$  si annullano identicamente.

d) **Solido fissato senza attrito per un punto.** — Fatto coincidere  $O$  col punto fisso, gli  $\bar{X}_{rs}$  — moltiplicati per  $-C$  — ordinatamente coincidono colle coordinate astatiche della sola sollecitazione attiva.

e) **Sistema in rotazione uniforme attorno ad uno dei suoi assi centrali d'inerzia.** — Sia  $f_r = 0$  ( $r = 1, 2, 3$ ) ed insieme  $F_1 = 0$ ,  $F_i = \omega^2 x_i$  ( $i = 2, 3$ ) con  $\omega$  costante; nonchè

$$\int_C kx_i dC = 0 = \int_C kx_1 x_i dC \quad (i = 2, 3)$$

per rendere soddisfatte le equazioni cardinali della statica. Posto

$$I_i = \int_C kx_i^2 dC \quad (i = 2, 3),$$

risulta

$$\bar{X}_{ii} = -\frac{\omega^2 I_i}{C} \quad (i = 2, 3),$$

mentre tutti gli altri  $\bar{X}_{rs}$  si annullano identicamente. Ad es., se è  $I_2 = I_3$  (sistema rotondo, ecc.) ed il comune valore viene rappresentato con  $I/2$  ovvero con  $\mathcal{C}/\omega^2$ , si ha

$$\bar{X}_{22} = \bar{X}_{33} = -\frac{\omega^2 I}{2C} = -\frac{\mathcal{C}}{C}.$$

3. Torniamo ad una  $S$  generica limitatamente alle trasformazioni infinitesime di un sistema elastico.  $S_e$  — omogeneo ma comunque anisotropo — a partire da uno stato di riferimento  $C_*$  nel quale tutte le particelle di  $S_e$  si trovino nello stato naturale relativo ad una stessa temperatura assoluta,  $T_*$ .

Convorrà adottare le notazioni

$$X_r = X_{rr} \quad (r = 1, 2, 3) \quad , \quad X_4 = X_{23} \quad , \quad X_5 = X_{31} \quad , \quad X_6 = X_{12} \quad ,$$

colle analoghe per le coordinate astatiche di  $S$ ; e modificare anche le notazioni  $\varepsilon_r, \gamma_s$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) abituali per le caratteristiche di deformazione, sostituendo  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  rispettivamente con  $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ .

Detto  $E$  l'equivalente meccanico del calore, per la generica particella di  $S_e$  indichiamo: con  $m'_{rs}, l_r$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) e  $T_* c / Ek$  rispettivamente i moduli isotermi d'elasticità <sup>(1)</sup>, i moduli di dilatazione termica ed il calore specifico (per  $X_1 = X_2 = \dots = X_6 = 0$ ) relativi alla temperatura  $T_*$ ; con  $T_* + u$  la temperatura assoluta attuale; con  $\delta q$  il valore algebrico — riferito all'unità di volume — della quantità di calore assorbita nella trasformazione  $C_* \rightarrow C$ .

Nelle nostre ipotesi l'espressione, mediante le caratteristiche dello stress, del potenziale elastico isoterma (specifico, relativo alla temperatura  $T_*$ ) si riduce alla forma quadratica

$$W'(X_1, X_2, \dots, X_6) = \sum_{r,s}^6 m'_{rs} X_r X_s,$$

che deve intendersi definita positiva insieme all'analogo pel potenziale adiabatico <sup>(2)</sup>; e simultaneamente è da porre

$$(E) \quad \begin{cases} -\varepsilon_r = \sum_s^6 m'_{rs} X_s - l_r u & (r = 1, 2, \dots, 6) \\ \frac{E \delta q}{T_*} = - \sum_s^6 l_s X_s + c u. \end{cases}$$

Anzi, i singoli  $m', l$  e  $c$  non dipendono da  $P$ .

Rappresentiamo con

$$\delta Q = \int_C \delta q dC$$

il valore algebrico della quantità di calore assorbita dall'intero sistema nella trasformazione  $C_* \rightarrow C$ . Dalle (E) — prendendo i valori medi in  $C$  ed applicando le (I) — immediatamente risulta

$$(\bar{E}) \quad \begin{cases} -\bar{\varepsilon}_r = \sum_s^6 m'_{rs} \bar{a}_s - l_r \bar{u} & (r = 1, 2, \dots, 6) \\ \frac{E \delta Q}{CT_*} = - \sum_s^6 l_s \bar{a}_s + c \bar{n}. \end{cases}$$

Queste formole, purchè s'interpreti opportunamente il valor medio di ciascuna delle caratteristiche di deformazione, si prestano a varie interessanti

(1) Cfr., ad es., VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik* (Teubner, Leipzig, 1928), VII. Kapitel, VIII. Abschnitt.

(2) Cfr. A. SIGNORINI, *Sulle deformazioni termoelastiche finite*, («Verhandl. des 3. Internat. Kongr. für techn. Mechanik», Stockholm, 1930), n. 5.

applicazioni (estensione di un celebre teorema di Clapeyron, determinazione sperimentale dei moduli  $m'$  ed  $l$ , ecc.).

4. Se è  $\bar{u} = 0$  ovvero  $\delta Q = 0$  - cioè, se la trasformazione  $C_* \rightarrow C$  è in media isoterma ovvero adiabatica - le  $(\bar{E})$  danno luogo a

$$(II) \quad -\bar{\epsilon}_r = \sum_{s=1}^6 m_{rs} a_s \quad (r = 1, 2, \dots, 6)$$

con  $m_{rs} = m'_{rs}$  ovvero  $m_{rs} = m'_{rs} - l_r l_s / c$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) a seconda che ci si trovi nel 1° o 2° caso in esame.

Detta

$$\delta V = C \sum_{r=1}^3 \bar{\epsilon}_r$$

la variazione di volume subita da  $S_e$  nello spostamento  $C_* \rightarrow C$ , da (II) risulta

$$\delta V = -C \sum_{s=1}^6 a_s \sum_{r=1}^3 m_{rs}.$$

Più in particolare, se  $S_e$  è isotropo si ha

$$\delta V = \frac{1}{3} A M$$

non appena si rappresenti con

$$A = -C \sum_{s=1}^3 a_s = \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_C x_s k F_s dC + \int_{\Sigma} x_s f_s d\Sigma \right\}$$

il *viriale* di  $S$  (indipendente dal centro di riduzione  $O$  perchè la  $S$  ha risultante nullo) e si ponga, con evidente significato di  $W$ ,

$$M = W(1, 1, 1, 0, 0, 0) > 0.$$

Accenniamo qualche altra conseguenza delle (II), parallelamente ai vari tipi di sollecitazione presi in esame al n. 2.

a) **Sollecitazione astatica.** - Se si annullano tutte le  $a_s$ , si annulla ciascuno degli  $\bar{\epsilon}_r$ : e viceversa. Al tempo stesso - per effetto dell'ultima delle  $(\bar{E})$  - il caso isoterma si confonde col caso adiabatico; in altri termini, quando la sollecitazione è astatica, se manca globalmente ogni scambio di calore coll'esterno la temperatura in media resta inalterata: e viceversa.

b) **Pressione o trazione uniforme.** - Le (II) si riducono a

$$\bar{\epsilon}_r = -p_* \sum_{s=1}^3 m_{rs} \quad (r = 1, 2, 3) \quad , \quad \bar{\epsilon}_4 = \bar{\epsilon}_5 = \bar{\epsilon}_6 = 0:$$

in particolare si ha

$$\delta V = - C p_* M,$$

ciò che implica l'identità <sup>(1)</sup> del segno di  $\delta V$  con quello di  $-p_*$ .

c) **Forze parallele.** — Le (II) assumono la forma

$$-\bar{\varepsilon}_r = m_{r1} \frac{lN}{C} \quad (r = 1, 2, \dots, 6):$$

onde appare evidente che  $\bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_5, \varepsilon_6$  non possono annullarsi altro che quando si particolarizzi <sup>(2)</sup> l'anisotropia di  $S_e$ . Simultaneamente si ha

$$\delta V = - lN \sum_r^3 m_{r1},$$

onde resta stabilito che  $|\delta V|$ , oltre che ad  $|N|$ , è proporzionale ad  $l$ .

d) **Solido fissato senza attrito per un punto.** — Fatto coincidere O col punto fisso, le (II) esprimono i singoli  $\bar{\varepsilon}_r$  mediante le coordinate astatiche della sola sollecitazione attiva.

e) **Sistema in rotazione uniforme attorno ad uno dei suoi assi centrali d'inerzia.** — Dalle (II) segue

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\omega^2}{C} \sum_s^3 m_{rs} I_s \quad (r = 1, 2, \dots, 6).$$

Più in particolare, nel caso  $I_2 = I_3 = \frac{\mathcal{C}}{\omega^2}$  risulta

$$\delta V = \mathcal{C} \sum_r^3 \sum_s^3 m_{rs},$$

coll'implicita proporzionalità tra  $|\delta V|$  e  $\mathcal{C}$ .

(1) Cfr. SOMIGLIANA, *Intorno ad alcune questioni di Elastostatica*, Nota II, (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. LXI, pp. 137-154 (1926).

(2) Cfr. VOIGT, loc. cit. a p. 154, nota (1), VII. Kapitel, III. und IV. Abschnitt.

**Fisica** (Fisica matematica). — *Remarques sur le problème de la théorie unitaire des champs.* Nota di L. INFELD, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ I.

M. P. Straneo<sup>(2)</sup> a cherché, dans ses travaux publiés dans « Berl. Ber. » et dans ces « Rendiconti », à donner une théorie commune des champs de gravitation et électromagnétique en admettant l'asymétrie des composantes de la connexion affine. Cet auteur admet que les parties asymétrique et symétrique de la connexion affine sont respectivement

$$(1) \quad \frac{1}{2} [\Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l] = g_i^l \varphi_k - g_k^l \varphi_i \quad \cdot$$

et

$$(2) \quad \frac{1}{2} [\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ki}^l] = \left\{ \begin{matrix} l \\ i \quad k \end{matrix} \right\} + g_i^l \varphi_k + g_k^l \varphi_i.$$

Le résultat principal de cette théorie est la possibilité d'égaliser la partie asymétrique du tenseur

$$(3) \quad K_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{is}^s}{\partial x^k} - \frac{\Gamma_{ik}^s}{\partial x^s} + \Gamma_{is}^h \Gamma_{hk}^s - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hs}^s$$

aux composantes du champ électromagnétique. Il est notamment

$$(4) \quad F_{ik} = \frac{1}{2} [K_{ik} - K_{ki}] = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}.$$

La partie symétrique de ce tenseur égale au tenseur d'énergie donne les équations de la gravitation.

Remarquons d'abord que des essais de résolution du problème de la théorie commune des champs, à l'aide de géométries non-Riemanniennes avec courbure et torsion différentes de zéro, datent depuis quelques années ce que M. Straneo semble ne pas avoir remarqué. C'est encore avant la théorie du « Fernparallelismus » d'Einstein qu'une suite de travaux ont paru<sup>(3)</sup> dans lesquels la géométrie à 4 dimensions était caractérisée par les composantes asymétriques de la connexion affine.

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1932.

(2) P. STRANEO, « Berl. Ber. », 1931, 319. « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1931, 364; 695.

(3) L. INFELD, « Phys. ZS. », 29, 1928, 145; « C.-R. », 186, 1928, 1280; « ZS. f. Phys. », 50, 1928, 137; K. HATTORI, « Phys. ZS. », 29, 1928, 538.



Je me permets de noter que j'ai montré dans une courte Note <sup>(1)</sup> parue en 1928 et intitulée « Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn K. Hattori... », que des hypothèses, en principe équivalentes à celles de M. Straneo, nous conduisent aux équations de Maxwell et de la gravitation. J'écrivais alors :

« On peut prouver sans difficulté qu'il existe, à côté de cette géométrie [et à part celles de Weyl et d'Eddington] d'autres géométries qui permettent d'égaliser avec le champ électromagnétique les parties asymétriques de  $K_{ik}$ . Je donnerai ici un exemple qui peut être facilement traité de la même manière que le fait K. Hattori.

Nous posons notamment

$$\Gamma'_{ik} = \left\{ \begin{matrix} l \\ i \quad k \end{matrix} \right\} + 2(g^l_i \varphi_k - g^l_k \varphi_i),$$

où  $\varphi_i$  est le potentiel électromagnétique. Le calcul donne

$$F_{ik} = \frac{1}{2} (K_{ik} - K_{ki}) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}.$$

On obtient de cette manière un des systèmes des équations de Maxwell, tandis que l'autre [comme chez Weyl - Eddington - Hattori] définit le vecteur densité de courant »...

« Les remarques montrent, me semble-t-il [comme d'ailleurs le fait remarquer K. Hattori], que la généralisation des équations de la théorie de la relativité ne peut avoir lieu par voie purement formelle. On ne saurait pas faire le choix entre diverses géométries non-Rimanniennes qui pourraient donner les équations de la gravitation et du champ électromagnétique. La géométrie à 4 dimensions que conduira à une théorie commune de la gravitation et de l'électricité ne pourra être établie qu'après une étude approfondie de son sens physique ».

J'ai donc discuté dans cette Note l'équation (1). La seule différence consiste en ce que j'ai admis l'équation

$$(5) \quad \frac{1}{2} (\Gamma'_{ik} + \Gamma'_{ki}) = \left\{ \begin{matrix} l \\ i \quad k \end{matrix} \right\}$$

à la place de l'équation (2). Cette différence n'est pas essentielle puisque les conséquences, exprimées par l'équation (4), sont valables dans les deux cas. Je me suis servi de cet exemple afin de faire voir à quel point est indéterminée la manière de résoudre le problème tant qu'on ne l'envisage pas au point de vue de la réalité physique.

(1) « Phys. ZS. », 29, 1828, 810.

## § II.

S'il ne s'agissait que de l'établissement d'équations du champ, qui donneraient comme résultat les équations de la gravitation et celles de Maxwell, le sujet perdrait beaucoup de son intérêt qu'il présentait avant le développement de la mécanique quantique. L'approfondissement de la théorie dans le sens déterminé par la mécanique quantique semble présenter des difficultés infranchissables.

Nous allons nous mettre au point de vue de l'électrodynamique classique et tâcher de répondre à la question suivante: Peut-il exister un critérium physique raisonnable qui nous permettrait de faire la choix entre diverses théories du champ? C'est la réponse à cette question qui fait l'objet de cette Note. Les seules géométries que nous prendrons en considération sont les géométries à 4 dimensions basées sur la forme quadratique fondamentale. La théorie admet le fait que les  $n^3$  composantes  $\Gamma_{ik}^l$  sont données comme fonctions des grandeurs caractérisant le champ. Si le champ métrique et les composantes de la connexion affine sont connus, nous pouvons définir de nouveaux tenseurs par la voie suivante:

$$(6) \quad g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{is} \Gamma_{kl}^s - g_{sk} \Gamma_{il}^s = Q_{ikl}.$$

d'équation (6) ainsi que les équations

$$(7) \quad I_{ik}^l = \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l$$

peuvent être considérées comme définissant les composantes  $\Gamma_{ik}^l$ . En effet: si les  $\frac{n^2(n+1)}{2}$  composantes  $Q_{ikl}$  et les  $\frac{n^2(n-1)}{2}$  composantes  $I_{ik}^l$  sont connues, les équations (6) et (7) donnent

$$(8) \quad \Gamma_{ik}^l = \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} (Q_{,ik}^l + Q_{,ki}^l - Q_{ik,}^l + I_{i,k}^l + I_{k,i}^l - I_{ik,}^l).$$

Divisons les diverses géométries dans les quatre classes suivantes:

$$\text{I} \quad Q_{ikl} \neq 0 \quad , \quad I_{ik}^l \neq 0 ,$$

$$\text{II} \quad Q_{ikl} \neq 0 \quad , \quad I_{ik}^l = 0 ,$$

$$\text{III} \quad Q_{ikl} = 0 \quad , \quad I_{ik}^l \neq 0 ,$$

$$\text{IV} \quad Q_{ikl} = 0 \quad , \quad I_{ik}^l = 0 .$$

La géométrie IV est celle de Riemann, car les composantes de la connexion affine sont égales aux symboles de Cristoffel. La géométrie de Weyl et d'Eddington appartient à la classe II, car celle-ci admet la symétrie des  $\Gamma_{ik}^l$ . Les autres géométries appartiennent aux classes I et III.

Faisons l'hypothèse suivante: Dans un système donné de coordonnées *il est toujours possible de déterminer d'une manière univoque* dans le voisinage d'un point quelconque les composantes  $g_{ik}$  par des mesures effectuées à l'aide de règles graduées et d'horloges (p. ex. de la manière imaginée par Hilbert) <sup>(1)</sup>. Nous admettons donc que deux règles graduées égales en un point A et deux horloges qui ont le même rythme en ce point conservent ces qualités lorsqu'elles sont déplacées parallèlement à elles-mêmes dans un autre point B. Si nous l'admettons, la géométrie doit remplir la condition

$$(9) \quad \boxed{g_{ik|l} = 0.}$$

Cette condition limite fortement les diverses possibilités de généralisation. En effet: nous devons avoir

$$g_{ik|l} = Q_{ikl} = 0$$

et par conséquent, la géométrie (si elle n'est pas Riemannienne) doit appartenir à la classe III (celle de M. Straneo appartient à la classe I). La géométrie d'Einstein, basée sur l'idée du « Fernparallelismus », est conforme à la condition (9). L'autre condition remplie par la théorie d'Einstein est l'égalité

$$K_{ikl}^m = 0.$$

Remarquons encore que la géométrie que j'ai développée <sup>(2)</sup> et qui conduit aux équations de la gravitation et du champ électromagnétique est aussi du type III et remplit, par conséquent, la condition (9). La connexion affine est déterminée dans cette théorie par l'équation (9) et par les équations

$$(10) \quad \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l = I_{ik.}^l = F_{ik|.}^l.$$

Les équations (9) et les équations du champ

$$K_{ik} = 0$$

donnent alors les lois de la gravitation et du champ électromagnétique.

(1) *Die Grundlagen der Physik*, « Göttinger Nachrichten », 1917.

(2) « ZS. f. Phys. », loc. cit.

**Chimica fisiologica.** — *Raffronti tra il valore alimentare di alcuni legumi e quello di alcuni cereali.* Nota di V. ZAGAMI e V. FAMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Biologia (Citologia).** — *Osservazioni sulla struttura del nucleo nelle cellule della larva di "Cricotopus sylvestris F."* <sup>(1)</sup>. Nota di DINA LOMBARDI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio F. SILVESTRI.

Avendo raccolto nelle vasche del giardino botanico dipendente dalla R. Università di Roma alcuni esemplari di larve del *Cricotopus sylvestris F.*, volli ricercare se anche i nuclei di questo Chironomide presentassero la tipica struttura oggetto di tanti studi e di tante interpretazioni; alludo al lungo filamento di cromatina connesso ai nucleoli, studiato da prima da Balbiani. Ma benchè questo genere di ricerche abbia preso in tempi più recenti grande estensione, non mi risulta che nessuno ancora abbia preso in esame il *Cricotopus sylvestris F.*

Le larve suddette furono trovate in tutte le stagioni dell'anno su foglie marcescenti di *Nelumbium speciosum* e di *Nymphaea Marliacea*; le più giovani nell'interno del parenchima fogliare, profondamente alterato, le adulte anche alla superficie dove si costruivano tubi con particelle fecali collegate da secrezione salivare, spesso scegliendo come ubicazione l'angolo fra la nervatura principale e la lamina. In tale tubo la larva se ne sta riparata, imprimendo talora al corpo un curioso movimento ondulatorio, destinato, a quanto pare, a rinnovare l'acqua necessaria alla respirazione.

Nelle mie ricerche adoperai come fissativo il liquido di Zenker e quello di Flemming; ma il primo diede risultati preferibili al secondo. La colorazione venne fatta con safranina e verde luce; ma non tutti i tessuti si prestarono ugualmente allo studio della struttura nucleare. Le cellule dell'ipodermide, per esempio, sono quasi invisibili per la loro estrema piccolezza; piccole assai anche quelle dei corpi grassi. Le osservazioni furono perciò, in massima, fatte sulle glandole salivari; e in minor misura sull'intestino medio, sul post-intestino e sui tuboli Malpighiani.

Le glandole salivari, in realtà trasformate in glandole sericigene, per produrre la seta necessaria alla fabbricazione del tubo protettore, sono due organi cavi, subovali, posti parte nel mesotorace, parte nel metatorace. La

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale d'Idrobiologia di Roma.

(2) Nella seduta del 17 gennaio 1932.

loro cavità interna, dove si raccoglie la secrezione, è circondata da un epitelio formato da un unico strato di grosse cellule; tali cellule non sono però di uguali dimensioni in tutta l'estensione della glandola. Se noi distinguiamo in questa col nome di poli le due estremità più assottigliate e con quello di regione equatoriale la parte di mezzo più dilatata, possiamo dire che in quest'ultima le cellule risultano più appiattite in confronto di quelle situate ai poli che sono alte e sporgono nel lume della glandola riducendolo quasi a nulla. I loro nuclei vanno da una dimensione minima di  $15\ \mu$ ., fino ad una massima di  $37\ \mu$ .; in media si aggirano intorno ai  $20\ \mu$ .. Sono vescicolosi, sferici od ovali, e contengono per lo più un unico nucleolo, ma talora se ne distingue anche un altro, il quale, almeno in alcuni casi, pro-

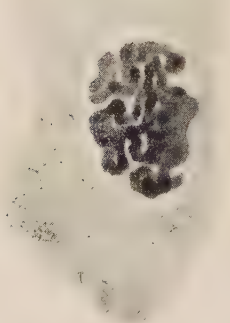


Fig. 1 (Ocul. 4 comp. obb.  $1/15$  tubo a 16 cm.).

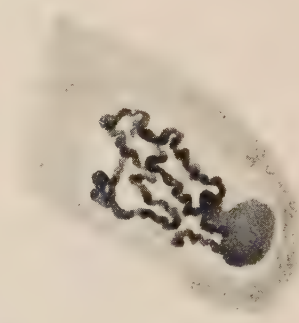


Fig. 2 (Ocul. 4 comp. obb.  $1/15$  tubo a 16 cm.).

viene dal primo per bipartizione, come si deduce dal fatto che a volte gli è vicinissimo e ne è appena separato da una fenditura. Il nucleolo non è vacuolizzato e si tinge costantemente e intensamente con safranina: anche quando ve ne è un secondo questo assume l'identica colorazione. La forma del nucleolo è variabile, subovale o a contorno leggermente poligonale: talora esso è strozzato nel mezzo o lobato; nel punto dove s'inserisce il filamento nucleare si presenta spesso una protuberanza, più di rado una depressione: infine può qualche volta il nucleolo essere traversato dal filamento. Questo talora nella sezione si mostra diviso in più pezzi: ma è possibile che si tratti di una mera apparenza dovuta al fatto che diverse anse siano state incontrate e attraversate dal taglio. Il filamento non si presenta in tutti i nuclei con lo stesso aspetto: talora è grosso, molto contorto e fittamente raggomitolato in modo da riempire l'intera cavità del nucleo (fig. 1); tal'altra invece è più sottile e le anse sono più distanziate (fig. 2). Anche la sua struttura apparente può variare; specialmente



dove esso ha maggiore spessore sembra a prima vista come formato da tanti dischi sovrapposti di diametro variabile, sì da risultarne una striatura trasversale fine e regolare (fig. 3); ma in altri tratti lo si vede invece formato da un sottile cromonema avvolto a spirale, a spireor a larghe ora assai strette (fig. 4). Se esista ovunque un asse acromatico intorno a cui si avvolga il cromonema è dubbio, perchè in più tratti non lo si discerne affatto: del resto tale asse acromatico non è ammesso da tutti gli autori; Tamura, per esempio, nel *Chironomus* lo ha ritenuto un'illusione. In generale la struttura trasversalmente striata è propria dei filamenti nucleari grossi, quella spirale dei filamenti più sottili: ma può darsi che anche la prima si riduca alla seconda, se si suppone che le apparenti strie trasversali non siano altro che le spire molto ravvicinate del cromonema: ed infatti nello stesso filamento si possono notare porzioni con l'una o con l'altra struttura. Più difficile, mi pare, il poter spiegare l'apparente striatura trasversale con cromo-



Fig. 3 (Ocul. 4  
comp. obb. 1/15  
tubo a 16 cm.).



Fig. 4 (Ocul. 4  
comp. obb. 1/15  
tubo a 16 cm.).

meri anulari isolati che circondino un asse acromatico come altri (Dawidov ad esempio in *Mycetobia pallipes*) hanno trovato, perchè le strie sono in generale troppo sottili e abbastanza regolarmente distanziate, ciò che non accade quando si tratta dei suddetti cromomeri. Nei nuclei dove il filamento nucleare è più fine si vedono a volte due tratti di esso correre paralleli e vicinissimi, quasi fossero in via di fondersi insieme: è quello che Alverdes ha creduto di constatare nel *Chironomus* e, in tempi più recenti, Dawidov nella *Mycetobia*.

Le altre cellule che ho preso in esame nel *Cricotopus* sono di dimensioni inferiori a quelle delle glandole salivari ed offrono perciò assai minori possibilità di osservazione e di studio.

Nella prima metà dell'intestino medio (parte cardiaca) esiste un epitelio monostratificato, i cui nuclei contengono un nucleolo e un sottile filamento, sul quale sono disposte delle masserelle cromatiniche: ma le dimensioni minime di tali nuclei (5  $\mu$ .) non mi permettono di dirne di più. Nell'ileo-colon i nuclei raggiungono invece fino a 18  $\mu$ .; e vi si può distinguere un filamento nucleare evidentemente a struttura spirale. Nel retto

l'epitelio forma protuberanze; anche qui si presentano cellule con nuclei vescicolosi a dimensioni variabili fra i 7 e i 12  $\mu$ ., simili a quelli dell'ileo-colon. Infine nei tuboli Malpighiani il lume del tubolo è circondato da un epitelio formato da poche cellule relativamente grosse e sporgenti; anche il loro nucleo, le cui dimensioni sono di 8-9  $\mu$ . contiene, oltre al solito nucleolo, un filamento piuttosto grosso, fittamente raggomitolato, ad apparente striatura trasversale.

In conclusione i nuclei del *Cricotopus sylvestris* F. sono dello stesso tipo di quelli del *Chironomus* dimostrando ancora una volta che questa struttura non è un'eccezione come la si riteneva quando fu scoperta la prima volta.

Intorno alla sua origine, è noto che le opinioni dei diversi autori si dividono in due campi; secondo alcuni (Wilson e Tauser) si tratta di una specie di *spirema* permanente; in tal caso le spirali del cromonema si potrebbero considerare come cromosomi persistenti nell'interfase, analogamente a quello che Brunelli fin dal 1910 ha reputato nella *Trixalis*; ed infatti strutture spirali di cromosomi sono state constatate più volte in cellule animali e vegetali (Bonnievie in *Ascaris* e *Allium*, Dehorne e Schneider in *Salamandra*, Baranetzky, Kaufmann, Sakamura, Sharp in *Tradescantia*, ecc.). Secondo altri invece (Faussek, Tamura) il filamento cromatinico dei Chironomidi non ha nulla a che fare con i cromosomi: ed anche Dawidov ritiene tale analogia poco probabile. Io ho fatto ricerche anche in larve assai giovani di *Cricotopus*, della lunghezza di pochi millimetri, ma non ho mai riscontrato figure cariocinetiche. In tali cellule si riscontrano soltanto il nucleolo e numerose masserelle cromatiniche ordinate in serie in modo da delineare i soliti sottili filamenti.

(1) L. C. MIALl - A. R. HAMMOND, *The structure and life history of the harlequin fly*. 1900.

(2) F. ALVERDES, *Die Entwicklung des Kernfadens in der Speicheldrüse der «Chironomus»-Larve*. 1912.

(3) WILSON, *The cell in development and heredity*. 1925.

(4) A. GURWITSH, *Die histologischen Grundlagen der Biologie*. 1930.

(5) W. DAWIDOV, *Die Entwicklung des Kernes in den Zellen der Rochschen Organe*. 1930.

(6) SHARP JARETZKY, *Einführung in die Zytologie*. 1931.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 7 febbraio 1932 (anno X)*

*Presidenza del prof. sen. A. GARBASSO*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Meccanica.** — *Moto con scia di un profilo flessibile.* Nota I<sup>(1)</sup>  
del Corrisp. U. CISOTTI.

Mi riferisco al noto problema piano del moto permanente, con scia indefinita, di un profilo<sup>(2)</sup>, sostituendo alla solita ipotesi della rigidità del profilo quella della sua flessibilità e inestendibilità. In modo preciso suppongo che il profilo sia costituito da un filo flessibile e inestendibile i cui estremi sono animati di una stessa velocità costante.

I. CIRCOSTANZE COMUNI NEI DUE PROBLEMI. — Riferiamoci, per note ragioni, al problema, analiticamente equivalente [I. P., n. 97], della corrente liquida che investe il profilo fisso. Come nel caso classico del profilo rigido, restano ferme le seguenti circostanze (V. fig. 1):

a) le pareti  $\tilde{\omega}_1$  e  $\tilde{\omega}_2$  del profilo, a regime raggiunto, e i peli liberi  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  costituiscono un'unica linea di flusso e quindi continua a valere

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) Cfr. U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini, parte I (1921), parte II (1922), n. 97. In seguito tale opera verrà indicata brevemente colla sigla I. P. S'intende che le notazioni, del resto ormai classiche, si riferiscono a quelle della citata I. P.

la (...) del n. 98 di I. P., nonchè la condizione all'infinito, per cui, chiamando  $c$  il valore della velocità all'infinito, dev'essere

$$(1) \quad \lim_{OP \rightarrow \infty} w = c,$$

avendosi assunto l'asse reale orientato come la corrente all'infinito;

b) sui peli liberi  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  la velocità mantiene valore costante, cioè, per la (1),

$$(2) \quad |w| = V = c, \quad \text{sopra } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2.$$

La circostanza nuova, che fa differire l'attuale problema da quello noto, riguarda la natura del profilo che, non essendo rigido, ma perfetta-

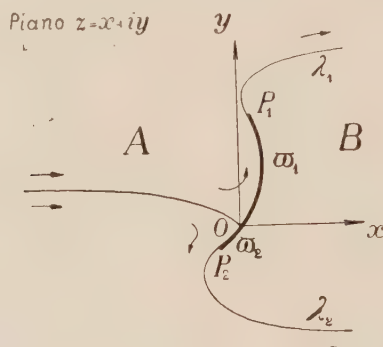


Fig. 1.

mente flessibile, ha una conformazione non più assegnabile *a priori*, ma incognita, come quella dei peli liberi: dunque *tutto il campo A* è *a priori incognito*, solo si conosce il comportamento assintotico della corrente e l'ubicazione degli estremi  $P_1$  e  $P_2$  del profilo, che si suppongono fissati in posizioni arbitrarie, purchè naturalmente compatibili colla lunghezza del profilo stesso, che è inestendibile.

2. CONDIZIONI RELATIVE AL PROFILO FLESSIBILE. — In regime il profilo si mantiene invariabile, trovandosi in condizioni di sollecitazione stazionaria, cioè indipendente dal tempo: ogni suo elemento  $ds$  risulta infatti sollecitato normalmente dalla differenza delle pressioni sopportate dall'elemento stesso dalla parte di A e dalla parte di B. È noto [I. P., n. 104] che il valore della pressione in un generico punto di A è definito dalla seguente relazione:

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \mu (c^2 - V^2),$$

rappresentando  $p_0$  il valore costante della pressione in B, dove regna la quiete, e  $\mu$  la densità costante del liquido. Siccome  $c$  è il valore massimo di  $V$  in A e quindi  $V \leq c$ , dalla precedente risulta  $p \geq p_0$  e quindi ogni elemento  $ds$  di profilo subisce un'azione

$$(p - p_0) \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \mu (c^2 - V^2) \mathbf{n} ds,$$

essendo  $\mathbf{n}$  il vettore unitario normale al profilo e rivolto verso B; pertanto la forza unitaria, agente sul profilo, è

$$(3) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mu (c^2 - V^2) \mathbf{n}.$$

D'altra parte, la nota equazione vettoriale indefinita dell'equilibrio di un filo flessibile e inestendibile porge:

$$\mathbf{F} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0,$$

designando  $\mathbf{T}$  la tensione. Si assuma sul profilo l'arco  $s$  contato a partire da  $P_1$  positivamente nel verso  $P_1 \rightarrow P_2$ , con ciò la coppia tangente e normale è, in ogni punto del profilo, congruente a quella di riferimento e la tensione  $\mathbf{T}$  in P è quella esercitata dal tratto  $PP_2$ . Dalla precedente equazione vettoriale si ottengono le note equazioni intrinseche:

$$F_t + \frac{dT}{ds} = 0, \quad F_n + \frac{T}{\rho} = 0,$$

rappresentando  $F_t$  e  $F_n$  le componenti, tangenziale e normale, di  $\mathbf{F}$ ,  $T$  il valore della tensione e  $\frac{1}{\rho}$  la flessione. Possiamo applicare queste formule al profilo, tenendo presente che, per la (3),

$$F_t = 0, \quad F_n = \frac{1}{2} \mu (c^2 - V^2);$$

in conseguenza della prima delle precedenti equazioni si deduce che la tensione ha un valore costante  $T_0$  lungo  $\tilde{\omega}_1$  e  $\tilde{\omega}_2$ :

$$(4) \quad T = T_0, \quad \text{sopra } \tilde{\omega}_1 \text{ e } \tilde{\omega}_2;$$

la seconda, anche per questa, porge invece la seguente relazione:

$$(5) \quad \frac{1}{2} \mu (c^2 - V^2) + \frac{T_0}{\rho} = 0, \quad \text{sopra } \tilde{\omega}_1 \text{ e } \tilde{\omega}_2.$$



Sono queste le cercate condizioni che devono essere soddisfatte sul profilo flessibile. Per essere  $V \leq c$ , scende dalla (5) che  $\frac{I}{\rho} < 0$ , il che significa che il profilo rivolge la convessità verso la regione B. In particolare, nel punto O di prora è  $V = 0$  [I. P., n. 98] per cui chiamando  $-\frac{I}{\rho_0}$  ( $\rho_0 > 0$ ) la flessione in tal punto, si ottiene dalla (5):

$$(6) \quad T_0 = \frac{I}{2} \mu \rho_0 c^2.$$

*Condizione alla prora.* — Anche per il profilo flessibile l'angolo  $\vartheta$ , della velocità colla direzione della corrente, deve avere nel punto O di prora il comportamento specificato per i profili rigidi nel n. 99 di I. P. per  $2\alpha = \pi$  che, nel caso attuale porta a esprimere, chiamando  $\vartheta_1(O)$  il limite di  $\vartheta$  quando P tende a O scorrendo su  $\tilde{\omega}_1$  e  $\vartheta_2(O)$  il limite di  $\vartheta$  per P tendente a O sopra  $\tilde{\omega}_2$ , che si deve avere:

$$(7) \quad \vartheta_1(O) - \vartheta_2(O) = \pi.$$

3. RICORSO ALLA FUNZIONE AUSILIARIA  $\omega$ . — Poniamo, al solito [I. P., n. 99],

$$(8) \quad w = ce^{-i\omega}, \quad \omega = \vartheta + i\tau,$$

colla determinazione  $\omega = 0$  per  $\zeta \rightarrow \infty$ . Essendo:

$$(9) \quad V = \text{mod } w = ce^{\tau}, \quad \arg w = \vartheta,$$

le condizioni (1) e (2) danno rispettivamente:

$$(10) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \omega = 0, \quad \tau = 0, \quad \text{sopra } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2;$$

mentre la (5), per la prima della (9) e tenuta presente la (6), diviene:

$$\frac{I}{\rho} = \frac{I}{\rho_0} (e^{2\tau} - 1) = \frac{2e^{\tau}}{\rho_0} \cdot \text{Sh } \tau;$$

ma, atteso il significato di  $\vartheta$ , espresso dalla seconda delle (9), è

$$\frac{I}{\rho} = \frac{d\vartheta}{ds},$$

per cui si ha:

$$(11) \quad \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{2e^{\tau}}{\rho_0} \text{Sh } \tau.$$

D'altra parte la nota relazione [I. P., n. 31]

$$w = \frac{df}{d\tilde{\chi}},$$

per la (8) può scriversi:

$$ce^{-i\omega} = \frac{df}{d\tilde{\chi}},$$

dalla quale, eguagliando i moduli dei due membri, si ottiene:

$$ds = |d\tilde{\chi}| = \frac{e^{-\tau}}{c} |df|.$$

Rammentiamo che  $ds > 0$  quando si percorre il profilo nel verso  $P_1 \rightarrow P_2$  e che sul profilo stesso è  $d\psi = 0$  [I. P., n. 98] e quindi  $df = d\varphi$ ; avremo dunque

$$ds = \begin{cases} -\frac{e^{-\tau}}{c} d\varphi, & \text{sopra } \tilde{\omega}_1, \\ \frac{e^{-\tau}}{c} d\varphi, & \text{sopra } \tilde{\omega}_2. \end{cases}$$

Per queste la (11) diviene:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{2}{c\rho_0} \text{Sh } \tau, & \text{sopra } \tilde{\omega}_1, \\ \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{2}{c\rho_0} \text{Sh } \tau, & \text{sopra } \tilde{\omega}_2. \end{cases}$$

4. RIFERIMENTO A UN SEMICERCHIO. — Riferiamoci al solito semicerchio (fig. 2) [I. P., n. 100]  $\eta \geq 0$ ,  $|\zeta| \leq 1$  del piano  $\zeta = \xi + i\eta$ , riportando in tal campo le condizioni a cui devono soddisfare le funzioni  $f = \varphi + i\psi$

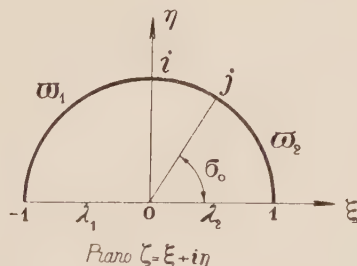


Fig. 2.

e  $\omega = \vartheta + i\tau$ , tenendo presente che i contorni dei due campi, A e l'accennato semicerchio, debbono corrispondersi com'è chiaramente indicato nelle figure 1 e 2. Alla prora  $\chi = 0$  corrisponde il punto  $\zeta = j = e^{i\sigma_0}$ .

La funzione  $f(\zeta)$  che nel semicerchio soddisfa a tutte le dovute condizioni è la seguente [I. P., n. 101, formula (·)]:

$$(13) \quad f = a^2 \left[ \cos \sigma_0 - \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right]^2.$$

Da questa per  $\zeta = e^{i\sigma}$ , ( $0 \leq \sigma \leq \pi$ ), si ricava:

$$\varphi = a^2 [\cos \sigma_0 - \cos \sigma]^2, \quad \psi = 0,$$

e quindi

$$d\varphi = 2a^2 [\cos \sigma_0 - \cos \sigma] \cdot \sin \sigma d\sigma.$$

Si noti che, per  $0 < \sigma < \sigma_0$  è  $d\varphi < 0$ , mentre per  $\sigma_0 < \sigma < \pi$  è  $d\varphi > 0$ , per cui le (12) danno, in ogni caso [I. P., n. 104],

$$(14) \quad \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \frac{4a^2}{c\rho_0} |\cos \sigma_0 - \cos \sigma| \cdot \sin \sigma \cdot \text{Sh } \tau, \quad (0 \leq \sigma \leq \pi).$$

Dunque  $\omega(\zeta) = \vartheta + i\tau$  dev'essere regolare entro il semicerchio, reale sull'asse reale e sulla semicirconferenza 1,  $i$ ,  $-1$  deve aver luogo tra  $\vartheta$  e  $\tau$  la relazione (14); siccome per il teorema di Schwarz [I. P., n. 5] la  $\omega(\zeta)$  è continuabile per riflessione nel semicerchio  $\eta \leq 0$ ,  $|\zeta| \leq 1$ , ricordiamo che sulla semicirconferenza 1,  $-i$ ,  $-1$ ,  $\vartheta$  e  $\tau$  avranno il comportamento risultante per riflessione, cioè dev'essere:

$$(15) \quad \vartheta(2\pi - \sigma) = \vartheta(\sigma), \quad \tau(2\pi - \sigma) = -\tau(\sigma).$$

Va pure tenuta presente la condizione alla prora (7) che, riferita al semicerchio, equivale alla seguente:

$$(16) \quad \vartheta(\sigma_0 + 0) - \vartheta(\sigma_0 - 0) = \pi.$$

5. SOLUZIONE LIMITE. - Una funzione  $\omega_0(\zeta)$  soddisfacente a tutte le condizioni specificate è la seguente:

$$(17) \quad \omega_0(\zeta) = \sigma_0 - \pi + i \log \frac{\zeta - j}{1 - j\zeta},$$

[I. P., n. 102, formula (·), in cui si faccia  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta = \sigma_0 - \frac{\pi}{2}$ ]. Essa corrisponde al caso in cui il profilo è infinitamente teso ( $T_0 = \infty$ ) e quindi la sua configurazione è rettilinea, per cui, in particolare  $\frac{1}{\rho_0} = 0$  e  $\vartheta'(\sigma) = 0$ . In tal caso la condizione (14) è identicamente soddisfatta, come pure le (15) e (16). Si ha insomma il problema di Helmholtz [I. P., n. 109] in

cui il profilo investito dalla corrente è una lamina rettilinea rigida, inclinata di  $\sigma_0$  sulla direzione della corrente (fig. 3). Ponendo

$$\omega_0 = \vartheta_0 + i\tau_0,$$

si ricavano dalla (17) le seguenti espressioni di  $\vartheta_0$  e  $\tau_0$  per  $\zeta = e^{i\sigma}$  e  $0 \leq \sigma \leq \pi$ :

$$\vartheta_0 = \begin{cases} \sigma_0 - \pi & \text{per } 0 < \sigma < \sigma_0, \\ \sigma_0 & \text{per } \sigma_0 < \sigma < \pi; \end{cases} \quad \tau_0 = \log \left| \frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\sigma + \sigma_0}{2}} \right|,$$

e quindi:

$$(18) \quad \text{Sh } \tau_0 = \frac{\sin \sigma_0 \cdot \sin \sigma}{\cos \sigma_0 - \cos \sigma}.$$

6. SOLUZIONE GENERALE. — Cerchiamo ora la soluzione generale, chiamando con questa denominazione quella soluzione corrispondente al caso

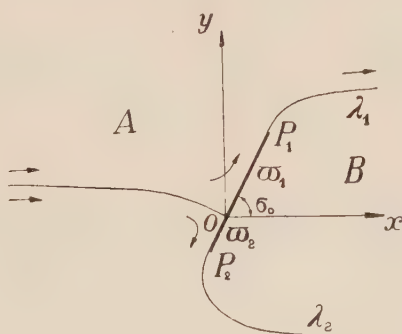


Fig. 3.

in cui i due estremi del profilo flessibile sono comunque prefissati nel piano del moto, purchè - s'intende - la loro distanza non superi la lunghezza del profilo.

Poniamo a tal uopo:

$$(19) \quad \omega = \omega_0 + \Omega,$$

designando  $\Omega$  una funzione di  $\zeta$  reale per  $\zeta$  reale, regolare per  $|\zeta| < 1$  e tale che per  $\zeta = e^{i\sigma}$  con  $0 \leq \sigma \leq \pi$ ,  $\omega$ , tenuto conto della espressione (17) di  $\omega_0$ , soddisfi alla condizione (14), oltre alla condizione (16). Precisamente, posto

$$\Omega = \Theta + iT,$$

si avrà

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta, \quad \tau = \tau_0 + T,$$

per cui, essendo, sulla semicirconferenza,

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{d\Theta}{d\sigma},$$

e, tenendo presente la (18),

$$\text{Sh } \tau = \text{Sh } (\tau_0 + T) = \frac{\text{sen } \sigma_0 \cdot \text{sen } \sigma \cdot \text{Ch } T + (1 - \cos \sigma_0 \cdot \cos \sigma) \cdot \text{Sh } T}{|\cos \sigma_0 - \cos \sigma|},$$

per cui la (14) diviene:

$$(20) \quad \frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{4a^2}{c\rho_0} \{ \text{sen } \sigma_0 \cdot \text{sen } \sigma \cdot \text{Ch } T + (1 - \cos \sigma_0 \cdot \cos \sigma) \cdot \text{Sh } T \} \cdot \text{sen } \sigma, \\ (0 \leq \sigma \leq \pi).$$

Si noti infine che la condizione di prora (16) è soddisfatta assumendo

$$(21) \quad \Theta(\sigma_0) = 0.$$

Per la relazione di Dini [I. P., n. 10] si ha, tenuto conto delle condizioni (15) di simmetria,

$$(22) \quad T(\sigma) = b_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Theta'(\sigma_1) \cdot \log \left[ \frac{\text{sen } \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}{\text{sen } \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \right]^2 d\sigma_1.$$

La eliminazione di  $T$  dalla (20), mediante quest'ultima relazione, dà luogo a un'equazione integrale nella incognita funzione  $\Theta'(\sigma)$  per  $0 \leq \sigma \leq \pi$ . Determinata la  $\Theta'(\sigma)$  si otterrà  $\Theta(\sigma)$  con una quadratura, la cui costante arbitraria risulterà determinata dalla condizione di prora (21). Basterà quindi applicare la formula [I. P., n. 9 (11)]

$$(23) \quad \Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Theta(\sigma) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} d\sigma,$$

con che risulterà completamente determinata la funzione  $\Omega(\zeta)$ .

Note le funzioni  $f(\zeta)$  e  $\omega(\zeta)$ , mediante (11) e (19), in cui  $\omega_0$  e  $\Omega$  sono definite da (17) e (23), si può determinare con una quadratura la relazione tra  $\chi$  e  $\zeta$  che, come sappiamo, risolve in modo completo il problema. Si ha infatti:

$$\frac{df}{d\chi} = w = ce^{-i\omega},$$

da cui

$$d\chi = \frac{1}{c} e^{i\omega} df,$$



e siccome, dalla (13), si ha:

$$df = \frac{a^2}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

si ottiene:

$$d\zeta = \frac{a^2}{2c} e^{i\omega} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

dalla quale, integrando e tenendo presente che a  $\zeta = j = e^{i\sigma_0}$  deve corrispondere  $\zeta = 0$ , si ottiene in definitiva:

$$(24) \quad \zeta = \frac{a^2}{2c} \int_0^{\zeta} e^{i\omega} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Si può asserire che questa relazione costituisce la soluzione del problema inquantochè, mediante essa, si possono determinare tutti gli elementi del moto [I. P., n. 104], in particolare, la forma del profilo flessibile e quella dei peli liberi.

Nelle relazioni (20) e (22) compaiono quattro costanti reali, *a priori* indeterminate:  $a, \rho_0, \sigma_0, b_0$ ; esse risulteranno determinate assegnando le posizioni degli estremi  $P_1$  e  $P_2$  del profilo.

**Fisica (Elettrotecnica).** — *Sopra un Voltmetro assoluto per la misura di grandi differenze di potenziale.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. L. LOMBARDI.

In una breve Memoria letta a Londra il 1° di maggio 1931 davanti alla *Institution of Electrical Engineers*, e pubblicata nel fascicolo di ottobre del suo giornale <sup>(2)</sup>, il prof. W. M. Thornton ha descritto un *Voltmetro assoluto*, adatto per la misura delle grandi differenze di potenziale; esso è costituito da un ellissoide metallico di rivoluzione, sospeso fra due armature piane e parallele, con l'asse maggiore inclinato di 45° rispetto alla direzione del campo.

Il momento elettrostatico, conferito ad un ellissoide generico di sostanza dielettrica da un campo uniforme, si calcola facilmente in base alla teoria classica sviluppata da Thomson e Tait <sup>(3)</sup> e riprodotta da Maxwell <sup>(4)</sup>; esso risulta proporzionale al volume dell'ellissoide ed alla intensità del campo, essendo il fattore di proporzionalità funzione complicata dei rapporti che

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) « Journal of the Inst. of Electr. Eng. », vol. 69, p. 1273.

(3) *Natural Philosophy*, vol. I, § 322.

(4) *Treatise*, vol. II, § 437.

intercedono fra gli assi, e che determinano i così detti *coefficienti di depolarizzazione*, nonchè della costante dielettrica. Il momento di rotazione della coppia, esercitata dal campo su l'ellissoide, è pertanto proporzionale al quadrato della intensità di campo, ed il fattore di proporzionalità è subordinato, oltre che ai parametri precedenti, alla inclinazione degli assi rispetto alla direzione del campo.

Tali azioni vennero già utilizzate da parecchi sperimentatori per la determinazione delle costanti dielettriche, e l'Autore della Memoria citata ricorda a buon diritto una lunga serie di misure da lui eseguita nel 1909, e pubblicata nei « Rendiconti della Società Reale di Londra » <sup>(1)</sup>, alla quale egli si riporta ancora nel lavoro attuale per la valutazione della coppia esercitata dal campo elettrico sull'ellissoide metallico, introducendo semplicemente un valore infinito per la costante dielettrica. Egli deduce poi elegantemente il momento di quella coppia dal numero di oscillazioni compiuto dall'ellissoide in presenza ed in assenza del campo, tenendone a base il momento d'inerzia, con che la intensità del campo viene calcolata indipendentemente dal momento unitario della coppia direttrice, supponendo questa naturalmente costante.

Su lo stesso principio l'Autore ha fondato la costruzione di un voltmetro trasportabile per alta tensione, ove l'ellissoide metallico, sottoposto alla coppia direttrice di una molla, subisce per l'azione del campo una deviazione permanente; questa fornisce, in base ad una graduazione empirica, la misura diretta della tensione in esame, e sotto questo riguardo la forma dell'apparecchio, non molto dissimile da quella di un elettrometro a quadranti di Kelvin, riveste un certo carattere di originalità.

Anche la disposizione del voltmetro assoluto, concepita dall'Autore, sembra d'altronde per alcuni riguardi bene appropriata allo scopo, e probabilmente troverà applicazioni, se non nell'uso corrente, ove lo spinterometro a sfere è di maneggio più semplice, nelle misure di precisione, per le quali l'elettrometro assoluto di Kelvin offre maggiori difficoltà di costruzione e di isolamento.

Ora la presente Nota ha per iscopo di richiamare, per la verità della storia, una ricerca sistematica, compiuta trentasei anni or sono nell'Istituto Fisico del Politecnico federale di Zurigo, ove i medesimi concetti trovansi già applicati e discussi in modo esauriente.

Nella mia tesi di dottorato *Sopra i fenomeni di polarizzazione in un campo elettrostatico uniforme*, presentata alla Facoltà Filosofica dell'Università di Zurigo, e accolta fra le Memorie dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino nella seduta del 9 giugno 1895, Relatore Galileo Ferraris <sup>(2)</sup>, prendendo le mosse da un gruppo di esperienze eseguite un anno prima da

(1) « Proceeding of the Royal Society », vol. 82, p. 422.

(2) Serie 2<sup>a</sup>, tom. XLV, pp. 171-234.

Graetz e Fomm, e pubblicate negli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Monaco » <sup>(1)</sup> io ho anzitutto dimostrato mediante numerose misure, eseguite con tre metodi diversi, il perfetto accordo fra i valori del potere induttore specifico dei dielettrici, dedotti dalla capacità elettrostatica di adatti condensatori, e quelli inerenti alle sollecitazioni loro conferite da campi uniformi continui e alternativi.

Imitando poi una disposizione originaria di Bjerkness <sup>(2)</sup>, intesa a misurare lo smorzamento delle onde Hertziane nei metalli, io mi servii già a quell'epoca di ellissoidi metallici molto schiacciati, e di dischi e lamine sottili, per costituire misuratori di campo, mediante i quali era possibile la determinazione assoluta delle tensioni continue e alternate in forma incomparabilmente più semplice di quella dell'elettrometro classico di Kelvin, e ne estesi l'intervallo fra poche decine e parecchie migliaia di volt. Le coppie direttrici venivano da me generalmente determinate in base al peso dell'equipaggio mobile ed agli elementi geometrici della sospensione bifilare; ma furono anche controllate in base al momento d'inerzia ed alla durata di oscillazione.

I valori della tensione vennero indipendentemente misurati mediante un altro voltmetro elettrostatico, controllato con strumenti campione.

Che quel lavoro, pubblicato nei primordii della mia carriera scientifica, fosse sfuggito all'attenzione del Thornton quando iniziò le sue belle ricerche sopra i dielettrici, non fu occasione di meraviglia, per la oscurità del mio nome, e la limitata diffusione che avevano a quel tempo all'estero gli Atti delle nostre Accademie. Molti altri sperimentatori si valsero d'altronde nella successione del tempo di artifizi analoghi, riportandosi direttamente alla teoria di Thomson e Tait, ovvero limitandosi a graduare empiricamente i loro apparecchi mediante il confronto con altri apparecchi normali.

Così apparve dopo due anni dalla mia ricerca, nella « Zeitschrift für Instrumentenkunde » <sup>(3)</sup>, un pregevole lavoro di H. Hebert e M. W. Hoffmann, i quali del pari descrissero un apparecchio elettrostatico molto simile a quello da me adoperato. Ivi la coppia direttrice era peraltro realizzata mediante l'aggiunta all'equipaggio mobile di una piccola calamita, che serviva contemporaneamente da smorzatore, ed era sottoposta all'azione del campo terrestre, ovvero a quella di una calamita esterna, atta a variarne l'orientamento e la sensibilità; la lamina indotta d'alluminio, di forma rettangolare, era sostenuta da un filo di quarzo. Gli stessi Autori accennavano anche alla possibilità di determinare *a priori* la coppia direttrice, e di impiegare lo strumento per misure assolute; ma non risulta che in tal senso se ne siano serviti.

(1) « Sitzungsberichte », 1893-94.

(2) « Compt. rend. », 115, E. T. Z., 10 febbraio 1893.

(3) Vol. XVIII, gennaio 1898, p. 1.

Ora l'Autore inglese, il cui nome è ben noto nella letteratura scientifica dell'ultimo ventennio, ripresenta questa come una soluzione nuova del problema, relativo alla misura assoluta delle alte tensioni. Senza infirmare la genialità di talune sue disposizioni, che potranno praticamente agevolarne l'impiego anche in casi di tensioni notevolmente elevate, è lecito affermare che non solo la teoria dell'apparecchio era perfettamente nota, ma anche la sua pratica applicabilità era già stata dimostrata in modo conclusivo.

Nel Laboratorio Elettrotecnico della Scuola d'Ingegneria di Napoli esiste da oltre 25 anni un elettrometro di questo tipo, simile a quello provvisto da Hebert e Hoffmann per l'Università di Kiel, costruito su mie indicazioni dall'antica Officina Dall'Eco di Firenze, il quale, mediante la varia dislocazione delle due armature circolari, munite di sostegni isolanti e di viti micrometriche, e mediante il cambiamento del disco indotto e la regolazione della coppia bifilare di sospensione, può adattarsi alla misura di tensioni continue o alternate di forma qualunque, comprese nell'intervallo da pochi volt ad alcune migliaia. Esso ha il vantaggio di possedere una capacità elettrostatica molto piccola, per cui si adatta anche alle misure in alta frequenza; è completamente protetto mediante un involucro metallico contro le influenze esterne; è munito di smorzatore ad aria e ad olio, e di specchio per le osservazioni a distanza mediante il cannocchiale e la scala; può essere indifferentemente tarato mediante il confronto con altri voltometri di precisione, ovvero utilizzato come elettrometro assoluto. La curva delle deviazioni, prodotte da un campo costante al variare della inclinazione del disco rispetto alla direzione di esso, venne molte volte rilevata dagli studenti nel corso delle pratiche esercitazioni, e corrisponde perfettamente alla legge teorica.

È altrettanto facile con un apparecchio analogo dimostrare i fenomeni di polarizzazione dissimmetrica, indotta da un campo magnetico in un ellissoide di modesta suscettibilità, di che io mi valse in un'altra sistematica ricerca *Su le sostanze debolmente magnetiche*, analogamente presentata all'Accademia Reale di Torino nel novembre 1896<sup>(1)</sup>. Per le misure assolute su le sostanze diamagnetiche, che notoriamente sono affette da una suscettibilità molto esigua, il metodo non poteva a quell'epoca fornire risultati egualmente attendibili, per la difficoltà di realizzare entro spazi convenientemente estesi campi sufficientemente uniformi. Oggi la difficoltà si potrebbe vincere ricorrendo alle potenti elettrocalamite, create in questi ultimi anni, mediante le quali anche questo interessante campo di ricerca risulta considerevolmente ampliato.

(1) Serie 2<sup>a</sup>, tom. XVIII, pp. 1-38.



**Fisica.** — *Nuove idee sulla teoria di relatività.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. G. GIORGI.

1. La teoria di relatività è passata attraverso tre stadi: la prima relatività del 1905 (così detta relatività ristretta); la seconda relatività del 1913 (impropriamente detta relatività generalizzata) con la conseguente teoria del campo gravitazionale e coi successivi tentativi di Weyl per includere la dottrina del campo elettromagnetico; la terza fase delle teorie di relatività, a cui appartengono gli schemi di Einstein per una descrizione unitaria del campo di gravitazione e di quello elettromagnetico, e quelli di vari autori allo stesso intento, fino a quello recentissimo di P. Straneo.

Enuncio alcuni suggerimenti che potrebbero avviare a un passo ulteriore.

2. Si ricorderà che Reichenbach ha distinto le forze in due categorie: *forze metriche*, quelle che agiscono in proporzione alla massa dei corpi, e che quindi si possono annullare *localmente* (cioè in un dato punto-istante) con una scelta opportuna della piattaforma di riferimento: *forze fisiche*, tutte le altre. La distinzione risale alla teoria da me esposta nel 1912, e da cui derivò l'enunciato del principio di equivalenza di Einstein. Sono forze metriche la gravità e le forze di Coriolis. Sarebbero forze fisiche, nel mondo macroscopico, quelle esercitate per contatto, le tensioni e pressioni elastiche, le azioni elettriche e magnetiche. Invece, nella fisica microscopica, le uniche forze fisiche sarebbero quelle che il campo elettromagnetico esercita sugli elettroni e protoni.

Ora, osserviamo, e sempre nel campo microfisico: fino a che si comparano solamente granuli elettrici dello stesso segno, o insiemli di essi, la forza di origine elettromagnetica essendo proporzionale alla carica elettrica è uguale per tutti i singoli granuli, e quindi si può anche dire che è proporzionale alla massa. Adottando allora una piattaforma opportuna di riferimento (diversa per ogni singolo punto-istante del campo gravitazionale-elettromagnetico) si può riuscire ad annullare localmente la risultante delle forze metriche e fisiche su ogni granulo, il che è come dire che anche la forza fisica è divenuta forza metrica. Una particolare piattaforma sarà però quella che vale pei protoni, un'altra quella che vale per gli elettroni negativi. Se cerchiamo di precisare in che cosa consiste il cambiamento richiesto di piattaforma, a partire da quella K (così detta piattaforma di Lange) che annullerebbe le sole forze metriche di antico tipo, andiamo

(1) Presentata nella seduta del 12 aprile 1931.



incontro ad una coincidenza molto interessante. La forza che il campo elettromagnetico, definito dal vettore elettrico  $\mathbf{E}$  e dal vettore magnetico  $\mathbf{M}$  esercita sul protone di carica  $e$ , dotato di velocità  $\mathbf{w}$ , è data da

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{w}\mathbf{M}]_v$$

dove  $[\ ]_v$  è il simbolo di vettore-prodotto.

Scrivendo  $e = km$  dove  $m$  è la massa del granulo, mentre  $k$  è una costante assoluta, e ponendo

$$k\mathbf{E} = \mathbf{E}' \quad , \quad k\mathbf{M} = \mathbf{M}'$$

si avrebbe

$$\mathbf{F} = m\mathbf{E}' + m[\mathbf{w}\mathbf{M}']_v$$

e questa formola vale anche per un ammasso di protoni, quando in luogo di  $m$  si prenda la massa complessiva.

Ora, il primo termine è analogo alla forza che sarebbe esercitata da un campo di intensità  $\mathbf{E}'$  sovrapposto a quello esistente. Ma il secondo, notiamo bene, ha tutti i caratteri di una forza deviatrice di Coriolis, perchè è proporzionale al campo e alla velocità, e normale ad entrambi. *Noi possiamo ben dire che la forza così detta magnetica, che è quella rappresentata dal detto secondo termine, è una forza di Coriolis.* Scegliendo localmente una piattaforma  $K'$  con l'accelerazione  $\mathbf{E}'$  (rispetto a quella  $K$ ) e rotante con velocità angolare  $= \frac{\mathbf{M}'}{2}$ , scompaiono entrambe le forze, e la legge

fondamentale della fisica si riduce a questa, che ogni protone o gruppo di protoni si muove con accelerazione nulla rispetto alla piattaforma  $K'$  in quel punto-istante: cioè questa  $K'$  funziona, per protoni o insiemi di protoni, come piattaforma inerziale. La rotazione della piattaforma deve concepirsi avvenire intorno a un asse a cui appartiene il punto dello spazio che si considera, in modo da non originare termini dovuti a forza centrifuga.

Per gli elettroni negativi si determina similmente, per ogni punto istante, altra analoga piattaforma  $K''$  le cui condizioni di moto, rispetto a quella di *Lange*, non sono simmetriche rispetto alla precedente, perchè assai diverso è il rapporto fra massa e carica elettrica. Delle due  $K', K''$  la  $K'$  è quella che più si avvicina alla  $K$ .

3. Il fatto dell'esistenza di una particolare piattaforma inerziale in ogni punto-istante, si può tradurre, quando si preferisca il linguaggio geometrico-differenziale, nell'esistenza di una particolare metrica dello spazio-tempo.

Diremo allora che mentre in assenza di campo elettromagnetico la matrice dello spazio è quella della seconda relatività di Einstein, il campo

elettromagnetico consiste invece in uno sdoppiamento di essa matrice in due altre, una valevole pei granuli positivi, e una pei negativi.

Quando si ha un gruppo materiale neutro, p. es. un atomo normale, composto di un insieme di protoni e un insieme equivalente di elettroni, questo gruppo non segue più l'una o l'altra delle due metriche, perchè l'insieme positivo modifica il campo elettromagnetico che agisce sugli elettroni, e quello negativo ha una reciproca azione sui protoni, e il risultato è che il gruppo generale, considerato come una particella unica, segue un moto risultante, lo stesso come se il campo elettromagnetico non vi fosse. Apparentemente è come se oltre alle due metriche singole, esistesse anche quella intermedia, o puramente gravitazionale. Questo è però solamente un effetto d'insieme, perchè nei fenomeni che dipendono dai moti delle singole particelle componenti, l'effetto del campo, e quindi delle due metriche che agiscono separatamente, si risente distinto (fenomeno Zeeman e consimili). Se i quanti di luce o fotoni si potessero comparare a corpuscoli puntiformi, come voleva la ipotesi originaria di Einstein, essi varrebbero bensì come particelle neutre, non composte di elementi positivi, e negativi, e dovremmo dire che per essi vale la metrica intermedia, come fatto a sè. Ma in realtà oggigiorno il modello strettamente corpuscolare pei quanti di luce è stato abbandonato: sappiamo che esso era una schematizzazione di fatti complessi, e anche senza analizzare i particolari si comprende che l'adattamento delle traiettorie luminose alla metrica del campo neutro può essere un fatto risultante.

Si comprende dunque come l'accettazione di una metrica dello spazio tempo che sia di tipo piatto o pseudo-euclideo nelle plaghe galileiane, di tipo riemanniano nei campi di gravitazione, e che si sdoppi in due altre più complesse nei campi elettromagnetici, possa rendere conto di tutti i fatti « ambientali », cioè dipendenti dallo spazio-etero.

4. Ma come si collegherebbe questa concezione con una spiegazione della materia?

Ricordo quanto ho altra volta enunciato, cioè che pur tenendo valida la teoria einsteiniana del 1913-1916, il rigoroso mantenimento del principio relativista, cioè della covarianza dei fenomeni fisici rispetto alle trasformazioni lorentziane, vale solo nelle plaghe galileiane: dove lo spazio-tempo è curvo, s'individuano, punto per punto, triedri privilegiati, atti a costituire riferimenti non solo per le accelerazioni, ma anche per le velocità.

Ora la caratteristica della materia ordinaria, in confronto allo spazio-etero vuoto, consiste appunto nel poter divenire supporto di assi di riferimento, distinguibile da altri qualunque che differiscano anche per un solo moto uniforme. In parole più materiali, i triedri atti a costituire riferimento per la velocità, non si possono attaccare allo spazio-etero libero, ma bensì alla materia.

Di fronte a questo, vediamo come Einstein ha avuto ragione a considerare come « materia » i campi elettromagnetici e come questo attributo sia sotto un certo punto di vista applicabile a tutti i tensori energetici, compresi quelli del campo gravitazionale. L'effetto antirelativistico della curvatura dell'ambiente non si risente in modo accessibile all'esperienza nei campi d'intensità ordinaria, ma si comprende che deve acquistare importanza nella vicinanza immediata di quei punti singolari che sono i granuli elementari.

Per render conto di questi granuli elementari completamente, occorre poter spiegare qualche cosa a cui nessuna teoria fisica si è finora avvicinata. Perchè gli elettroni sono tutti uguali fra loro? Perchè lo sono i protoni? Perchè i primi sono disuguali dai secondi, e con proprietà così dissimetriche in quanto a entità della massa inerte? In quale relazione tutto questo sta con la costante quantistica?

Pei fatti quantistici, sembra che un primo tentativo soddisfacente di inquadramento teorico si possa riscontrare nelle recenti costruzioni matematiche di Dirac, Jordan, Fermi e altri autori contemporanei. L'obiezione che alcune equazioni di questi nuovi schemi non siano relativiste non mi sembra preoccupante; può essere anzi in accordo con quanto ora ho osservato sulla perdita della relatività in prossimità immediata della materia. Ma pei granuli?

Se ogni granulo elementare è uno stato o un campo, che soddisfa a una certa equazione fondamentale dello spazio-etero, bisogna che le soluzioni di questa equazione siano tali da non poter essere moltiplicate per una costante numerica; il che fa pensare a un'equazione non lineare. Ma questo varrebbe soltanto se il discontinuo dovesse provenire dal continuo.

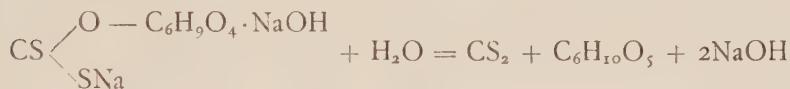
È certo che le impalcature principali della fisica elementare e atomica non sono ancora tutte rivelate; forse la parte più interessante ci sfugge ancora: e le risposte ai quesiti sul perchè dei granuli materiali si collegheranno forse con la formazione della scienza fisica nucleare, e la discussione più approfondita su quanto riguarda il determinismo o probabilismo dei fenomeni elementari, le così dette « regole di proibizione », e le modificazioni alla concezione di spazio-tempo che potranno introdursi col tener simultaneamente conto degli spazi di fase.

**Chimica.** — *Sul xantogenato di cellulosa e la viscosa.* Nota<sup>(1)</sup>  
del Socio E. PATERNÒ.

Lo studio del xantogenato di cellulosa è stato, da noi, appena iniziato.

Prima di tutto: il xantogenato è un vero composto chimico, oppure è il risultato dell'adsorbimento di varie sostanze, è un complesso colloide della natura dei colloidi misti, simili a quelli trovati da Paternò e Mazzucchelli per il fluoruro di calcio? Noi che pensiamo che la sodio-cellulosa non sia un composto, siamo inclinati invece a credere per semplicità che il xantogenato di cellulosa, per quanto instabile, sia un vero composto.

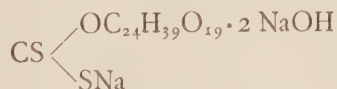
Ammettiamo per il xantogenato, appena formato, la composizione



ed ammettiamo che un tale composto durante la maturazione della sua soluzione alcalina (viscosa) si decomponga perdendo  $\text{CS}_2$  e producendo dei xantogenati nei quali resta costante il gruppo  $-\text{CS}-\text{SNa}$ , e sono invece contenuti da 2 a 4 gruppi di cellulosa con  $\text{ONa}$  od anche  $\text{OH}$ <sup>(2)</sup>.

Il diverso grado di maturazione si riconosce dal fatto che la soluzione contenente il primo di questi xantogenati non è precipitabile dagli acidi deboli e dal cloruro di sodio; quella contenente il secondo è coagulata dal cloruro di sodio, e l'ultimo che viene precipitato anche dagli acidi deboli e dall'alcool è il più adatto a fornire buone viscose. (Però la letteratura di questo argomento è notevolmente confusa e contraddittoria). Una ulteriore maturazione fa rapprendere il xantogenato in massa gelatinosa.

Rammenteremo soltanto che Wisthoff sino dal 1916 facendo cadere la viscosa ottenuta con xantogenato preparato da Linters per filo sottile nell'alcool dice di aver ottenuto un xantogenato della composizione



che è accettata da Heuser e Schütter<sup>(3)</sup>.

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 2 novembre 1926.

(2) HEUSER e SCHÜTTER, « Cell. Chem. », 1926, t. VI.

(3) HEUSER e SCHÜTTER, « Cell. Chem. », 1926, t. VII.



Anche Wollfenstein ed Oeser <sup>(1)</sup> hanno fatto parecchie analisi di xantogenato.

Avendo sin dal principio incontrato delle forti difficoltà nella determinazione dello zolfo nella viscosa, abbiamo cominciato dallo studio e confronto di diversi processi coi seguenti risultati:

1. Il metodo Carius non si può applicare alla viscosa perchè la percentuale di acqua che essa contiene è tale da diluire oltre misura l'acido nitrico.

2. Il metodo di Gasparini, per la difficile ossidabilità del  $CS_2$ , per la sua volatilità e per la costruzione dell'apparecchio a nostra disposizione non è consigliabile. Operando con xantogenato di rame nelle più felici condizioni, si è ottenuto 31.89 di zolfo, invece di 34.70,

3. L'ossidazione con ipobromito che dà risultati discreti nella determinazione dello zolfo nelle film ottenute per evaporazione della viscosa, con solfuro di carbonio dà invece perdite enormi (28.64 invece di 84.21), e anche per il xantogenato e la viscosa le perdite sono notevoli.

4. Il procedimento di Schmith e Dumont <sup>(2)</sup> dà ottimi risultati per solfuro di carbonio ossia 99.76 invece di 100, e con la viscosa ha fornito in tre esperienze risultati abbastanza concordanti (2.58 — 2.64 — 2.44). Poichè questo metodo è relativamente rapido, è consigliabile in queste determinazioni.

Partendo dalla supposizione fondata che il xantogenato sia un corpo colloide, al solo scopo di determinare e seguire l'andamento della sua decomposizione, abbiamo fatto alcune determinazioni crioscopiche. La viscosa di partenza conteneva

NaOH . . . . .	6.72 %
Cellulosa . . . . .	8.03

ed aveva la viscosità di 158.

In una prima serie di esperienze si ebbe:

N.	Peso viscosa	Abbassamento termometrico
1	2.12	0.08
» 2	4.30	0.22
» 3	7.20	0.34
» 4	11.40	0.55
» 5	20.80	0.91
» 6	25.50	1.09
» 7	35.00	1.34
» 8	40.00	1.44

(1) WOLLFENSTEIN e OESER, «Kunstseide», 1925, t. VII.

(2) SCHMITH e DUMONT, «Chem. Zeit.», t. II, pp. 489-510.



In una seconda serie si ebbe:

	Peso viscosa	Abbassamento termometrico
N. 1	11.80	0.60
» 2	19.00	0.91
» 3	32.50	1.28
» 4	42.50	1.53
» 5	54.00	1.76
» 6	63.50	1.92
» 7	73.00	2.09
» 8	86.00	2.28

Le due serie sono completamente corrispondenti, come può vedersi chiaramente tracciando i diagrammi. Sono in corso le esperienze con viscosa a diverso grado di maturazione.

In questa viscosa era contenuto il 6.72 % di NaOH, e nella esperienza N. 8 della seconda serie in gr. 86 di viscosa dovevano essere contenuti 5.8 gr. circa (5.7762) di NaOH che da soli avrebbero dovuto produrre un abbassamento molto maggiore. Ed invero la sola soda a concentrazione del 7 % produce un abbassamento superiore agli 8°, mentre la viscosa con più del 6 % di soda, produce un abbassamento di poco più di 2°. Questo si può osservare meglio tracciando un diagramma. A questo proposito richiamiamo le ricerche di Paternò e Medigrecianu sopra alcuni peptonati metallici, che presentano qualche analogia colle soluzioni di viscosa, le quali ci hanno spinto a cominciar studi sulla dialisi della viscosa.

Abbiamo anche studiato l'azione della corrente elettrica sulla viscosa. Si operò con gr. 250 di viscosa contenuta in un vaso di vetro, dentro il quale era immerso un cilindro poroso (vaso da pila) contenente acqua distillata. Nell'acqua fu immerso un elettrodo di nichel (—) e nella viscosa un altro elettrodo pure di nichel (+). L'acqua era resa conduttrice da una piccola quantità di NaOH. La corrente adoperata era di 6 volts. Dopo alcuni giorni, durante i quali si era notato svolgimento di H<sub>2</sub>S, si trova la viscosa rappresa in una massa gelatinosa di colore giallo, non più scorrevole, e che si lasciava facilmente spezzettare; da questa per sgocciolamento si ottengono appena 20 cc. di liquido. Il resto dell'acqua era incorporato dalla gelatina e nel vaso poroso era passata la soda. La massa gelatinosa, disseccata, lascia un residuo di ceneri del 4.5 %. Questa gelatina, disseccata all'aria sopra carta da filtro, si raggrinza e si divide in pezzetti che per prolungato asciugamento danno masse dure, traslucide, di apparenza cornea, come l'ossi-cellulosa da noi già descritta altrove. Bisogna, com'è stato fatto coi peptonati metallici, fare la dialisi sino a che la parte non diffusa congela a 0° e farne poi l'analisi.

Una esperienza preliminare di dialisi ci ha dato un risultato che incoraggia a continuare questo studio, che cioè il solfuro passa più lentamente dell'idrato, onde potrebbe dedursi che la cellulosa abbandona più facilmente l'idrato che non il solfuro. Il fenomeno è però molto complicato e merita un attento esame <sup>(1)</sup>.

Finiremo con una impressionante esperienza. Fu preparata dell'alcali-cellulosa, in condizioni identiche, con cellulosa di fabbrica in fogli e con la stessa cellulosa preventivamente molita. Si trasformò in xantogenato ed in viscosa, e si determinò la viscosità. La viscosità di quella proveniente dalla cellulosa in fogli era di 225, e di quella ottenuta dalla medesima cellulosa, ma preventivamente molita, era invece 45, ossia  $\frac{1}{5}$  della prima. Ripeteremo questa esperienza prima di azzardarne la spiegazione.

Abbiamo fatto anche numerose esperienze per preparare la alcali-cellulosa ed il xantogenato sostituendo all'idrato sodico il solfidrato o il solfuro di sodio, ma finora non abbiamo ottenuto risultati precisi per varie cause fra le quali non ultima quella, che la soluzione di  $\text{Na}_2\text{S}$  in acqua, anche saturata con  $\text{H}_2\text{S}$ , non sembra che si trasformi in solfidrato, ma sembra che dia un miscuglio di solfidrato e di idrato.

**Chimica.** — *Cellulosa solubile o peptonizzata.* Nota <sup>(2)</sup> del Socio E. PATERNÒ.

P. P. von Weimar <sup>(3)</sup> ha provato che la cellulosa può essere trasformata in una soluzione colloide per trattamento con la soluzione acquosa di alcuni sali. Si sospendono gr. 3 di cellulosa in cc. 100 di acqua, indi si aggiunge il sale (cloruro di litio, bromuro di calcio, tiocianato di manganese) e si riscalda per un certo tempo; poscia, diluendo la soluzione e lasciandola raffreddare, si separa la cellulosa allo stato di gelatina. Se si continua l'aggiunta di sale ed il riscaldamento, anche diluendo, la cellulosa rimane indisciolta.

Per i sali indicati la peptonizzazione avviene alla pressione ordinaria (o più precisamente alla temperatura di ebollizione della soluzione), in altri casi, come coi cloruri di sodio e di calcio, è necessario scaldare a  $170^\circ$  in recipienti chiusi, onde la pressione (8 atm.) può essere un fattore secondario.

Con soluzioni sature di nitrati o sali aloidi di litio, sodio, calcio e stronzio la peptonizzazione avviene alla temperatura di ebollizione che è notevolmente superiore ai  $104^\circ$ .

(1) Vedi studi di PATERNÒ e MEDIGRECIANU sui peptonati metallici, « Gazz. Chim. », t. XXXXIII, p. 439.

(2) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

(3) P. P. VON WEIMAR, « Zeit. Chem. Ind. u. Colloid. », 1912, t. 1, p. 41.

Un'altra forma di cellulosa solubile è stata ottenuta da Guignet <sup>(1)</sup> il quale ha avuto una idro-cellulosa solubile, che per noi vale lo stesso che cellulosa, impregnando la carta da filtro svedese, o il cotone cardato, previamente disseccato, con acido solforico a 50° Bè. La cellulosa si trasforma così in una massa gelatinosa che conserva indefinitamente il suo aspetto, se non s'innalza la temperatura. Lavata con acqua e poi con alcool, per togliere le ultime tracce di acido, si scioglie completamente in acqua pura dando una soluzione torbidiccia che si lascia filtrare facilmente. La soluzione coagula per aggiunta di sali o di alcool. Non riduce il liquido di Fehling e non è colorata dallo jodio. Disseccando la soluzione sopra una lastra di marmo unta di vasellina si ottiene una pellicola splendente, semitrasparente, che con acqua fredda si rigonfia producendo la soluzione primitiva.

Altre forme di cellulosa o idro-cellulosa (usiamo questo nome nel senso antico) sono state ottenute anche meccanicamente polverizzando la cellulosa in seno all'acqua in un olandese.

Ma sono queste delle soluzioni, anche colloidali, di cellulosa pura o sono dei miscugli con prodotti di trasformazione della vera cellulosa? Il tannino che ha caratteri colloidali pronunziatissimi si scioglie in acqua, ma è riprodotto inalterato per il disseccamento. Gli albuminoidi coagulati forniscono invece delle soluzioni colloidali di peptoni. La cellulosa solubile si comporta come il tannino oppure come le albumine. In nessun caso, che sia a nostra conoscenza, dalle così dette soluzioni di cellulosa, si è ottenuta la cellulosa; al più si ottiene idro-cellulosa che è un miscuglio di almeno due sostanze, e non si può perciò escludere che sia quest'altra sostanza ad agevolare la peptonizzazione della cellulosa.

Recentemente Th. Lieser <sup>(2)</sup> ha pubblicato un lavoro sulla cellulosa solubile in alcali, che, sebbene non abbia stretta relazione con l'argomento che trattiamo, pure merita di essere tenuto presente.

Ed in vero, fra le altre osservazioni, vi è quella che nel fenomeno di trasformazione della cellulosa in cellulosa solubile in alcali al 10 % (idro-cellulosa di Knoevenagel e Busch, cellulosa *A* di Hess, cellulosa fosforica di Karrer e Lieser), la cellulosa subisce delle trasformazioni che non hanno per base la idrolisi; ciò che conferma il nostro modo di pensare.

(1) GUIGNET, «C. R.», t. 108, p. 1256.

(2) TH. LIESER, «Cell. Chem.», t. 6, p. 85, 1926.

**Chimica.** — *Composizione della seta artificiale.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio E. PATERNÒ.

Generalmente la seta artificiale ottenuta da cellulosa, sia dalla viscosa, sia per altre vie, viene considerata come idro-cellulosa pura, e solo da taluni è stato aggiunto che essa contiene della così detta *cellodestrina*. In numerosi brevetti è affermato che la viscosa, appena uscita dal bagno coagulante, ha già subito la sua completa trasformazione in idrocellulosa. Il Weltzien, uno dei principali collaboratori di Hess, non ha avuto ritegno di affermare, con mirabile semplicismo, che è necessario per avere una buona seta artificiale, ottenere la fibra della cellulosa non alterata, e parla di cellulosa invariata nella struttura chimica. Il Wolberg recentissimamente <sup>(2)</sup> afferma di aver trovato nella seta artificiale nientemeno che l'83 % di alfa-cellulosa.

La decomposizione del xantogenato e la conseguente formazione del filo di seta non avviene di colpo nel bagno coagulante, ma si compie attraverso tutti i successivi trattamenti; la decomposizione del xantogenato nel bagno coagulante non è così profonda come è ammesso generalmente.

Osserveremo pure preliminarmente che nella seta finita ed imbiancata lo zolfo non è contenuto in proporzioni apprezzabili, e che in essa non si trova maggior proporzione di ceneri di quanto non contenga la cellulosa di partenza. Nella seta della Châtillon non supera il 0.3 % e lo stesso avviene per molte sete di fabbriche estere da noi analizzate. Osserveremo solo che la natura dell'acqua di lavaggio ha una certa influenza sul contenuto di ceneri.

Anche i pentosani contenuti nella cellulosa vengono trasportati nella seta; tanto nella cellulosa quanto nella seta si trova dall'1-1.5 % di pentosani. È degno di nota che i pentosani, circa nella stessa proporzione che nella seta, si rinvencono nel prodotto residuale della seta trattata con idrato sodico al 18 %.

Risultati che presentano il carattere di vera novità e che sono della maggior importanza sono stati ottenuti trattando la seta con soda di mercerizzazione, col desiderio di conoscere quanta emi-cellulosa fosse in essa ancora contenuta.

Trattando la seta con soda, nelle precise condizioni della determinazione dell'emi-cellulosa nella cellulosa, abbiamo ottenuto una proporzione di sostanza disciolta variabile dal 25 al 30 %, mentre nella seta cupro-ammoniacale ne abbiamo trovato soltanto il 10 %.

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

(2) WOLBERG, « Cell. Chem. », 1926, p. 67.

Questo risultato ha reso necessario uno studio più esteso. Ecco un quadro dei principali risultati ottenuti su prodotti disseccati a 100°:

1. Cotone idrofilo . . . . .	1.73 %
2. Cellulosa di fabbrica . . . . .	11.00 »
3. Seta Châtillon . . . . .	31.50 »
4. » Breda . . . . .	22.50 »
5. » Borwisck . . . . .	27.90 »
6. » Courtauld . . . . .	36.10 »
7. » Emmenbrück . . . . .	30.40 »
8. » Arnken . . . . .	20.10 »
9. » Poltner . . . . .	25.80 »
10. » Rottweil . . . . .	25.10 »
11. » Thiele (cupro-ammoniacale)	10.61 »
12. » Chardonnet . . . . .	dal 20-25 %

Il fatto intanto che la barite estrae dalla seta una proporzione di sostanza molto minore di quella estratta dalla soda al 18 %, non ha significato, essendo noto che le sostanze alcaline sciolgono più o meno cellulosa, secondo la loro concentrazione, e che la barite e la calce non possono adoperarsi alla stessa concentrazione della soda, molto più solubile. Per ottenere risultati paragonabili abbiamo perciò dovuto fare esperienze con soda più diluita, anzi alla stessa concentrazione della barite e della calce. Per brevità non riportiamo tutti i dati sperimentali, e diremo soltanto che facendo bollire gr. 10 di sostanza con gr. 1 di calce viva e 250 cc. di acqua per 12 ore abbiamo in soluzione:

Ovatta . . . . .	1.20 %
Cellulosa di fabbrica . .	9.50
Seta Châtillon . . . . .	4.20
Seta Rottweil . . . . .	7.00.

Con la barite abbiamo potuto operare con soluzioni dall'1 al 4 % in confronto alla soda alla stessa concentrazione ed abbiamo trovato che la seta perde per il trattamento con acqua di barite al 4 % (12 ore di ebollizione) all'incirca la medesima percentuale che perde per 12 ore di ebollizione con soda pura al 4 %, e precisamente il 4.7 % con la barite ed il 5.9 % con la soda.

Risulta dunque da queste esperienze che la seta viscosa non è idrocellulosa, nome che del resto non ha chimicamente alcun significato, ma è invece un miscuglio della sostanza sciolta dalla soda con una forma di cellulosa ancora non definita. Per quello che concerne la sostanza traspor-



tata dalla soda, come abbiamo dimostrato in altro luogo, essa non è altro che ossi-cellulosa, ed il nome di cello destrina, con la quale da taluni è stata indicata, non ha ragione di essere conservato. La cello destrina dovrebbe avere la stessa composizione elementare della cellulosa e corrispondere alla forma semplice di un idrato di carbonio  $C_6H_{10}O_5$ , mentre il prodotto estratto dalla seta contiene carbonio in meno, ed ha la composizione della ossi-cellulosa di Knotz, di quella di Nastukoff e via discorrendo. Queste analisi sono state illustrate nella Nota *Sull'ossicellulosa* e crediamo inutile insistervi.

Ma sulla seta artificiale dobbiamo registrare un altro fatto, che molte cose chiarisce e molte supposizioni sfata.

Nitrando nelle stesse condizioni l'ovatta e la seta artificiale, si ottiene con rendimento quantitativo eguale un nitro-derivato che vogliamo dire identico, e che contiene nel primo caso 11.22 % in peso di azoto, nell'altro 11.10 %. Ciò non può spiegarsi che con due ipotesi che si completano fra loro; la prima che anche l'ossi-cellulosa sia nitrabile, la seconda che nella nitratura dell'ovatta si formi ossi-cellulosa, cosa che del resto è stata osservata da tempo. Ma una conseguenza ne risulta, che cioè la nitro-cellulosa non è un corpo unico ma un miscuglio, e che la seta Chardonnet (dal nitrocotone) deve anch'essa contenere dell'ossi-cellulosa. Noi abbiamo in corso le esperienze necessarie per chiarire questo importante argomento che può anche influire per preparare degli esplosivi nei quali il rapporto fra vero nitrocotone e nitro-ossi-cellulosa sia determinato a piacere, dando alle polveri caratteristiche diverse.

Lo svolgimento di questi studi servirà a chiarire la ragione per la quale la nitro-cellulosa e gli acetil derivati sono ora insolubili ora solubili nei solventi organici. Il problema è della maggiore importanza e la sua soluzione non mi sembra difficile.

Il fenomeno della gelatinizzazione deve essere esaminato dal punto di vista non di una sostanza specie chimica unica, ma nei miscugli nei quali anche una piccola proporzione di sostanza gelatinizzabile può trascinare allo stato gelatinoso una sostanza che da sola non è suscettibile. Queste considerazioni che possono essere valutate dai competenti, aprono la via a risultati del maggiore interesse.

Paternò e Benelli già da molti anni hanno dichiarato gli eteri nitrici della etil e metil-glicerina come gelatinizzanti, e recentemente abbiamo trovato nel veratrolo un gelatinizzante assai energico.

A titolo di semplice cronaca esporremo alcuni saggi fatti sulla seta artificiale:

1. Riscaldata in tubi chiusi a 200°, non si altera o quasi.
2. Con acido acetico alla stessa temperatura si spappola e si trasforma in un liquido rosso-bruno che riduce il Fehling.
3. Con acqua a 200° si spappola, il liquido separato riduce il Fehling.

4. Con ammoniacca acquosa al 33 % a 200°, si colora leggermente in giallo, ma la fibra resta inalterata.

5. La seta che è colorata in azzurro, fatta bollire con acido solforico al 2 %, perde tale caratteristica.

6. La seta scaldata a 200° con una soluzione (10 %) di destrina d'amido, si spappola quasi completamente e sulle pareti del tubo si depone uno strato nero carbonioso e si svolge CO<sub>2</sub>.

**Chimica.** — *Persistenza di struttura anisotropa nella silice derivante dall'attacco della leucite con acidi.* Nota del Socio G. A. BLANC.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Alcune formule vettoriali negli spazi curvi a tre dimensioni.* Nota di T. BOGGIO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Ho già fatto rilevare, in una Nota dello scorso anno<sup>(2)</sup>, che alcune formule differenziali vettoriali, relative agli spazi euclidei, non sussistono inalterate per gli spazi curvi, ma bisogna completarle con termini opportuni, dipendenti, naturalmente, dalla curvatura della varietà che si considera.

Ciò avviene, di solito, quando nella formula intervengono derivate seconde (o d'ordine maggiore) di vettori ed omografie, perchè per spazi curvi i differenziali di secondo ordine non sono più commutabili fra loro, mentre lo sono negli spazi euclidei.

Mi è sembrato pertanto utile (in vista delle applicazioni) il passare in rassegna alcune formule, tra le più comuni, dello spazio ordinario, e vedere come vanno modificate negli spazi curvi.

1. Ricordiamo intanto che per uno spazio curvo, o varietà, a tre dimensioni  $V_3$ , invece dell'omografia (di 3° ordine) di Riemann  $\mathfrak{R}$ , si può vantaggiosamente introdurre l'omografia (di 1° ordine, od ordinaria) di Ricci  $\mu$ , che è una dilatazione, e che è legata alla  $\mathfrak{R}$  dalla formula<sup>(3)</sup>

$$(1) \quad \mu(u \wedge v) = V(\mathfrak{R}uv) = (V\mathfrak{R})uv,$$

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) BOGGIO, *Sull'operatore di Laplace e sulle equazioni dell'Elasticità negli spazi curvi.* (Questi « Rendiconti », s. 6ª, vol. XIII, 1° sem. 1931).

(3) BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, p. 247 (Zanichelli, Bologna, 1930). Nel seguito, quest'opera sarà indicata con *Geom. diff.*

ove  $u, v$  sono vettori qualunque *tangenziali* (cioè tangenti alla varietà  $V_3$  in un suo punto generico  $Q$ ); dalla (1) si ricava:

$$(2) \quad \mu \cdot u \wedge = V\Re u,$$

introducendo poi l'omografia di 2° ordine  $\varepsilon_2$  tale che <sup>(1)</sup>:

$$(3) \quad \varepsilon_2 uv = u \wedge v,$$

si ha, più semplicemente:

$$(4) \quad \mu \varepsilon_2 = V\Re.$$

È ora facile stabilire la formula:

$$(5) \quad 2(Vk\Re)u = \mu \cdot u \wedge;$$

infatti, la proprietà ciclica dell'omografia di Riemann può scriversi [*Geom. diff.*, p. 188, (23') e (24')]:

$$\Re + Kk\Re - k\Re = 0,$$

e applicando l'operatore  $V$  <sup>(2)</sup>:

$$V\Re - 2Vk\Re = 0,$$

di qui, in virtù della (2), risulta la (5), la quale può pure ottenersi direttamente dalla (1).

2. Essendo sempre  $u$  un vettore tangenziale, funzione dei punti  $Q$  della  $V_3$ , e  $dQ, \delta Q$  due spostamenti infinitesimi di  $Q$  sulla  $V_3$ , e  $d_v u, \delta_v u$  i corrispondenti differenziali superficiali del vettore  $u$ , sussiste la formula fondamentale (*Geom. diff.*, p. 187):

$$\delta_v d_v u - d_v \delta_v u = \Re dQ \delta Q u,$$

alla quale si può dare la forma (*Geom. diff.*, p. 196):

$$(6) \quad k \frac{d_v^2 u}{dQ^2} - \frac{d_v^2 u}{dQ^2} = Kk\Re u,$$

e costituisce una condizione d'integrabilità.

Per semplicità di scrittura, da ora in poi, di solito, OMETTEREMO L'INDICE  $v$  ai simboli di differenziale, in guisa dunque che scrivendo ad es.  $du$

(1) BURALI-FORTI et BOGGIO, *Espaces courbes, critique de la Relativité*, p. 49 (S. T. E. N., Turin, 1924).

(2) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, p. 136 (Zanichelli, Bologna, 1929). Nel seguito, quest'opera sarà indicata con *Trasf. lin.*

intenderemo il differenziale superficiale  $d_v \mathbf{u}$ , e così  $d\mathbf{u}/dQ$  rappresenterà la derivata superficiale  $d_v \mathbf{u}/dQ$ , ecc.

Dalla (6) si deducono le due formule notevoli:

$$(7) \quad \text{Rot}_v \frac{d\mathbf{u}}{dQ} = \frac{d \text{rot}_v \mathbf{u}}{dQ} - \mu \cdot \mathbf{u} \wedge,$$

$$(8) \quad \text{Rot}_v K \frac{d\mathbf{u}}{dQ} = - \mu \cdot \mathbf{u} \wedge.$$

Infatti, applicando l'operatore  $V$  si ha dalla (6), e da ben note proprietà:

$$2 \text{V}k \frac{d}{dQ} \frac{d\mathbf{u}}{dQ} - \frac{d}{dQ} \left( 2 \text{V} \frac{d\mathbf{u}}{dQ} \right) = - 2 \text{V}k \mathfrak{R}\mathbf{u},$$

ora, per definizione, si ha:

$$(9) \quad \text{Rot}_v \alpha = 2 \text{V}k \frac{d_v \alpha}{dQ}, \quad \text{rot}_v \mathbf{u} = 2 \text{V} \frac{d\mathbf{u}}{dQ},$$

che sono analoghe a quello dello spazio ordinario (*Trasf. lin.*, p. 171), perciò, badando alla (5), si ha senz'altro la (7).

Dalla (6) segue ancora:

$$kKk \frac{d^2 \mathbf{u}}{dQ^2} - kK \frac{d^2 \mathbf{u}}{dQ^2} = \mathfrak{R}\mathbf{u},$$

ma, com'è noto,  $kKk = KkK$ , quindi, applicando l'operatore  $V$  si ha:

$$- 2 \text{V}kK \frac{d^2 \mathbf{u}}{dQ^2} = V\mathfrak{R}\mathbf{u},$$

e ricordando le (9), (2), si conclude la (8).

Un'altra formula notevole, che conserva la stessa forma che nello spazio ordinario, è la seguente:

$$(10) \quad \text{div}_v \text{rot}_v \mathbf{u} = 0.$$

Infatti, prendendo l'invariante primo ( $I_1$ ) dei due membri della (7), si ottiene, in virtù di una formula nota (*Trasf. lin.*, p. 109, [1]), essendo  $\mu$  una dilatazione:

$$(a) \quad I_1 \text{Rot}_v \frac{d\mathbf{u}}{dQ} = I_1 \frac{d \text{rot}_v \mathbf{u}}{dQ} = \text{div}_v \text{rot}_v \mathbf{u};$$

d'altra parte, si ha successivamente, tenendo conto della (9) e di formule note (*Trasf. lin.*, p. 140, [1]):

$$I_1 \text{Rot}_v \frac{d\mathbf{u}}{dQ} = 2 I_1 \text{V}k \frac{d^2 \mathbf{u}}{dQ^2} = - 2 I_1 \text{V} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dQ^2} = - \text{div}_v \text{rot}_v \mathbf{u},$$

e confrontando colla (a) si conclude la (10).

Così pure si ha, se  $f$  è una funzione numerica:

$$(11) \quad \text{rot}_v \text{grad}_v f = 0,$$

e si dimostra come nello spazio ordinario (*Trasf. lin.*, p. 180).

Alcune altre formule dello spazio ordinario sono ancora valide per le  $V_3$ , introducendovi, naturalmente, i corrispondenti operatori differenziali *superficiali*; però quelle dimostrazioni ove si ricorre a vettori *costanti*, non sono più valide per le  $V_3$ , non esistendo, in generale, negli spazi curvi vettori costanti (e tangenziali); ma in tal caso basta, in generale, sostituire ai vettori costanti dei vettori funzioni dei punti  $Q$  della  $V_3$ , ma aventi i differenziali superficiali nulli, cioè aventi i differenziali ordinari *normali* alla  $V_3$ .

Così, ad es., per le  $V_3$  sussistono le formule (*Trasf. lin.*, p. 190):

$$(12) \quad \text{grad}_v (\mathbf{u} \wedge) = -\text{rot}_v \mathbf{u},$$

$$(13) \quad \text{Rot}_v (\mathbf{u} \wedge) = \frac{d\mathbf{u}}{dQ} - \text{div}_v \mathbf{u};$$

per dimostrare la (12) ricorriamo alla formula (*Trasf. lin.*, p. 176):

$$\text{grad}_v \alpha \times \mathbf{x} = I_1 \frac{d_v (K\alpha \mathbf{x})}{dQ} - I_1 \left( K\alpha \frac{d_v \mathbf{x}}{dQ} \right),$$

e supponiamo che il vettore  $\mathbf{x}$  abbia il differenziale superficiale nullo; allora sparisce l'ultimo termine e si può scrivere, in virtù di formule note:

$$[\text{grad}_v (\mathbf{u} \wedge)] \times \mathbf{x} = I_1 \frac{d_v (-\mathbf{u} \wedge \mathbf{x})}{dQ} = I_1 \left( \mathbf{x} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{dQ} \right) = -\mathbf{x} \times \text{rot}_v \mathbf{u},$$

la quale, essendo verificata per almeno tre vettori  $\mathbf{x}$  non complanari dimostra la (12).

Analogamente si dimostra la (13).

3. Passiamo ora a stabilire, per le  $V_3$ , le formule seguenti, generalizzazione di due altre formule che ho dato una ventina d'anni fa<sup>(1)</sup> (*Trasf. lin.*, p. 194):

$$(14) \quad \text{grad}_v \left( \frac{d\alpha}{dQ} \mathbf{u} \right) = \frac{d_v \text{grad}_v \alpha}{dQ} \mathbf{u} + \text{grad}_v \left( \alpha K \frac{d\mathbf{u}}{dQ} \right) - \\ - \alpha \text{grad}_v \text{div}_v \mathbf{u} + v (\mathfrak{H} \mathbf{u} \cdot K\alpha),$$

$$(15) \quad \text{Rot}_v \left( \frac{d\alpha}{dQ} \mathbf{u} \right) = \frac{d_v \text{Rot}_v \alpha}{dQ} \mathbf{u} - \text{Rot}_v \left( K \frac{d\mathbf{u}}{dQ} \alpha \right) + \\ + \left( \text{div}_v \mathbf{u} - \frac{d\mathbf{u}}{dQ} \right) \text{Rot}_v \alpha - 2 V (\alpha k \mathfrak{H}) \mathbf{u},$$

(1) BURALI-FORTI et MARCOLONGO, *Transformations linéaires*, p. 85 e 93 (Lattes; Turin, 1912).



ove  $\alpha$  è un'omografia che trasforma vettori tangenti alla  $V_3$  in  $Q$  in vettori pure tangenti alla  $V_3$  in  $Q$ .

Per dimostrare la (14), osserviamo che da formule note (*Trasf. lin.*, pp. 171, 199), risulta:

$$\text{grad}_v \left( \frac{d\alpha}{dQ} u \right) = v \frac{d_v}{dQ} \left( \frac{d\alpha}{dQ} u \right) = v \left( \frac{d\alpha}{dQ} \frac{du}{dQ} \right) + v \left( k^* \frac{d^2 \alpha}{dQ^2} \right) u;$$

ora, in virtù di una condizione d'integrabilità (*Geom. diff.*, p. 196) si ha:

$$k^* \frac{d^2 \alpha}{dQ^2} = \frac{d^2 \alpha}{dQ^2} - K(K\alpha \cdot \mathfrak{H}) - \alpha \mathfrak{H},$$

quindi sostituendo si ottiene:

$$\text{grad}_v \left( \frac{d\alpha}{dQ} u \right) = v \left( \frac{d\alpha}{dQ} \frac{du}{dQ} \right) + \frac{d}{dQ} \left( v \frac{d\alpha}{dQ} \right) u - vK(K\alpha \cdot \mathfrak{H}u) - v(\alpha \mathfrak{H}) u;$$

ora, da formule note, segue

$$\begin{aligned} v \left( \frac{d\alpha}{dQ} \frac{du}{dQ} \right) &= v \left( k \frac{d\alpha}{dQ} K \frac{du}{dQ} \right) = v \left[ k \frac{d}{dQ} \left( \alpha K \frac{du}{dQ} \right) - \alpha k \frac{d}{dQ} \left( K \frac{du}{dQ} \right) \right] = \\ &= \text{grad}_v \left( \alpha K \frac{du}{dQ} \right) - \alpha \text{grad}_v K \frac{du}{dQ}, \\ vK(K\alpha \cdot \mathfrak{H}u) &= -v(\mathfrak{H}u \cdot K\alpha), \end{aligned}$$

perciò si può scrivere:

$$\begin{aligned} \text{grad}_v \left( \frac{d\alpha}{dQ} u \right) &= \frac{d}{dQ} \text{grad}_v \alpha u + \text{grad}_v \left( \alpha K \frac{du}{dQ} \right) - \alpha \text{grad}_v K \frac{du}{dQ} + \\ &+ v(\mathfrak{H}u \cdot K\alpha) - \alpha v\mathfrak{H}u; \end{aligned}$$

e siccome <sup>(1)</sup>

$$\text{grad}_v K \frac{du}{dQ} + v\mathfrak{H}u = \text{grad}_v \text{div}_v u,$$

ne segue la (14).

È bene notare che la (14) sussiste, come risulta dalla dimostrazione fatta, anche per una varietà qualunque ad  $n$  dimensioni.

Per il caso speciale delle  $V_3$  l'ultimo termine della (14) può trasformarsi in  $2 V[\mu(u \wedge K\alpha)]$ , che può ancora essere ulteriormente sviluppato.

Con calcoli analoghi si perviene alla (15); conviene partire dalla (9) ed applicare la formula, facile da dimostrare:

$$V_k(\mu_2 \alpha) = -V(K\alpha \cdot k\mu_2) + (I_1 \alpha - \alpha) V_k \mu_2,$$

ove  $\mu_2$  è un'omografia di 2° ordine.

(1) Loc. cit. (2) di pag. 189.

4. Termineremo coll'espore ancora alcune formule utili relative alle  $V_3$ , e la cui dimostrazione, molto semplice, è lasciata allo studioso.

$$v(\varepsilon_2 \alpha) = -2 V \alpha \quad , \quad v(\alpha \varepsilon_2) = 0 \quad , \quad I_1(\varepsilon_2 \alpha) = 0 ,$$

$$I_1(\alpha \varepsilon_2) = -2 (V \alpha) \times \quad , \quad I_1 k(\varepsilon_2 \alpha) = 2 (V \alpha) \times ,$$

$$V(\varepsilon_2 \alpha) = \alpha \quad , \quad 2 V(\alpha \varepsilon_2) = I_1 \alpha - K \alpha ,$$

ove  $\alpha$  è un'omografia qualunque (ordinaria).

**Matematica (Analisi).** — *Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione*  $(a_1 x + a_0) y'' + (b_1 x + b_0) y' - n b_1 y = 0$ .  
Nota II di G. SANSONE, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. P. BURGATTI.

d) Vogliamo dimostrare il teorema A 3 della Nota precedente<sup>(2)</sup> e cioè: data l'equazione

$$(2) \quad (c_0 t - c_1) y_n'' + t y_n' - n y_n = 0 \quad c_0 > 0 ,$$

con  $c_1 = -s c_0^2$ ,  $s$  intero non negativo, se si considerano i polinomi  $y_n(t)$  di grado  $n$  soluzioni della (2), col primo coefficiente uguale all'unità, i polinomi  $y_{s+2}$ ,  $y_{s+3}$ , ... hanno tutte le loro radici reali, la radice  $c_1/c_0$  multipla di ordine  $s+1$ <sup>(3)</sup> e tutte le altre minori di  $c_1/c_0$ .

A questo scopo andiamo a far vedere che per  $n \geq s+2$  le funzioni

$$(15) \quad y_n(t) \quad , \quad y_{n-1}(t), \dots \quad , \quad y_{s+2}(t) \quad , \quad y_{s+1}(t) \quad (4)$$

formano una successione di Sturm relativa all'equazione  $y_n(t) = 0$  e all'intervallo  $(-\infty, c_1/c_0 - \varepsilon)$ , dove  $\varepsilon$  è positivo sufficientemente piccolo.

Si ha infatti

1 L'equazione  $y_n(t) = 0$  non ha in  $(-\infty, c_1/c_0 - \varepsilon)$  radici multiple. [2, c), 1].

2 Il polinomio  $y_{s+1}$  in  $(-\infty, c_1/c_0 - \varepsilon)$  non è mai nullo (ha il segno di  $(-1)^{s+1}$ , [2, c), 2]).

3 Se un valore  $\alpha$  appartenente a  $(-\infty, c_1/c_0 - \varepsilon)$  annulla  $y_n$ , per  $h$  positivo sufficientemente piccolo  $y_n(\alpha - h)$ ,  $y_{n-1}(\alpha - h)$  presentano una variazione e  $y_n(\alpha + h)$ ,  $y_{n-1}(\alpha + h)$  una permanenza di segni.

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1932.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », 6ª serie, vol. XV, pp. 125-130 (1932).

(3) Cfr. 2, c), 1 della Nota precedente.

(4) Continuiamo la numerazione della Nota precedente.

Difatti per cose note dell'algebra  $y_n(\alpha - b)$ ,  $y'_n(\alpha - b)$  presentano una variazione e  $y_n(\alpha + b)$ ,  $y'_n(\alpha + b)$  una permanenza di segni; d'altra parte l'ipotesi  $y_n(\alpha) = 0$  porta per la (6)

$$(c_0 \alpha - c_1) y'_n(\alpha) = -n [c_1 + (n-1) c_0^2] y_{n-1}(\alpha),$$

ma è  $c_0 \alpha - c_1 < 0$ ,  $c_1 + (n-1) c_0^2 > 0$ , quindi  $y'_n(\alpha)$  e  $y_{n-1}(\alpha)$  hanno ugual segno in  $\alpha$  e lo conservano in un intorno sufficientemente piccolo di questo punto e ne viene che ad  $y'_n(\alpha - b)$ ,  $y'_n(\alpha + b)$  possiamo sostituire agli effetti del segno rispettivamente  $y_{n-1}(\alpha - b)$  e  $y_{n-1}(\alpha + b)$ .

4 Se  $\alpha$  è una radice di  $y_{s+k}(t) = 0$  con  $k = 2, 3, \dots, n-1$ , i polinomi  $y_{s+k+1}$ ,  $y_{s+k-1}$  assumono in  $\alpha$  valori di segno contrario.

Poichè  $y_{s+1}(\alpha) \neq 0$ , dalla (7) per induzione si ottiene che due funzioni consecutive della successione (15) non si annullano per un medesimo valore  $t = \alpha$ .

Ancora dalla (7) facendovi  $n = s + k + 1$  e tenuto conto che  $y_{s+k}(\alpha) = 0$  si ha

$$y_{s+k+1}(\alpha) = -(s+k) [c_1 + (s+k-1) c_0^2] y_{s+k-1}(\alpha)$$

ma è  $c_1 + (s+k-1) c_0^2 > 0$  e ne viene la nostra asserzione.

Per le note proprietà delle successioni di Sturm il numero delle radici reali dell'equazione  $y_n(t) = 0$  comprese in  $(-\infty, c_1/c_0 - \varepsilon)$  è uguale al numero delle variazioni perdute dalla successione (15) quando in essa si faccia  $t = -\infty$  e  $t = c_1/c_0 - \varepsilon$ .

Per  $t = -\infty$  la successione (15) presenta  $n - s - 1$  variazioni, per  $t = c_1/c_0 - \varepsilon$  tutti i termini della successione (15) hanno il segno di  $(-1)^{s+1} [2, c], 2]$  e la successione non possiede variazioni, l'equazione  $y_n(t) = 0$  possiede quindi  $n - s - 1$  radici reali tra  $-\infty$  e  $c_1/c_0 - \varepsilon$ , e le altre  $s + 1$  radici, come abbiamo visto in 2, c), 1 cadono nel punto  $c_1/c_0$ .

### 3. Dimostrazione dei teoremi B e C.

I ragionamenti sono presso a poco identici a quelli tenuti nel n. 2 per dimostrare il teorema A, noi li richiameremo brevemente.

a) Cominciamo a dimostrare il teorema C. Sia dunque

$$-(2r+1) c_0^2 < c_1 < -(2r-1) c_0^2, \quad c_1 \neq -2r c_0^2,$$

e poichè il teorema C 1 risulta dal n. 2, b), studieremo soltanto gli zeri dei polinomi  $y_{2r+1}$ ,  $y_{2r+2}$ ,  $\dots$ .

1 La (8) per  $n = 2r + 1$ ,  $t = c_1/c_0$  dà

$$(16) \quad y_{2r+1}^{(l-1)}(c_1/c_0) = [c_1 + (l-1) c_0^2] (2r+2-l)^{-1} c_0^{-l} y_{2r+1}^{(l)}(c_1/c_0);$$

$$l = 1, 2, \dots, 2r+1,$$

e da questa segue che se  $-(2r+1)c_0^2 < c_1 < -2rc_0^2$

$$(17) \quad y_{2r+1}^{(2r+1)}(c_1/c_0) = (2r+1)! > 0, \quad y_{2r+1}^{(2r)}(c_1/c_0) < 0;$$

$$y_{2r+1}^{2r-1}(c_1/c_0) > 0; \dots; y_{2r+1}(c_1/c_0) < 0$$

quindi la successione di Budan-Fourier dell'equazione  $y_{2r+1}(t) = 0$  per  $t = -\infty$  e per  $t = c_1/c_0$  presenta sempre  $2r+1$  variazioni e ne viene che l'equazione  $y_{2r+1}(t) = 0$  non ha radici reali nell'intervallo  $(-\infty, c_1/c_0)$ , essa avrà quindi una sola radice reale, maggiore di  $c_1/c_0 [1, c]$ .

Se invece  $-2rc_0^2 < c_1 < -(2r-1)c_0^2$  la successione (17) presenta i segni

$$(18) \quad y_{2r+1}^{(2r+1)}(c_1/c_0) = (2r+1)! > 0, \quad y_{2r}^{(2r)}(c_1/c_0) > 0,$$

$$y_{2r}^{(2r-1)}(c_1/c_0) < 0, \quad y_{2r+1}^{(2r-2)}(c_1/c_0) > 0, \dots, \quad y_{2r+1}(c_1/c_0) > 0$$

con  $2r$  variazioni, quindi  $y_{2r+1}(t) = 0$  ha uno e un solo zero tra  $-\infty$  e  $c_1/c_0$ ; dopo  $c_1/c_0$  dovrebbe averne un numero pari e perciò nessuno  $[1, c]$ .

2 Per studiare gli zeri dei polinomi  $y_n(t)$  con  $n \geq 2r+2$  supponiamo dapprima  $-(2r+1)c_0^2 < c_1 < -2rc_0^2$  e consideriamo la successione di funzioni

$$(19) \quad y_n(t), \quad y_{n-1}(t), \quad y_{n-2}(t), \dots, \quad y_{2r+2}(t), \quad y_{2r+1}(t);$$

queste nell'intervallo  $(-\infty, c_1/c_0)$  formano una successione di Sturm relativa all'equazione  $y_n(t) = 0$ . Difatti  $y_n(t) = 0$  non ha radici multiple,  $[2, c, 1]$ ;  $y_{2r+1}(t)$  è diversa da zero (negativa) in  $(-\infty, c_1/c_0) [3, a, 1]$ ; si verificano poi con i ragionamenti 2, d) 3, 2, d) 4, le altre due proprietà delle successioni di Sturm.

La successione (19) per  $t = -\infty$  presenta  $n - 2r - 1$  variazioni; la (6) per  $t = c_1/c_0$  dà:

$$(20) \quad c_0 y_s(c_1/c_0) = [c_1 + (s-1)c_0^2] y_{s-1}(c_1/c_0)$$

e si ha da qui, facendo  $s = 2r+2, 2r+3, \dots, n$  che tutti i termini della successione (19) per  $t = c_1/c_0$  hanno lo stesso segno di  $y_{2r+1}(c_1/c_0)$  [negativo] e perciò l'equazione  $y_n(t) = 0$  tra  $-\infty$  e  $c_1/c_0$  ha  $n - 2r - 1$  radici reali e soltanto  $n - 2r - 1$ ; dopo  $c_1/c_0$ ,  $y_n(t)$  deve avere un numero dispari di radici e per  $1, c$ ) una soltanto.

Quando sia  $-2rc_0^2 < c_1 < -(2r-1)c_0^2$ ,  $n \geq 2r+2$ , in luogo della successione (19) basta considerare l'altra

$$(21) \quad y_n(t), \quad y_{n-1}(t), \dots, \quad y_{2r+1}(t), \quad y_{2r}(t)$$

dove l'ultimo termine  $[2, b]$  è sempre positivo. Le (21) formano la successione di Sturm relativa all'equazione  $y_n(t) = 0$  e coll'intervallo  $(-\infty, c_1/c_0)$ .

In virtù della (20) la successione (21) per  $t = c_1/c_0$  presenta soltanto permanenze, la (21) perde quindi  $n - 2r$  variazioni tra  $-\infty$  e  $c_1/c_0$ ,  $y_n(t) = 0$  ha quindi  $n - 2r$  zeri minori di  $c_1/c_0$  e nessun altro maggiore di  $c_1/c_0$ .

b) I ragionamenti ora fatti in 3, a), 1; 3, a), 2, possono ripetersi parola per parola nei casi  $-c_0^2 < c_1 < 0$ ;  $c_1 > 0$  considerando per l'equazione  $y_n(t) = 0$  nell'intervallo  $(-\infty, c_1/c_0)$  rispettivamente le due successioni di Sturm

$$(19)' \quad y_n(t) \quad , \quad y_{n-1}(t), \dots \quad , \quad y_2(t) \quad , \quad y_1(t);$$

$$(21)' \quad y_n(t) \quad , \quad y_{n-1}(t), \dots \quad , \quad y_2(t) \quad , \quad y_1(t) \quad , \quad 1.$$

**Matematica (Analisi).** — *Sulla sommazione col metodo di Poisson delle serie di Hermite.* Nota di C. MIRANDA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

Scopo di questo lavoro è lo studio della sommazione col metodo di Poisson della serie di Hermite di una funzione arbitraria  $f(x)$ , definita in quasi tutto l'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ . Per effettuare questa sommazione ho introdotto un integrale singolare, già considerato nella teoria dell'equazione del calore, analogo all'integrale di Poisson. I risultati ottenuti sono quasi gli stessi di quelli relativi alle serie di Fourier, di Legendre e di Laplace.

Riservo ad un prossimo lavoro la trattazione dell'analogo problema per le serie di Laguerre.

Ricordiamo che i polinomi  $H_n(x)$  di Hermite, definiti per mezzo della eguaglianza

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} H_n(x) = e^{ax - \frac{a^2}{2}},$$

godono della proprietà di ortogonalità,

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) H_m(t) dt \begin{cases} = 0 & m \neq n \\ = n! \sqrt{2\pi} & m = n \end{cases}$$

e formano un sistema completo<sup>(2)</sup>.

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) Cfr. VIARO, *Sullo sviluppo di una funzione nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$  mediante funzioni di Hermite* (« Rend. Acc. Scienze Fis. e Matematiche di Napoli », serie 3ª, vol. 36).



Detto  $\rho$  un arbitrario numero positivo minore di uno, si trova, con un procedimento affatto elementare<sup>(1)</sup>,

$$(2) \quad H_n(x) = \frac{1}{\rho^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(t-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} H_n(t) dt,$$

da cui, tenendo presente che

$$(3) \quad -\frac{(t-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)} = -\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{x^2+t^2}{4} + \frac{\rho}{1-\rho^2} tx - \frac{t^2}{4} + \frac{x^2}{4},$$

si ha

$$(4) \quad e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x) = \frac{1}{\rho^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{x^2+t^2}{4} + \frac{\rho}{1-\rho^2} xt}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} \left( e^{-\frac{t^2}{4}} H_n(t) \right) dt.$$

Le funzioni  $e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x)$  sono dunque le autofunzioni relative agli autovalori  $\frac{1}{\rho^n}$  del nucleo simmetrico

$$K(x, t) = \frac{e^{-\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{x^2+t^2}{4} + \frac{\rho}{1-\rho^2} xt}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}}.$$

Il nucleo  $K(x, t)$  è continuo in tutto il piano  $(x, t)$  ed inoltre esiste lo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t)^2 dx dt;$$

ad esso si può quindi applicare tutta l'ordinaria teoria delle equazioni integrali<sup>(2)</sup>.

Dal fatto che le funzioni  $e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x)$  formano un sistema completo discende subito che esse sono le uniche autofunzioni di  $K(x, t)$ , e che  $1, \frac{1}{\rho}, \dots, \frac{1}{\rho^n}, \dots$  sono gli unici autovalori. Poichè  $K(x, t)$  è positivo in tutto il piano, per un noto teorema di Mercier, si ha

$$(5) \quad K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} H_n(x) H_n(t) e^{-\frac{x^2+t^2}{4}},$$

(1) Cfr. APPEL e J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynôme d'Hermite*, p. 351 e sgg. Gauthier-Villars, Paris.

(2) Per una completa trattazione della teoria ordinaria delle equazioni integrali di FREDHOLM, anche in campi illimitati, cfr. PICONE, *Appunti di analisi superiore* (in corso di stampa, Rondinella, Napoli).

risultando la convergenza della serie a secondo membro uniforme in tutto il piano.

Sia ora  $f(x)$  una funzione definita in quasi tutto l'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ , ed esista un numero positivo  $\mu \left( < \frac{1}{2} \right)$  tale che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu t^2} f(t) dt$$

converga; si chiama serie di Hermite della  $f(x)$  la serie

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t) H_n(t) dt.$$

Per fare la sommazione col metodo di Poisson della serie (6), bisogna stabilire la convergenza della serie

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n H_n(x)}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t) H_n(t) dt$$

e cercare il limite della sua somma per  $\rho \rightarrow 1$ .

A queste due questioni rispondono esaurientemente i seguenti teoremi:

I. Se la funzione  $f(x) e^{-\frac{x^2}{4}}$  è sommabile nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ , la serie (7) converge uniformemente al variare di  $x$  in ogni intervallo finito, e di  $\rho$  in ogni intervallo  $(0, \delta)$  di ampiezza  $\delta < 1$ , ed ha per somma l'integrale

$$u(\rho, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(t-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} f(t) dt.$$

Ed invero, tenendo presente la (3) e la (5), si ha

$$u(\rho, x) = e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n! \sqrt{2\pi}} H_n(x) H_n(t) e^{-\frac{x^2+t^2}{4}} dt,$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^k \frac{\rho^n H_n(x)}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t) H_n(t) dt = \\ & = e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{n=0}^k \frac{\rho^n}{n! \sqrt{2\pi}} H_n(x) H_n(t) e^{-\frac{t^2+x^2}{4}} dt, \end{aligned}$$

da cui,

$$\left| u(\rho, x) - \sum_{n=0}^k \frac{\rho^n H_n(x)}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t) H_n(t) dt \right| \leq e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| e^{-\frac{t^2}{4}} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n! \sqrt{2\pi}} H_n(x) H_n(t) e^{-\frac{x^2+t^2}{4}} \right| dt,$$

ciò che dimostra l'asserto, data la uniforme convergenza della serie (5).

II. Se  $f(x) e^{-\mu x^2}$  ( $\mu > 0$ ) è sommabile in  $(-\infty, +\infty)$  e se  $x_0$  è un punto di continuità per  $f(x)$  si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} u(\rho, x_0) = f(x_0).$$

Supponiamo, per fissare le idee,  $x_0 > 0$  e poniamo

$$(8) \quad \frac{e^{-\frac{(t-x)^2}{2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} = \Gamma(x, t|\rho).$$

Si ha, per  $t \neq x$ ,

$$(9) \quad \lim_{\rho \rightarrow 1} \Gamma(x, t|\rho) = 0.$$

Tenendo presente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t|\rho) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 1$$

possiamo scrivere

$$(10) \quad |u(\rho, x_0) - f(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) \{f(t) - f(x_0)\} dt \right|.$$

Per la continuità di  $f(x)$  in  $x_0$ , si potrà trovare un  $\sigma$  tale che, per  $|t - x_0| < \sigma$ , sia  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ , essendo  $\varepsilon$  una prefissata quantità. Sarà

$$\begin{aligned} |u(\rho, x_0) - f(x_0)| &\leq \varepsilon + \int_{-\infty}^{x_0 - \sigma} \Gamma(x_0, t|\rho) |f(t) - f(x_0)| dt + \\ &\quad + \int_{x_0 + \sigma}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) |f(t) - f(x_0)| dt. \end{aligned}$$

Prendiamo ora  $\rho^2 > 1 - 1/4\mu$  e consideriamo l'equazione di secondo grado in  $t$

$$\varphi(t) = \mu t^2 - \frac{(\rho x_0 - t)^2}{2(1 - \rho^2)} = 0$$

le cui radici sono

$$\rho x_0 \frac{1}{1 - \sqrt{2\mu(1-\rho^2)}} < 2\rho x_0 < 2x_0$$

e

$$\rho x_0 \frac{1}{1 + \sqrt{2\mu(1-\rho^2)}} > \frac{2\rho x_0}{3} > 0.$$

Poichè il coefficiente del termine in  $t^2$  della  $\varphi(t)$  è negativo sarà  $\varphi(t) \leq \varphi(2x_0)$  per  $t \geq 2x_0$ ,  $\varphi(t) \leq \varphi(0)$  per  $t \leq 0$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} |u(\rho, x_0) - f(x_0)| &\leq \varepsilon + \Gamma(x_0, 0|\rho) \int_{-\infty}^0 e^{-\mu t^2} |f(t) - f(x_0)| dt + \\ &+ \Gamma(x_0, x_0 - \sigma|\rho) \int_0^{x_0 - \sigma} |f(t) - f(x_0)| dt + \\ &+ \Gamma(x_0, x_0 + \sigma|\rho) \int_{x_0 + \sigma}^{2x_0} |f(t) - f(x_0)| dt + \\ &+ e^{\mu x_0^2} \Gamma(x_0, 2x_0|\rho) \int_{2x_0}^{+\infty} e^{-\mu t^2} |f(t) - f(x_0)| dt \end{aligned}$$

e ciò è sufficiente per le (9) a provare l'asserto. Il caso di  $x_0 < 0$  si tratterebbe in modo analogo. Se poi  $x_0 = 0$  la  $\varphi(t)$  ha l'unica radice  $t = 0$  e risulta  $\varphi(t) < \varphi(-\sigma)$  per  $t < -\sigma$ ,  $\varphi(t) < \varphi(\sigma)$  per  $t > \sigma$ , da cui

$$\begin{aligned} |u(\rho, 0) - f(0)| &\leq \varepsilon + e^{\mu \sigma^2} \Gamma(0, -\sigma|\rho) \int_{-\infty}^{-\sigma} e^{-\mu t^2} |f(t) - f(0)| dt + \\ &+ e^{\mu \sigma^2} \Gamma(0, \sigma|\rho) \int_{\sigma}^{+\infty} e^{-\mu t^2} |f(t) - f(0)| dt. \end{aligned}$$

III. Se  $f(x)e^{-\mu x^2}$  è sommabile in  $(-\infty, +\infty)$ , e se in  $x_0$   $f(x)$  ha una discontinuità di prima specie, si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} u(\rho, x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Per la dimostrazione di questo teorema basta tener presente che

$$\int_{\varphi x_0}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) dt = \int_{-\infty}^{\varphi x_0} \Gamma(x_0, t|\rho) dt = \frac{1}{2}$$

e scrivere in conseguenza

$$\left| u(\rho, x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right| = \left| \int_{-\infty}^{x_0} \Gamma(x_0, t|\rho) \{f(t) - f(x_0^-)\} dt + \right. \\ \left. + \int_{x_0}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) \{f(t) - f(x_0^+)\} dt \right|$$

da cui, procedendo come sopra, si arriva all'asserto.

I teoremi II e III non sono che un caso particolare del seguente teorema generale, analogo a quello stabilito dal prof. Picone per le serie di Fourier e di Laplace (1):

IV. Se  $f(x)e^{-\mu x^2}$  è sommabile nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$  il minimo e il massimo limite  $u(\rho, x_0)$  per  $\rho \rightarrow 1$  riescono sempre compresi fra la minima e la massima media asintotica della  $f$  in  $x_0$ ; si ha cioè:

$$\lim'_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} \int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} f(\xi) d\xi \leq \lim'_{\rho \rightarrow 1} u(\rho x_0) \leq \lim''_{\rho \rightarrow 1} u(\rho x_0) \leq \lim''_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} \int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} f(\xi) d\xi.$$

Poichè la dimostrazione completa di questo teorema è alquanto lunga e complicata mi limiterò ad esporne i punti principali.

È intanto evidente che basta dimostrare l'ultima disuguaglianza. Supponiamo, per fissar le idee,  $x_0 > 0$  e scegliamo un numero  $\lambda$  maggiore di

$$\lim''_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} \int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} f(\xi) d\xi;$$

si può certo trovare un numero positivo  $\delta (\leq x_0)$  tale che

$$\frac{1}{2\sigma} \int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} f(\xi) d\xi < \lambda \quad \text{per } \sigma \leq \delta.$$

Osservando che

$$u(\rho, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) f(2\rho x_0 - t) dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) \{f(t) + f(2\rho x_0 - t)\} dt$$

(1) PICONE, *Sull'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione di Poisson per le serie di Fourier e di Laplace* (« Rend. dei Lincei », vol. X, serie 6<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem.),



si ha

$$\begin{aligned} \lim''_{\varrho \rightarrow 1} u(\rho, x_0) &\leq \lim''_{\varrho \rightarrow 1} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x_0 - \sigma} \Gamma(x_0, t|\rho) \{f(t) + f(2\rho x_0 - t)\} dt + \\ &+ \lim''_{\varrho \rightarrow 1} \int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} \Gamma(x_0, t|\rho) \{f(t) + f(2\rho x_0 - t)\} dt + \\ &+ \lim''_{\varrho \rightarrow 1} \int_{x_0 + \sigma}^{+\infty} \Gamma(x_0, t|\rho) \{f(t) + f(2\rho x_0 - t)\} dt. \end{aligned}$$

Di qui dimostrando che

$$\begin{aligned} \lim''_{\varrho \rightarrow 1} \int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} \Gamma(x, t|\rho) \{f(t) + f(2\rho x - t)\} dt &\leq \lambda \\ \lim''_{\varrho \rightarrow 1} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x_0 - \sigma} \Gamma(x, t|\rho) \{f(t) + f(2\rho x - t)\} dt &= \lim''_{\varrho \rightarrow 1} \int_{x_0 + \sigma}^{+\infty} \dots dt = 0 \end{aligned}$$

si arriva a provare l'asserto.

I teoremi I e IV, in una con la nota proprietà di permanenza del procedimento di sommazione di Poisson, ci permettono infine di asserire che:

V. *Se una funzione  $f(x)$ , verificante le ipotesi del teorema I, possiede in un punto  $x_0$  una determinata media asintotica e se la serie di Hermite della  $f(x)$  converge in  $x_0$ , essa ha ivi per somma la detta media asintotica.*

**Matematica (Geometria).** — *Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine.* Nota di L. CAMPEDELLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

1. Per l'importanza che nello sviluppo della teoria delle superficie algebriche ha la costruzione di esempi e di tipi particolari, non sembra inopportuno intraprendere lo studio sistematico dei piani doppi con curva di diramazione dei primi ordini. Qui si dà intanto la classificazione completa dei p. d. con curva di diramazione dell'ottavo ordine (non riducibile ad ordine inferiore mediante trasformazioni birazionali). S'incontrano così, in particolare, varie superficie di genere uno e bigenere maggiore di uno, o di genere zero e bigenere uguale ad uno. Queste ultime corrispondono a due p. d. notevoli, che, a prima vista, si presentano come distinti, ma in effetto il secondo di essi si può ridurre ad un caso particolare dell'altro con una trasformazione quadratica. In quanto al primo, risulta da un noto teorema che esso rappresenta la superficie del sesto ordine, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro (superficie tipica della classe per cui

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

$p = P_3 = 0$  e  $P = 1$ ): ma ci è parso interessante ritrovare questo risultato in modo diretto ed elementare, costruendo sul piano stesso il sistema rappresentativo di curve di genere 4, ottotangenti alla curva di diramazione.

2. Il piano doppio con curva di diramazione generale dell'ottavo ordine,  $C_8$ , costituisce una superficie regolare ( $p_g = p_a = p$ ) di genere superficiale  $p = 3$  con curve canoniche iperellittiche (rappresentate dalle rette), e bigenere  $P = 6$  <sup>(1)</sup>. Questo p. d. è noto come uno dei tre tipi di superficie con curve canoniche iperellittiche, il cui genere lineare  $p^{(1)} = 3$  ha il valore minimo rispetto al genere geometrico ( $p^{(1)} = 2p - 3$ ) <sup>(2)</sup>. Se la  $C_8$  acquista dei punti multipli, i caratteri del p. d. si modificano: però se vogliamo escludere i casi in cui nascono dei p. d. razionali (ordine della  $C_8$  abbassabile) ovvero rappresentanti delle rigate irrazionali, le sole singolarità che hanno interesse sono i punti quadrupli, e le coppie di punti tripli infinitamente vicini (punti  $[3, 3]$ ) <sup>(3)</sup>. Si hanno così i p. d. seguenti:

$C_8$  con un punto  $[3, 3]$ :  $p = 2$ ;  $p^{(1)} = 2$ ;  $P = 4$ . Il grado effettivo del sistema canonico risulta nullo, e quindi minore del grado virtuale  $p^{(2)} = p^{(1)} - 1 = 1$ . L'intorno del punto  $[3, 3]$  — come si vede dai suoi caratteri — dà luogo sopra la superficie ad una curva eccezionale che è parte fissa del sistema canonico (curva eccezionale singolare), ossia ad un punto (semplice) base per il sistema canonico <sup>(4)</sup>. Si ha così un facile esempio di superficie il cui sistema canonico possiede un punto base <sup>(5)</sup>.

$C_8$  con un punto quadruplo:  $p = 2$ ;  $p^{(1)} = 1$ ;  $P = 3$ .

$C_8$  con due punti quadrupli (distinti o infinitamente vicini): noto tipo di p. d. con genere e bigenere uguali all'unità <sup>(6)</sup>. Tale p. d. non possiede una curva canonica propriamente detta, ed infatti la retta AB è immagine di una curva spezzata in due parti (razionali, non connesse fra loro) che sono eccezionali.

$C_8$  con un punto quadruplo e un punto  $[3, 3]$  in posizione generica:  $p = p^{(1)} = P = 1$ . La trasformazione quadratica che ha per punti fonda-

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. CAMPEDELLI. Parte prima, § 57 e sgg. Padova, «Cedam», 1932.

(2) Cfr. F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*, «Rend. Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. V, 1896<sub>1</sub>, p. 191.

(3) È noto che un punto triplo isolato deve considerarsi come doppio; e un punto quintuplo conta come quadruplo, salvo l'effetto che esso può avere di elevare la molteplicità di un punto triplo infinitamente vicino.

(4) Conclusione analoga vale per il p. d. con curva di diramazione d'ordine qualsiasi, dotata di un punto  $[3, 3]$ . Cfr. le citate *Lezioni sulle superficie algebriche* di ENRIQUES, §§ 60 e 61.

(5) Per il primo esempio di superficie con sistema canonico siffatto cfr. G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, «Math. Ann.», Bd. 48, n. 22 e 23.

(6) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, «Memorie della Soc. Ital. delle Scienze detta dei XL», ser. 3<sup>a</sup>, t. X, 1896,

mentali il punto quadruplo e i due punti tripli di  $C_8$ , riconduce questo p. d. ad uno con curva di diramazione del sesto ordine. Fa eccezione a tale riducibilità il caso:

$C_8$  con un punto quadruplo  $O$ , e due punti tripli  $A, A'$ , infinitamente vicini fra loro ed allineati con  $O$ : la  $C_8$  si spezza nella retta  $AA'$  e in una residua  $C_7$ . Si ha  $p = p^{(1)} = 1$  e  $P = 2$  esistendo un fascio di curve bicanoniche (ellittiche) rappresentate dalla  $OA$  insieme ad una retta per  $O$ .

$C_8$  con due punti  $[3, 3]$ , in  $(A, A')$  e  $(B, B')$ :  $p = p^{(1)} = 1$  e  $P = 2$ . La  $AB$  dà l'unica curva canonica, ma c'è un fascio di curve bicanoniche ellittiche rappresentato dalle coniche per  $A, A', B$  e  $B'$  <sup>(1)</sup>.

$C_8$  dotata di tre singolarità dei tipi considerati (punti quadrupli e punti  $[3, 3]$ ) disposte genericamente: con trasformazioni quadratiche opportune la  $C_8$  si riduce, a seconda dei casi, ad una quartica, o ad una sestica con un punto quadruplo o un punto  $[3, 3]$ , si cade cioè in un p. d. razionale ( $p = P = 0$ ). Invece, in corrispondenza a posizioni particolari dei punti multipli della  $C_8$ , si possono avere dei p. d. ancora di genere zero, ma con bigenere  $P = 1$ : passiamo a studiarli.

3. Essi sono:

a) piano doppio con  $C_8$  di diramazione, dotata di un punto quadruplo  $O$  e di due punti  $[3, 3]$  sopra due rette  $C_1$  e  $C'_1$  uscenti da  $O$ . La  $C_8$  si spezza in  $C_1, C'_1$ , e in una sestica  $C_6$  con un punto doppio in  $O$  e due tacnodi  $(A, A')$  e  $(B, B')$  aventi per tangenti tacnodali la  $C_1$  e la  $C'_1$ , rispettivamente;

b) piano doppio con  $C_8$  di diramazione dotata di tre punti  $[3, 3]$  situati sopra una conica  $C_2$ . La  $C_2$  fa parte della  $C_8$  e la residua  $C_6$  possiede tre tacnodi, cioè tre coppie di punti doppi infinitamente vicini,  $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ , su  $C_2$ . È interessante osservare che questo p. d. si identifica con una superficie cubica doppia  $F_3$ , con curva di diramazione costituita da una sestica (intersezione con una quadrica) e dagli intorni di quattro punti, doppi per la  $F_3$ . Si tratta della  $F_3$  le cui sezioni piane sono riferite proiettivamente alle cubiche per  $A, A', B, B', C, C'$ . La superficie semplice rappresentata dalla  $F_3$  doppia, si ottiene estraendo, sopra la  $F_3$ , la radice quadrata da una quadrica e dal tetraedro che ha per vertici i punti doppi. Si noti che sulla sezione piana della  $F_3$  le intersezioni con gli spigoli di tale tetraedro, danno dei punti critici apparenti: la loro presenza spiega perchè la serie caratteristica del sistema rappresentato dalle sezioni piane di  $F_3$ , sia semibicanonica, come deve, e non canonica come potrebbe sembrare a prima vista per analogia al caso in cui la curva di diramazione sulla  $F_3$  fosse esaurita dalla sestica predetta (il che ci porterebbe ad una superficie di genere uno).

(1) I p. d. sopra incontrati con  $p^{(1)} = 1$  e  $P > 1$ , rientrano come casi particolari nei tipi generali dei p. d. siffatti classificati da ENRIQUES. Cfr. F. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare*  $p^{(1)} = 1$ , « Rend. Lincei », ser. 5<sup>a</sup>, vol. VII, 1898<sub>1</sub>, p. 231 e 253.

La  $F_3$  doppia costruita innanzi, si può considerare come un caso particolare della sestica  $F_6$  che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro, la quale — come ha dimostrato ENRIQUES <sup>(1)</sup> — costituisce il *tipo* delle superficie per cui  $p = 0$  e  $P = 1$ , con curva bicanonica d'ordine zero, ossia con trigenere  $P_3 = 0$ . Però la  $F_3$  doppia si può anche trasformare in una  $F_6$  semplice: per questo basta osservare che il sistema aggiunto a quello rappresentato dalle sezioni piane di  $F_3$ , è un sistema  $\infty^3$  di curve di genere quattro e grado sei, necessariamente semplice perchè la serie canonica di una cubica piana doppia non può essere composta con una involuzione ellittica!

Ora i p. d. a) e b) appaiono come rappresentanti due involuzioni sopra superficie sestiche  $F_6$ , e si potrebbe dubitare *a priori* che si tratti di involuzioni diverse sopra una medesima  $F_6$ ; ma in realtà una delle due involuzioni si riduce ad un caso particolare dell'altra, poichè la trasformazione quadratica di punti fondamentali (p. es.)  $A, A'$  e  $B$ , cambia il p. d. b) in un caso particolare di a), e precisamente in quello che si ha quando la  $C_6$  che fa parte della curva di diramazione di a), è di genere quattro, possedendo un ulteriore punto doppio. Vedremo poi che a questa particolarità risponde la circostanza che il tetraedro i cui spigoli sono doppi per la  $F_6$ , si riduce ad un angoloide. Intanto si può osservare la proprietà inversa: se  $O$  è il vertice dell'angoloide tetraedro i cui spigoli sono doppi per una  $F_6$ , proiettando la  $F_6$  da  $O$  si ottiene un p. d. con curva di diramazione  $C_{10}$ , del decimo ordine, dotata di sei punti quadrupli disposti come i vertici di un quadrilatero completo (i cui lati fanno quindi parte della  $C_{10}$ ). La trasformazione quadratica che ha per lati del triangolo fondamentale *tre lati* del quadrilatero suddetto, trasforma la  $C_{10}$  in una  $C_8 = C_6 + C_2$  del tipo b). Invece la trasformazione quadratica che ha per lati del triangolo fondamentale *due lati e una diagonale* di quel quadrangolo, cambia la  $C_{10}$  in una  $C_8$  del tipo a), spezzata in due rette  $C_1$  e  $C'_1$ , e in una sestica avente un punto doppio nell'intersezione di  $C_1$  con  $C'_1$ , un tacnode su  $C_1$  e uno su  $C'_1$ , e dotata di un ulteriore punto doppio.

4. Approfondiamo ora lo studio del p. d. a), risolvendo in modo diretto il problema di costruire la superficie  $F_6$ , passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro, di cui tale p. d. è immagine.

Le sezioni piane della  $F_6$  costituiscono un sistema lineare semplice  $|K|$ , di dimensione 3, genere 4 e grado 6. Facciamo vedere che un sistema siffatto può essere rappresentato sul nostro p. d. con un opportuno sistema continuo (non lineare)  $\infty^3$  di sestiche  $K_6$  di genere 4, passanti doppiamente per  $O, A, A', B, B'$ , dotate di un ulteriore punto doppio variabile, e tangenti alla  $C_8$  ovunque la incontrano.

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, « Memorie della Soc. It. delle Scienze, detta dei XL », ser. 3<sup>a</sup>, t. XIV, 1906, p. 327.



Per determinare questo sistema di  $K_6$ , si noti che esso rappresenterà effettivamente un sistema  $|K|$  del tipo suddetto, solo quando le  $K_6$  siano scelte in modo che ciascuna di esse dia l'immagine di una curva spezzata in due parti con due punti di connessione corrispondenti al punto doppio variabile della  $K_6$  <sup>(1)</sup>. Si deve allora ricercare come sia possibile tale scelta.

Per questo conviene premettere un'osservazione. Un sistema continuo  $\infty^3$  di sestiche di genere 4, con i punti doppi  $O, A, A', B, B'$ , un ulteriore punto doppio variabile, e ottotangenti alla  $C_8$ , è contenuto in un sistema più ampio, di dimensione 4, costituito da sestiche di genere 5, le quali passano pure doppiamente per  $O, A, A', B$  e  $B'$ , e sono ottotangenti alla  $C_8$ . Ora se questo sistema  $\infty^4$ , è tale che la sua curva generica rappresenta una curva riducibile, ad ogni sestica con un punto doppio variabile, che appartenga ad esso, corrisponde una curva spezzata in due parti ciascuna delle quali ha un punto doppio nei due punti omologhi del punto doppio variabile della sestica immagine, e che quindi sono senza punti di connessione. Ne segue che le richieste  $\infty^3 K_6$  di genere 4, immagini di curve spezzate, dovranno essere contenute in un sistema  $\infty^4$  di sestiche di genere 5, la cui curva generica rappresenti una curva irriducibile.

Ciò premesso, riusciremo a risolvere il problema invertendolo: era data la  $C_8$  e si trattava di costruire le  $\infty^3 K_6$  immagini di curve spezzate; al contrario, prendiamo come data una particolare  $K_6 = K'_6$  e cerchiamo di costruire la  $C_8$ . La  $K'_6$  sarà una sestica passante doppiamente per  $O$ , dotata di due tacnodi in  $(A, A')$  e  $(B, B')$ , ed avente un ulteriore punto doppio; la  $C_8$  dovrà ricercarsi fra le  $\infty^{12}$  curve dell'ottavo ordine che hanno in  $O$  un punto quadruplo, e due punti  $[3, 3]$  in  $(A, A')$  e in  $(B, B')$  (risultando così spezzate nelle rette  $OA, OB$ , e in una sestica passante doppiamente per  $O, A, A', B$  e  $B'$ ). Fra queste  $C_8$  ce ne sono  $\infty^4$  ottotangenti alla  $K'_6$ : ci proponiamo di determinare una di esse — sia  $C'_8$  — in modo che, assumendo la  $C'_8$  come curva di diramazione, nasca un p. d. sul quale il sistema continuo  $\infty^3$  di sestiche di genere 4 ottotangenti a  $C'_8$ , a cui appartiene la  $K'_6$ , rappresenti un sistema lineare semplice di genere 4 e grado 6. Ora se sopra la  $K'_6$  si estrae la radice quadrata di una  $C_8$  ottotangente, si ottiene una curva spezzata solo quando il gruppo degli otto punti di contatto di  $K'_6$  e  $C_8$  sia equivalente a quelli segati su  $K'_6$  dalle coniche per  $A$  e  $B$ , poichè queste coniche — insieme alle rette  $OA$  e  $OB$  — costituiscono il sistema lineare metà di quello delle  $\infty^{12} C_8$  <sup>(2)</sup>. Ma, per l'osser-

(1) Il grado  $n$  del sistema rappresentato dalle  $K_6$  si determina contando i punti comuni a due  $K_6$  infinitamente vicine, fuori di  $O, A, A', B, B'$ , dei contatti con la  $C_8$ , e delle due intersezioni che cadono nell'intorno del loro punto doppio variabile. Del resto esso risulta anche dalla conoscenza del genere  $\pi$  del sistema (essendo  $n = 2\pi - 2$ ).

(2) Cfr. p. es. F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*. Bologna, Zanichelli, 1924, vol. III, libro V, cap. IV, § 38. Vedi anche le citate *Lezioni sulle superficie algebriche* di ENRIQUES, § 58.



vazione fatta sopra, per quegli otto punti di contatto non deve passare una delle coniche per A e B, perchè altrimenti lo stesso accadrebbe per i contatti della  $C_8$  considerata con ognuna delle  $\infty^4$  sestiche di genere 5, passanti doppiamente per O, A, A', B e B', che formano il sistema continuo di sestiche ottotangenti alla  $C_8$ , a cui appartiene  $K'_6$ ; e quindi anche la sestica generica di tale sistema  $\infty^4$  risulterebbe immagine di una curva spezzata.

Allora per determinare la  $C'_8$ , consideriamo la serie lineare  $g_{16}^{11}$ , d'ordine 16 e dimensione 11, che è segata su  $K'_6$  dal sistema  $|C_8|$  delle  $\infty^{12}$   $C_8$ : questa serie ha come *coppia neutra* quella costituita dai due punti che cadono nel punto doppio di  $K'_6$  che non è base per  $|C_8|$ . È noto <sup>(1)</sup> che in  $|C_8|$  esistono  $2^9$  sistemi continui  $\infty^4$ , costituiti da curve ottotangenti alla  $K'_6$ , e non passanti per il predetto punto doppio di  $K'_6$ : ciascuno di questi sistemi, con i gruppi dei punti di contatto delle sue curve, dà sulla  $K'_6$  una serie lineare  $g_8^3$ , il cui doppio appartiene alla  $g_{16}^{11}$ . Però le  $g_8^3$  così ottenute, non sono tutte disequivalenti, perchè si distribuiscono in coppie contenute in una stessa  $g_8^4$ , metà della  $g_{16}^{12}$  che contiene la  $g_{16}^{11}$ . Fra tali  $g_8^3$  è anche quella segata su  $K'_6$  dalle coniche per A e B: prendiamo allora la  $g_8^3$  equivalente a quella, ma da essa distinta, e sia  $C'_8$  la curva generica del sistema  $\infty^4$  di  $C_8$  ottotangenti a  $K'_6$ , che determina quest'ultima  $g_8^3$ . *La  $C'_8$  assunta come curva di diramazione, ha i requisiti richiesti.*

Determinata così la  $C'_8$ , si faccia variare con continuità fino a portarla a coincidere con la curva di diramazione  $C_8$  del p. d. dato: la  $K'_6$  — che pure varierà in modo continuo — avrà come limite una sestica  $K_6$  la quale appartiene ad un sistema continuo  $\{K_6\}$ ,  $\infty^3$ , di sestiche di genere 4, passanti doppiamente per O, A, A', B, B', aventi un ulteriore punto doppio variabile, e ottotangenti alla  $C_8$ . Il sistema  $\{K_6\}$  è evidentemente quello richiesto.

5. Aggiungiamo poche parole sul p. d. del tipo b), per far vedere che esso — come si è detto — rappresenta una *superficie  $F_6$  del sesto ordine, passante doppiamente per gli spigoli di un angoloide tetraedro*. Abbiamo già visto che sopra la superficie cubica doppia  $F_3$  che s'identifica col nostro p. d., al sistema delle sezioni piane di  $F_6$ , corrisponde il sistema aggiunto a quello delle cubiche doppie sezioni piane di  $F_3$ . Quando si passa dalla  $F_3$  al p. d., tale sistema aggiunto sarà rappresentato da un opportuno sistema continuo,  $\infty^3$ , di sestiche  $K_6$  passanti doppiamente per A, A', B, B', C, C', e seitangenti alla  $C_8$  di diramazione. Ma il sistema delle  $K_6$  ammette come fondamentale la conica  $C_2$ , che fa parte della curva di diramazione, ed ha per residuo il sistema  $\infty^2$  delle coniche per A, B, C (contate due volte). A quest'ultimo sistema, che è di grado due, corrispondono sulla  $F_6$  le sezioni con i piani di una stella, il cui centro è pertanto un punto quadruplo per la  $F_6$ .

(1) Cfr. L. CAMPEDELLI, *La bisezione delle serie lineari sopra una curva di genere virtuale p e genere effettivo p — 1*. « Bollettino dell'Unione Mat. Ital. », vol. XI, 1932.

**Matematica.** — *Sur le calcul des variations.* Nota di N. SAKELLARIOU, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Dans un travail antérieur<sup>(2)</sup> j'ai traité un problème du calcul des variations présentant une discontinuité ordinaire et sous la forme paramétrique<sup>(3)</sup>. Dans l'énoncé connu: « trouver le minimum de l'intégrale

$$(1) \left\{ \begin{aligned} I &= \int_{s_1}^{s_2} F(x, y; \vartheta) ds = \int_{s_1}^{s_2} F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) ds \\ F(x, y; kx', ky') &= kF(x, y; x', y') \quad ; \quad k > 0, \\ x' &= \frac{dx}{ds} = \cos \vartheta, \quad y' = \frac{dy}{ds} = \sin \vartheta \end{aligned} \right.$$

nous nous sommes proposés, de plus, de chercher les courbes discontinues qui admettent des points de discontinuité ordinaires ou bien des points de rupture et qui rendent minimum l'intégrale (1) dans un sens bien déterminé. Nous avons appelé ces solutions "discontinues" pour les distinguer des autres, connues et désignées comme solutions "anguleuses". Nous supposons que les courbes extrémales du problème joignent les deux points fixes  $P_1 (s = s_1)$ ,  $\bar{P}_2 (s = \bar{s}_2)$ .

Soient:

$$(2) \quad C: x = x(s), y = y(s) \quad , \quad s_1 \leq s \leq \bar{s}_2$$

les équations de la courbe cherchée qui rend minimum l'intégrale (1) et qui, étant de la classe  $C'$ , remplit les conditions initiales du problème, bien connues et possède une discontinuité avec des points de rupture  $P_0 (s = s_0)$ ,  $\bar{P}_0 (s = \bar{s}_0 \geq s_0)$ . Elle se compose alors de deux arcs  $P_1 P_0$  et  $\bar{P}_0 \bar{P}_2$  de courbes sans points multiples, qui n'ont aucun point en commun, tandis que les points  $P_0 (x_0, y_0)$  et  $\bar{P}_0 (\bar{x}_0 = x_0, \bar{y}_0)$  se trouvent sur une parallèle

(1) Nella seduta del 17 gennaio 1932.

(2) *Ueber die nicht-stetigen Lösungen in der Variationsrechnung*, « Rendic. del Circolo Mat. di Palermo », t. LV, pp. 38-48 (1927). Au cours de la présente Note ce travail sera cité sous le signe I.

(3) C'est Mr. Razmadzé qui, le premier, a posé et traité le problème des solutions discontinues dans le Calcul des Variations mais sous la forme de la variable indépendante  $x$ . Voir « Math. Annalen », Bd. 94, Heft 1/2, et « Proceedings of the International Math. Congress », Bd. I, pp. 561-588 (1924).

à l'axe Oy, de sorte que les équations de l'extrémale discontinue du problème sont de la forme

$$(2') \quad C: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = x_0(s) \\ y = y_0(s) \end{array} \right. (s_1 \leq s \leq s_0), \quad \begin{array}{l} = \bar{x}_0(s) \\ = \bar{y}_0(s) \end{array} (\bar{s}_0 \leq s \leq \bar{s}_2) \Bigg\}.$$

Dans I nous avons considéré comme équations fondamentales les quatre conditions suivantes

$$(3) \quad \begin{cases} F_{x'} - F_{x'}(x_0, y_0; \vartheta_0) = 0 & , \quad \bar{F}_{x'} = F_{x'}(x_0, \bar{y}_0; \vartheta_0) = 0 \\ F_{y'} \equiv F_{y'}(x_0, y_0; \vartheta_0) = 0 & , \quad \bar{F}_{y'} \equiv F_{y'}(x_0, \bar{y}_0; \vartheta_0) = 0 \end{cases}$$

où  $F_{x'}, F_{y'}, \dots$  représentent les dérivées de  $F$  par rapport à  $x'$  et à  $y'$  et  $\vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$  les angles des tangentes aux points de rupture  $P_0$  et  $\bar{P}_0$  de l'extrémale (2) tandis que comme conditions nécessaires apparaissent les suivantes:

$$(4) \quad \begin{cases} F_{x'} - \bar{F}_{x'} = 0 \\ F_{y'} = 0 & , \quad \bar{F}_{y'} = 0. \end{cases}$$

Le problème présente, en réalité, deux cas bien distincts: le premier, où nous avons pris comme conditions fondamentales les (3), a été déjà traité dans I et II<sup>(1)</sup>; le second cas est celui où les équations (4) remplacent les (3) et dans lequel on aura  $\bar{x}' = x'$  aux points de rupture.

2. En effet, considérons l'intégrale (1) prise le long de la courbe (2) et d'une des courbes de comparaison  $\bar{C}$ , définies au travail I,  $P$  et  $\bar{P}$  étant des points de rupture sur  $\bar{C}$ . Soient, de plus

$$L: x = \xi(a) \quad , \quad y = \eta(a)$$

$$\bar{L}: \bar{x} = \bar{\xi}(a) \quad , \quad \bar{y} = \bar{\eta}(a)$$

deux courbes quelconques de la classe  $C'$ , et dont  $L$  joint les points  $P_0, P$  et  $\bar{L}$  les points  $\bar{P}_0, \bar{P}$ . Supposons que la courbe de l'intégration se transforme continuellement de telle sorte que  $P_1$  et  $\bar{P}_2$  restent fixes, tandis que  $P_0, \bar{P}_0$  toujours de même abscisse se déplacent le long des courbes  $L$  et  $\bar{L}$  et nous trouvons comme nécessaire la condition suivante de transversalité

$$(5) \quad (F_{x'} - \bar{F}_{x'}) \xi'(a) + F_{y'} \eta'(a) - \bar{F}_{y'} \bar{\eta}'(a) = 0.$$

Par suite de l'hypothèse précédente au sujet des courbes  $L$  et  $\bar{L}$ , la relation (5) nous donne les conditions (4).

(1) N. SAKELLARIOU, *Sur les foyers des solutions discontinues du Calcul des Variations*, « Bull. de la Soc. Math. de Grèce », t. IX, 1, 2, pp. 31-39 (1928). Ce travail est désigné dans la suite sous le signe II.

Si nous supposons que:  $F_{x'} = 0$ ,  $\bar{F}_{x'} = 0$  nous aurons les équations (3) sur lesquelles est basée la suite du problème dans I et II.

3. Mais l'existence des deux cas dans le problème en question ressort aussi de ce qui suit <sup>(1)</sup>.

En effet, soit l'intégrale (1) prise le long de la courbe  $P_1 P \bar{P} \bar{P}_2$  et qui se compose de deux arcs de courbes continues tels que  $P_1 P$  et  $\bar{P} \bar{P}_2$  qui ne se rejoignent pas et dont le premier est le résultat de l'allongement ou du raccourcissement de l'arc  $P_1 P_0$  de (2') d'une longueur  $P_0 P$ , le second provient d'un raccourcissement ou d'un allongement de  $\bar{P}_0 \bar{P}_2$  de  $\bar{P}_0 \bar{P}$ , tandis que  $P, \bar{P}$  sont les points de rupture de cette courbe. Si  $P, \bar{P}$  correspondent à la valeur  $s$  (et  $\bar{s} \cong s$ ) de l'arc, l'intégrale

$$I(s) = \int_{P_1}^s F(x, y; \vartheta) ds + \int_s^{\bar{s}_2} F(x, \bar{y}; \bar{\vartheta}) ds = I(s) + \bar{I}(s)$$

devient minimum pour  $s = s_0$  ( $s = \bar{s}_0$ ) et par conséquent nous aurons

$$(6) \quad I'(s)_{s_0} - \bar{I}'(s)_{\bar{s}_0} = 0, \quad I''(s)_{s_0} - \bar{I}''(s)_{\bar{s}_0} \geq 0;$$

mais on a :

$$I'(s) = F(x, y; \vartheta) - F(x, \bar{y}; \bar{\vartheta})$$

et pour  $s = s_0$  ( $\bar{s}_0$ ) on a :

$$\begin{aligned} & x'_0 F_{x'}(x_0, y_0; \vartheta_0) + y'_0 F_{y'}(x_0, y_0; \vartheta_0) - \\ & - \bar{x}'_0 F_{x'}(x_0, \bar{y}_0; \bar{\vartheta}_0) - \bar{y}'_0 F_{y'}(x_0, \bar{y}_0; \bar{\vartheta}_0) = 0. \end{aligned}$$

En vertu de (4), nous aurons aux points de rupture :

$$(7) \quad (x'_0 - \bar{x}'_0) F_{x'} = 0.$$

Si  $F_{x'} = 0$ , on aura:  $\bar{F}_{x'} = 0$  et on a le cas des équations (3) c'est-à-dire, le premier <sup>(2)</sup>. La condition (6<sub>2</sub>) est réduite alors à la suivante :

$$(8) \quad x'_0 F_x - \bar{x}'_0 \bar{F}_x + y'_0 F_y - \bar{y}'_0 \bar{F}_y = 0.$$

Si  $F_{x'} \neq 0$ ,  $\bar{F}_{x'} \neq 0$ , on aura  $x'_0 = \bar{x}'_0$  et par suite :

$$(9) \quad x'_0 (F_x - \bar{F}_x) + y'_0 F_y - \bar{y}'_0 \bar{F}_y + (x''_0 - \bar{x}''_0) F_{x'} = 0.$$

Je me propose de traiter dans cette Note le second cas du problème, c'est-à-dire, celui où nous considérons comme fondamentales les conditions (4), dont la première est plus faible que  $F_{x'} = 0$ ,  $\bar{F}_{x'} = 0$ .

(1) Voir L. M. GRAVES, *Discontinuous solutions in the Calculus of Variations*, « Bull. of the Amer. Math. Society », vol. XXXVI, 12, pp. 842-843 (1930).

(2) Voir L. M. GRAVES, loc. cit., p. 843.

4. Soit l'extrémale (2') ayant comme points de rupture  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $\bar{P}_0(x_0, \bar{y}_0)$ , dont les tangentes à ces points font des angles  $\vartheta_0$  et  $\bar{\vartheta}_0$  avec  $Ox$ ; prenons ensuite un ensemble d'extrémales

$$(10) \quad x = \varphi(s, a) \quad , \quad y = \psi(s, a) \quad , \quad s_1 \leq s \leq s_0$$

qui renferment l'arc extrémal  $P_1 P_0$ :  $x = x_0(s)$ ,  $y = y_0(s)$  pour  $a = a_0$ , et qui sont assujetties aux conditions initiales connues.

On pose la question suivante: Sur une extrémale  $P_1 P = Ca$  voisine de  $P_1 P_0$  déterminer: 1° un point  $P(x, y)$ ; 2° un autre point  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$  situé sur la droite  $X = x$  parallèle à l'axe  $Oy$ ; 3° une direction passant par le point  $\bar{P}$  et dont le sens positif forme un angle  $\bar{\vartheta}$  avec l'axe des  $x$ , tel que l'angle  $\vartheta$  de la direction positive de la tangente  $Ca$  en  $P$  et l'angle inconnu  $\bar{\vartheta}$  avec les coordonnées des points de rupture  $P, \bar{P}$  remplissent les conditions (4).

Pour déterminer les  $s, \bar{y}, \bar{\vartheta}$  nous avons les équations suivantes:

$$(11) \quad \begin{cases} F_{x'}(\varphi(s, a), \psi(s, a); \varphi_s, \psi_s) - F_{x'}(\varphi(s, a), \bar{y}; \bar{\vartheta}) = 0 \\ F_{y'}(\varphi(s, a), \psi(s, a); \varphi_s, \psi_s) = 0 \quad , \quad F_{\bar{y}'}(\varphi(s, a), \bar{y}; \bar{\vartheta}) = 0, \end{cases}$$

et on trouve:

$$\frac{\partial(F_{x'} - \bar{F}_{x'}, F_{y'}, \bar{F}_{y'})}{\partial(s, \bar{y}, \bar{\vartheta})} = \bar{F}_x \cdot F_y \cdot \bar{F}_y,$$

$\bar{F}_x$  étant la fonction bien connue de Legendre, d'où la conclusion suivante: Si les conditions

$$F_y \equiv F_y(x_0, y_0; \vartheta_0) \neq 0 \quad , \quad \bar{F}_y \equiv F_y(x_0, \bar{y}_0; \bar{\vartheta}_0) \neq 0$$

sont remplies (aux points de rupture) les équations (11) peuvent se résoudre d'une seule manière dans le voisinage  $s_0, \bar{y}_0, \bar{\vartheta}_0$  par rapport à  $s, \bar{y}, \bar{\vartheta}$  et la solution:

$$s = s(a) \quad , \quad \bar{y} = \bar{y}(a) \quad , \quad \bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(a)$$

dans le voisinage  $a = a_0$  est de l'ordre  $C'$ .

Nous pouvons, maintenant, du point  $\bar{P}(\bar{x} = \varphi(s, a), \bar{y} = \bar{y}(a))$  et dans la direction définie par  $\bar{\vartheta}$  construire un arc  $\bar{C}a$  dont les équations sont de la forme:

$$(10) \quad \bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{s}, a) \quad , \quad \bar{y} = \bar{\psi}(\bar{s}, a).$$

Nous obtenons ainsi une extrémale discontinue  $Ca + \bar{C}a$  ayant  $P$  et  $\bar{P}$  comme points de rupture.

Si nous faisons varier le paramètre  $a$  nous aurons un ensemble d'extrémales discontinues qui renferment la solution (2') pour  $a = a_0$ .



5. Lorsque  $a$  varie, les points  $P$  et  $\bar{P}$  décrivent deux courbes  $B$  et  $\bar{B}$ , que nous appelons « lignes des points de rupture » du problème considéré et dont les équations sont :

$$\begin{aligned} B : \quad & \varphi(s(a), a) = x(a) \\ & \psi(s(a), a) = y(a) \\ \bar{B} : \quad & \bar{\varphi}(\bar{s}(a), a) = \varphi(\bar{s}(a), a) = \bar{x}(a) = x(a) \\ & \bar{\psi}(\bar{s}(a), a) = \bar{y}(a). \end{aligned}$$

Calculons maintenant les  $\text{tg } \omega$  et  $\text{tg } \bar{\omega}$  des angles des courbes  $B$  et  $\bar{B}$  avec l'axe des  $x$  aux points de rupture  $P, \bar{P}$ , et surtout aux points  $P_0, \bar{P}_0$  et nous trouvons :

$$\text{tg } \omega = - \frac{M \theta(s_0, \tau) - p \cdot q \cdot F_1 \cdot \theta_s(s_0, \tau)}{N \theta(s_0, \tau) + p^2 \cdot F_1 \cdot \theta_s(s_0, \tau)}$$

$\Delta(s, a)$  désignant le déterminant  $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, a)}$  et  $p = \cos \vartheta$ ,  $q = \sin \vartheta$ , tandis qu'on a comme on sait

$$\begin{aligned} \Delta(s, a_0) &= c \cdot \theta(s, \tau) \quad , \quad \Delta_s(s, a_0) = c \cdot \theta_s(s, \tau) \\ \Delta(\bar{s}, a_0) &= \bar{c} \cdot \bar{\theta}(\bar{s}, \tau) \quad , \quad . . . . . \end{aligned}$$

où  $c, \bar{c}$  sont des constantes et  $Q(s = \tau)$  le foyer de l'extrémale  $P_1 P_0$ .

6. De plus, nous trouvons la condition suivante qui doit être remplie aux points  $P_0$  et  $\bar{P}_0$ , qui est une des conséquences des (4), en supposant que  $F_y, \bar{F}_y \neq 0$  :

$$\begin{aligned} & \bar{F}_y [(M^2 - LN) \theta - (p F_x + q F_y) \cdot F_1 \cdot \theta_s] = \\ & = F_y [(\bar{M}^2 - \bar{L}\bar{N}) \bar{\theta} - (\bar{p} \bar{F}_x + \bar{q} \bar{F}_y) \bar{F}_1 \cdot \bar{\theta}_s] \end{aligned}$$

où  $L, M, N, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$  désignent des quantités bien connues.

Le premier membre de cette égalité est le produit de  $\bar{F}_y \cdot \theta$  par la quantité

$$M^2 - LN - (p F_x + q F_y) \cdot F_1 \cdot \theta_s : \theta,$$

qui est une fonction décroissante de  $\tau$ , si l'on suppose au point  $P_0$  :

$$p F_x + q F_y > 0^{(1)}.$$

7. Prenons la dérivée de  $\text{tg } \omega$  par rapport à  $\tau$  et nous trouvons :

$$\frac{d}{d\tau} \text{tg } \omega = - \frac{p \cdot F_1 \cdot F_y (\theta_s \theta_\tau - \theta \cdot \theta_{s\tau})}{(N \cdot \theta + p^2 \cdot F_1 \cdot \theta_s)} = - \frac{k' F_y \cdot p_0}{F_1(\tau) (\dots)^2},$$

$k'$  étant une constante différente de 0.

(1) Voir II, p. 36.

Cette dernière égalité prouve que la dérivée de  $\operatorname{tg} \omega$  par rapport à  $\tau$  conserve le même signe lorsque  $\tau$  varie, puisque  $F_1(\tau) > 0$  et  $F_y$  indépendant de  $\tau$  est différent de 0.

Si  $P'_0 (s = s'_0)$  est le point conjugué de  $P_0$  sur  $C_{a_0}$  le déterminant  $\theta(s_0, \tau)$  s'annulera pour  $\tau = s'_0$ ,  $\tau = s_0$  et alors, on aura:

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{q_0}{p_0} = \operatorname{tg} \vartheta_0.$$

8. Il est aisé de montrer que, pour que la courbe  $C_{a_0} + \bar{C}_{a_0}$  rende minimum l'intégrale (1) il faut avoir non seulement  $P'_0 < P_1$ ,  $\bar{P}'_2 < \bar{P}'_0$  ( $P'_0, \bar{P}'_0$  étant les points conjugués de  $P_0$  et  $\bar{P}_0$  de chacun des arcs  $P_1 P_0$  et  $\bar{P}_0 \bar{P}_2$ ), mais de plus les conditions de M. Carathéodory bien connues pour les solutions anguleuses<sup>(1)</sup>. Enfin, nous pouvons construire le champ du problème avec des extrémales discontinues. Ce champ sera composé de deux autres plus petits, distincts l'un de l'autre et correspondant respectivement aux courbes B et  $\bar{B}$  des points de rupture.

**Matematica.** — *Le formule di Saint-Venant per gli spazi curvi a tre dimensioni.* Nota di GIACINTA ANDRUETTO, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia  $V_3$  uno spazio curvo (o varietà) qualunque a tre dimensioni, e supponiamo che ogni suo punto P subisca un determinato spostamento infinitesimo (tangente alla  $V_3$ ), cioè supponiamo che lo spazio subisca, come si suol dire, una *deformazione infinitesima*.

Se  $\mathbf{s}$  è il vettore (infinitesimo) che rappresenta lo spostamento subito dal punto P, l'omografia

$$(1) \quad \alpha = d_v \mathbf{s} / dP$$

si chiama *omografia di deformazione*. Il secondo membro è la derivata *superficiale* di  $\mathbf{s}$ , e il vettore  $d_v \mathbf{s}$  è il differenziale *superficiale* (nel senso di Boggio<sup>(3)</sup>) del vettore  $\mathbf{s}$ .

La *dilatazione* dell'omografia  $\alpha$ , cioè

$$(2) \quad D\alpha = D(d_v \mathbf{s} / dP),$$

(1) BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, pp. 378–380, et C. CARATHÉODORY, *Dissertation*, Göttingen, 1904, § 6.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, p. 178 (Zanichelli; Bologna, 1930).

In ciò che segue indichiamo quest'opera con *Geom. diff.*

è rappresentata da una matrice i cui elementi sono le sei componenti di deformazione nel punto P, rispetto al triedro di riferimento scelto.

La quadrica indicatrice di  $D\alpha$  è il luogo dei punti M che soddisfano all'equazione

$$(M - O) \times D\alpha (M - O) = \text{cost};$$

essa dicesi anche *quadrica di deformazione*.

È noto che, data una quadrica qualunque, questa, in generale, non può assumersi come quadrica di deformazione; cioè, in altri termini, data una qualunque dilatazione  $D\alpha$  essa, in generale, non rappresenta una deformazione pura d'un corpo continuo. Affinchè ciò avvenga devono essere soddisfatte certe condizioni che, per lo spazio euclideo, sono state determinate da Saint-Venant, e, colle notazioni vettoriali assumono la forma semplicissima <sup>(1)</sup>

$$(3) \quad \text{Rot } K \text{ Rot } D\alpha = 0.$$

Beltrami dimostrò poi che tale condizione è pure sufficiente.

Le condizioni analoghe per spazi curvi qualunque a tre dimensioni sono state determinate dal prof. Palatini <sup>(2)</sup>, valendosi dei metodi del calcolo differenziale assoluto.

Però i calcoli esposti dal Palatini sono enormemente complicati (basta osservare, ad es., che vi intervengono sommatorie sestuple e settuple!) mentre invece, con altro procedimento, e coi metodi vettoriali, si può arrivare facilmente al risultato, e con formule abbastanza semplici ed espressive, come appunto mostro in questa Nota.

1. Ricordiamo in primo luogo che il *rotazionale superficiale* del vettore  $s$ , che indicheremo con  $2u$ , è definito da

$$(4) \quad 2u = \text{rot}_v s = 2V\alpha,$$

e allora per la dilatazione  $D\alpha$  si ha l'espressione ben nota:

$$(5) \quad D\alpha = K\alpha + u \wedge.$$

Siccome poi la relazione di Saint-Venant, che si tratta di ottenere, è una generalizzazione della (3), dovremo intanto vedere, quanto vale, nel caso attuale, il primo membro della (3); perciò ricordiamo che il rotazionale superficiale della omografia  $\alpha$ , che si indica con  $\text{Rot}_v \alpha$  è definito da

$$\text{Rot}_v \alpha = 2V_k \frac{d_v \alpha}{dP},$$

(1) Cfr. ad es. BURGATTI, *Teoria matematica della Elasticità*, p. 97 (Zanichelli; Bologna, 1931).

(2) PALATINI, *Sulle quadriche di deformazione per gli  $S_3$*  (« Atti R. Istituto Veneto », t. LXXVI, 1916-17).

essendo  $d_v \alpha$  il differenziale superficiale di  $\alpha$  (nel senso di Boggio, *Geom. diff.* p. 180).

Dalla (5) si ha poi:

$$(6) \quad \text{Rot}_v D\alpha = \text{Rot}_v K\alpha + \text{Rot}_v (\mathbf{u} \wedge),$$

ma da una formula nota <sup>(1)</sup> si ha

$$\text{Rot}_v (\mathbf{u} \wedge) = \frac{d_v \mathbf{u}}{dP} - \text{div}_v \mathbf{u}$$

e inoltre, analogamente a quanto avviene nello spazio euclideo, si ha <sup>(2)</sup>  
 $\text{div}_v \mathbf{u} = \text{div}_v \text{rot}_v \mathbf{s}/2 = 0$ , quindi rimane

$$\text{Rot}_v (\mathbf{u} \wedge) = d_v \mathbf{u}/dP.$$

Applicando poi quest'altra formula del prof. Boggio <sup>(3)</sup>

$$(7) \quad \text{Rot}_v K \frac{d_v \mathbf{s}}{dP} = -\mu (\mathbf{s} \wedge),$$

ove  $\mu$  è l'omografia di Ricci (dilatazione) per la varietà  $V_3$  considerata (*Geom. diff.*, p. 247), avremo dalla (6):

$$\text{Rot}_v D\alpha = -\mu (\mathbf{s} \wedge) + d_v \mathbf{u}/dP.$$

Ne segue

$$K \text{Rot}_v D\alpha = \mathbf{s} \wedge \mu + K \frac{d_v \mathbf{u}}{dP};$$

prendendo il rotazionale superficiale dei due membri e applicando la (7) si ha

$$\text{Rot}_v K \text{Rot}_v D\alpha = \text{Rot}_v (\mathbf{s} \wedge \mu) - \mu (\mathbf{u} \wedge);$$

ora per una formula già adoperata <sup>(4)</sup> e tenendo conto della proprietà, segnalata dal prof. Cisotti (*Geom. diff.*, p. 249) che  $\text{grad}_v \mu = 0$ , la formula precedente diviene:

$$\text{Rot}_v K \text{Rot}_v D\alpha = -\frac{d_v \mu}{dP} \mathbf{s} + (\alpha - I_1 \alpha) \mu - \mu (\mathbf{u} \wedge),$$

(1) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, p. 187, [13] (Zanichelli; Bologna, 1929).

(2) BOGGIO, *Alcune formule vettoriali negli spazi curvi a tre dimensioni* («Rendiconti R. Accademia Lincei» 1° sem. 1932).

(3) Loc. cit. (2).

(4) Loc. cit. (2), pag. precedente.

e siccome  $\alpha = D\alpha + \mathbf{u} \wedge$ , si ha ancora:

$$(8) \quad \text{Rot}_v K \text{Rot}_v D\alpha = [\mathbf{u} \wedge \mu - \mu (\mathbf{u} \wedge)] - \frac{d_v \mu}{dP} \mathbf{s} + (D\alpha - I_1 D\alpha) \mu^{(1)}.$$

Questa formula è, nel caso attuale, la corrispondente della (3); però essa non risolve ancora la questione proposta, perchè nel secondo membro figurano gli elementi  $\mathbf{s}, \mathbf{u}$ , che occorre pertanto eliminare.

2. Diciamo  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  tre vettori unitari paralleli alle direzioni unite della dilatazione  $\mu$ , e  $w_1, w_2, w_3$  le curvature riemanniane principali della varietà  $V_3$  in  $P$  (*Geom. diff.*, p. 251); avremo

$$(9) \quad \mu \mathbf{i}_r = w_r \mathbf{i}_r, \quad (r = 1, 2, 3).$$

Applicando poi i due membri della (8) al vettore  $\mathbf{i}_r$  e poi facendo il prodotto interno per  $\mathbf{i}_r$  si ottiene:

$$(10) \quad \mathbf{i}_r \times \text{Rot}_v K \text{Rot}_v D\alpha \mathbf{i}_r = -\mathbf{i}_r \times \frac{d_v \mu}{dP} \mathbf{s} \mathbf{i}_r + w_r (\mathbf{i}_r \times D\alpha \mathbf{i}_r - I_1 D\alpha);$$

trasformiamo il primo termine del secondo membro; essendo  $\mu$  una dilatazione, si scorge subito che si ha:

$$\mathbf{i}_r \times d_v \mu \cdot \mathbf{i}_r = d_v (\mathbf{i}_r \times \mu \mathbf{i}_r) - 2 d_v \mathbf{i}_r \times \mu \mathbf{i}_r,$$

ma ricordando le (9), e che i vettori  $\mathbf{i}_r$  sono unitari, e pertanto che  $d_v \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r = 0$ , risulta:

$$\mathbf{i}_r \times \frac{d_v \mu}{dP} dP \mathbf{i}_r = dw_r = \text{grad}_v w_r \times dP,$$

e per l'arbitrarietà del vettore tangenziale  $dP$ , si conclude che il primo termine del secondo membro della (10) vale  $-\text{grad}_v w_r \times \mathbf{s}$ , perciò la (10) può scriversi

$$(11) \quad \mathbf{s} \times \text{grad}_v w_r = -\mathbf{i}_r \times \text{Rot}_v K \text{Rot}_v D\alpha \mathbf{i}_r + w_r (\mathbf{i}_r \times D\alpha \mathbf{i}_r - I_1 D\alpha).$$

Supponiamo ora che le curvature  $w_r$  siano tre funzioni *qualunque* del punto  $P$ ; allora il loro jacobiano  $J$ , che vale

$$J = \text{grad}_v w_1 \times \text{grad}_v w_2 \wedge \text{grad}_v w_3,$$

è diverso da zero; e allora dalle (11) con una nota formula si può ricavare il vettore  $\mathbf{s}$ ; precisamente, se diciamo  $U_r$  il secondo membro della (11) si ha

$$(12) \quad J \cdot \mathbf{s} = U_1 \text{grad}_v w_2 \wedge \text{grad}_v w_3 + U_2 \text{grad}_v w_3 \wedge \text{grad}_v w_1 + \\ + U_3 \text{grad}_v w_1 \wedge \text{grad}_v w_2.$$

(1) Non è difficile vedere che la (8) equivale alle (C) della Nota del prof. PALATINI.



Prendendo poi il gradiente superficiale dei due membri della (11) risulta, per note proprietà:

$$K\alpha \operatorname{grad}_v w_r + K \frac{d_v \operatorname{grad}_v w_r}{dP} \mathbf{s} = \operatorname{grad}_v U_r,$$

od ancora ricordando la (5):

$$D\alpha \operatorname{grad}_v w_r - \mathbf{s} \wedge \operatorname{grad}_v w_r + K \frac{d_v \operatorname{grad}_v w_r}{dP} \mathbf{s} = \operatorname{grad}_v U_r,$$

moltiplicando scalarmente per  $\operatorname{grad}_v w_h$  si può scrivere

$$\begin{aligned} D\alpha \operatorname{grad}_v w_r \times \operatorname{grad}_v w_h - \mathbf{s} \times \operatorname{grad}_v w_r \wedge \operatorname{grad}_v w_h + \\ + \mathbf{s} \times \frac{d_v \operatorname{grad}_v w_r}{dP} \operatorname{grad}_v w_h = \operatorname{grad}_v U_r \times \operatorname{grad}_v w_h, \end{aligned}$$

scambiando  $r$  con  $h$ , e sommando le due eguaglianze risulta:

$$\begin{aligned} 2 D\alpha \operatorname{grad}_v w_r \times \operatorname{grad}_v w_h + \mathbf{s} \times \operatorname{grad}_v (\operatorname{grad}_v w_r \times \operatorname{grad}_v w_h) = \\ = \operatorname{grad}_v U_r \times \operatorname{grad}_v w_h + \operatorname{grad}_v U_h \times \operatorname{grad}_v w_r. \end{aligned}$$

Se finalmente si sostituisce qui ad  $\mathbf{s}$  il valore dato dalla (12) e si danno ad  $r$  ed  $h$  i valori 1, 2, 3, otteniamo *sei* equazioni scalari, che sono le condizioni cercate; esse sono equazioni differenziali di 3° ordine rispetto alle componenti di deformazione.

In casi speciali, che qui non vogliamo esaminare, le condizioni trovate si semplificano; ad es. se la varietà  $V_3$  ha una curvatura costante  $c$ , le (9) mostrano che  $\mu = c$ , e la (8) diviene

$$\operatorname{Rot}_v K \operatorname{Rot}_v D\alpha = (D\alpha - I_1 D\alpha) c,$$

e questa relazione fornisce le condizioni di Saint-Venant, nel caso della curvatura costante.

**Matematica.** — *Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi.* — I. *Problemi variazionali* Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi.* — II. *Formazione e proprietà della coppia di varietà reciproche.* Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sul parallelismo di Levi-Civita.* Nota di L. PELOSI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche.* Nota di P. DU VAL, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sur la composition principale des groupes continus infinis.* Nota di C. MOISIL, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Intorno agli effetti asintotici delle mareae sul moto dei corpi celesti. — I. Generalità e problema dei 2 corpi.* Nota di G. KRALL, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Secondo Sir G. Darwin, nel passato e nell'avvenire dei mondi, del sistema solare in particolare, le mareae hanno avuto ed avranno un'influenza forse essenziale. Egli, per primo ne rilevò gli effetti più cospicui e trasse dal loro studio sistematico lo spunto su cui sviluppare tutto un sistema cosmogonico.

In più ricerche, rimaste classiche, non solo formulò previsioni sul più lontano futuro, ma fece la storia, sin dalla genesi, di certi pianeti, con interessanti riferimenti alla Terra ed alla Luna.

Si limitò sempre, e pei suoi intenti ciò non disturbava, al caso di due corpi soltanto, in cui anzi, la massa di uno prevalendo di assai su quella dell'altro, può considerarsi fissa. Così pervenne, non però attraverso calcoli i più immediati, a riconoscere la tendenza delle orbite ellittiche a diventare circolari; nel mentre — ove si tratti di corpi rotanti — i periodi di rivoluzione tendono ad eguagliare quelli di rotazione.

A quest'ultima conseguenza egli giunse in seguito, dietro suggerimento di Kelvin, tenendo conto della circostanza energetica che le mareae, nel loro periodico rinnovarsi, sono accompagnate da una lenta ma incessante azione dissipativa. Per virtù di questa, l'energia totale del sistema va degradandosi, subordinatamente s'intende, poichè si tratta di sole azioni interne, all'integrale dei momenti, sino ad un valore minimo, di cui condizione è

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

proprio l'eguaglianza suindicata. Ciò egli ebbe a verificare, supponendo inizialmente e durante tutto il processo dissipativo, l'orbita circolare; ed impostò anzi il problema in forma tale da far sembrare quasi essenziale un'ipotesi siffatta.

Invero, quando recentemente T. Levi-Civita riagitò la questione per cercare di trar partito dal criterio energetico nelle condizioni più generali del moto orbitale dei due corpi<sup>(1)</sup>, per avere ragione della maggior mobilità (variabilità della distanza  $r$  tra i due corpi) del sistema, fece ricorso a talune considerazioni statistiche ben circoscritte e dichiarate nella teoria degli invarianti adiabatici.

Formalmente semplice, concettualmente elevato, il nuovo criterio consentì di considerare accanto ai moti di rivoluzione secondo orbite ellittiche, moti di rotazione intorno al baricentro qualsivogliono, dunque moti cosiddetti di *precessione regolare*.

Seguendo quell'indirizzo ci fu possibile<sup>(2)</sup> riconoscere che, *nel moto Kepleriano di due corpi celesti gravitanti e dotati ognuno di moto precessionale, oltre all'asintotica tendenza delle traiettorie ad atteggiarsi ad orbite circolari, le precessioni degenerano in rotazioni di cui gli assi si dispongono normali al piano del moto mentre le rispettive velocità angolari tendono ad eguagliare quella di rivoluzione*.

Siffatti armoniosi atteggiamenti del moto e la semplicità formale con cui fu possibile prevederli non poteva non dare la presunzione che, anche nel problema, pur così difficilmente penetrabile, dei *tre corpi* si dovesse pervenire a qualche risultato, a qualche previsione altrettanto concreta.

Senonchè difficoltà incontrate nella costruzione degli invarianti adiabatici del più complicato sistema parvero ben presto tanto difficilmente superabili da non lasciare altra alternativa se non quella di riprendere l'originario criterio di Kelvin nella sua accezione pura e semplice, cercando di evitare l'introduzione di qualsiasi considerazione statistica. Alla ripresa arrise qualche successo.

Bastò infatti ravvisare nell'atteggiarsi finale del moto i lineamenti tipici delle soluzioni stazionarie<sup>(3)</sup>, cosiddette « alla Routh », per affrancarsi da ogni considerazione statistica ed abbordare la descrizione, forse per la prima volta senza difficoltà alcuna, di un aspetto dei più suggestivi di sì eccelso problema.

Dimostreremo precisamente, dopo esserci cimentati a titolo preparatorio sul caso già trattato dei due corpi, che, *nel problema generale dei 3 corpi, gravitanti e dotati ognuno di moto precessionale, per effetto delle maree, il piano*

(1) T. LEVI-CIVITA, *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*, « Atti del Congresso internazionale dei Matematici », pp. 17-28, Bologna, 1928.

(2) G. KRALL, *Influenze adiabatiche delle maree nel moto Kepleriano di due corpi celesti giroscopici*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XIV, serie 6<sup>a</sup>, 2° sem., fasc. 5-6.

(3) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, « Lezioni di Meccanica razionale », vol. II, parte II, pp. 396-401, cap. X. Bologna, Zanichelli, 1927.

del moto tende a fissarsi normalmente all'invariante momento totale delle quantità di moto.

Il moto orbitale si atteggia ad una soluzione lagrangiana, cioè i corpi si dispongono sui vertici di un triangolo equilatero rotante con velocità uniforme  $\omega$ . Le precessioni a loro volta degenerano in rotazioni, con la stessa velocità angolare  $\omega$  mentre gli assi vanno a disporsi normalmente al piano del moto.

Rilevando a titolo conclusivo di queste premesse quanto rafforzi questo risultato, debitamente interpretato, l'opinione di Darwin sull'importanza cosmogonica delle maree e quanto feconda appaia l'idea primitiva del Kelvin, cominciamo a considerare con qualche dettaglio la questione, prendendo, a titolo di orientamento, le mosse da una efficace traduzione del suggerimento di Kelvin nel caso del moto di due corpi.

## § 2. FORMA RIDOTTA PER L'ENERGIA TOTALE E NEL PROBLEMA DEI DUE CORPI.

Sieno P e P' due corpi materiali, G il loro baricentro,  $r$  la loro distanza,  $M = m + m'$  la somma delle masse rispettive.

Il moto avvenendo in un piano in conformità con l'integrale baricentrale vettoriale dei momenti, ove si indichi con  $\vartheta$  l'anomalia di PP' (passante per G) contata a partire da una retta fissa, si ha, scegliendo le unità di misura in modo che sia  $\frac{mm'}{M} = 1$ , per l'energia cinetica T ed il potenziale U,

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) \quad , \quad U = -f \frac{M}{r}.$$

Ove si introducano i momenti cinetici  $p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}$ ,  $p_{\vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2 \dot{\vartheta}$ ,

dei quali il secondo (che è il doppio della velocità areolare) si mantiene costante =  $c$ , durante tutto il moto, risulta per l'energia totale  $H = E$  l'espressione compendiosa

$$(1) \quad H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) - f \frac{M}{r} = E.$$

## § 3. ESPRESSIONE DELL'ENERGIA CINETICA NEL MOTO DI PRECESSIONE REGOLARE DI UN CORPO GIROSCOPICO <sup>(1)</sup>.

Indicati con A = B, C i momenti principali d'inerzia d'un corpo rigido a struttura giroscopica, nel moto precessionale libero, l'energia cinetica  $\Delta$  vale

$$(2) \quad \Delta = \frac{k^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \Theta}{C} + \frac{\sin^2 \Theta}{A} \right).$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, op. cit., cap. VIII.

In questa relazione  $k$  dà il modulo del momento delle quantità di moto  $k$ ,  $2\Theta$  l'apertura del cono di precessione.

Si rilevi che, per  $\Theta \rightarrow 0$  la precessione degenera in rotazione pura con velocità angolare

$$\mu = k : C.$$

#### § 4. DIGRESSIONE SULLE SOLUZIONI STAZIONARIE SECONDO ROUTH E LEVI-CIVITA<sup>(1)</sup>.

Di un sistema differenziale ordinario

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = X(x|t), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

sia data una *relazione invariante*  $f(x|t) = 0$ , vale a dire, con significato ben noto, una relazione in termini finiti fra le  $x$  e  $t$  verificata da tutte le soluzioni del sistema che inizialmente la soddisfano.

Ciò posto associamo alla  $f = 0$  la relazione simbolica

$$(4) \quad \delta f = 0$$

che si ottiene eguagliando a zero la variazione di  $f$  corrispondente a variazioni infinitesime  $\delta x_i$  delle  $x_i$  tali però che le  $x_i + \delta x_i$  risultino ancora soluzioni dell'originario sistema.

Si dimostra allora che le equazioni equivalenti alla (4 a), precisamente

$$(4 a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

unitamente alla  $f = 0$ , semprechè non risultino incompatibili, costituiscono un sistema di *relazioni invarianti*.

Se in particolare la  $f = 0$  è un integrale effettivo le (4) costituiscono un *sistema invariante* da sole o unitamente alla  $f = 0$ .

Il caso meccanicamente più interessante è quello in cui, trattandosi di un sistema canonico a funzione caratteristica indipendente da  $t$ , si rende stazionario addirittura l'integrale dell'energia, in via assoluta o subordinatamente ad uno o più integrali o relazioni invarianti. Le soluzioni che verificano questi sistemi di relazioni invarianti, prendono col Routh il nome di *soluzioni stazionarie*.

(1) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, op. cit., cap. X, pp. 342-344 e pp. 396-402.



### § 5. STATO LIMITE DI MINIMA ENERGIA.

Ciò posto possiamo subito ad osservare che, eventuali soluzioni del problema compatibili con uno stato asintotico di minima energia dovranno soddisfare alla condizione di stazionarietà

$$\delta \dot{E} = 0$$

subordinatamente all'esistenza di certi integrali (p. es. integrali dei momenti).

L'annullarsi condizionato della variazione deve aver luogo per tutte le quantità da cui dipende  $\dot{E}$ , quantità che designeremo compendiosamente con  $\zeta$  e che si possono distinguere in due gruppi: l'uno, corrispondente alle variabili  $x_i$  del paragrafo precedente, cioè, nel caso nostro, costituito dalle variabili canoniche; l'altro, formato da quei parametri, lentissimamente variabili, che designeremo compendiosamente con «  $a$  » e che corrispondono ad eventuali costanti strutturali del sistema od a determinazioni degli integrali di condizione (costanti delle aree).

Avendosi identicamente (con ovvio significato dei simboli)

$$\delta_{\zeta} \dot{E} = \delta_x \dot{E} + \delta_a \dot{E},$$

la precedente relazione di stazionarietà, attesa l'indipendenza delle «  $a$  » dalle «  $x$  », implica separatamente, per quanto sempre subordinatamente a quei certi integrali,

$$\delta_x \dot{E} = 0 \quad , \quad \delta_a \dot{E} = 0.$$

La prima di codeste relazioni ci dice che le eventuali soluzioni minimizzanti vanno cercate tra le soluzioni stazionarie, la seconda, discrimina tra queste quelle che effettivamente danno l'atteggiamento asintotico del moto.

### § 6. STAZIONARIETÀ SUBORDINATA DELLA FUNZIONE CARATTERISTICA

SPETTANTE AI DUE CORPI GRAVITANTI E ROTANTI.

Consideriamo ora due corpi dotati di moto Kepleriano, e, rispetto ai baricentri, di moto precessionale.

L'energia totale che si ottiene sommando alla  $H$  definita al § 2 le energie  $\Delta$  e  $\Delta'$  corrispondenti al moto di precessione dei due giroscopi, precisamente

$$\dot{H} = H + \Delta + \Delta' = \dot{E},$$

per gli effetti dissipativi *interni*, quindi tali da non modificare il momento vettoriale totale delle quantità di moto  $\dot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{K}}_0 = \text{cost.}$ , si degraderà sino

ad un valore minimo condizionato da tale invariante. A valor estremo raggiunto si avrà, ove si convenga d'indicare con  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  opportuni moltiplicatori lagrangiani, con  $\overset{*}{K}_1, \overset{*}{K}_2, \overset{*}{K}_3$  le componenti di  $\overset{*}{K}$  rispetto ad un sistema fisso,

$$(5) \quad \delta \left( \overset{*}{E} + \sum_i \omega_i \overset{*}{K}_i \right) = 0.$$

Indicando, in conformità con le convenzioni fatte, con  $\chi$  una generica delle variabili da cui si fa dipendere  $\overset{*}{E}$  e  $\overset{*}{K}_i$ , avremo anche,

$$(5a) \quad \frac{\partial \left( \overset{*}{E} + \sum_i \omega_i \overset{*}{K}_i \right)}{\partial \chi} = 0.$$

Siffatte relazioni esprimono senz'altro, per quanto abbiamo detto, soluzioni del sistema canonico, precisamente *soluzioni stazionarie* nel senso di Routh e Levi-Civita.

Tutto è ridotto ormai a scrivere per disteso l'espressione di  $\overset{*}{H} = \overset{*}{E}$  e  $\overset{*}{K}$  e render esplicite le relazioni (5a) cui dà luogo l'equazione simbolica (5).

Quanto ad  $\overset{*}{H}$  troviamo, sommando l'energia del moto orbitale a quella dei moti precessionali,

$$\overset{*}{H} = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) + \sum \frac{k^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \overset{*}{\Theta}}{A} + \frac{\cos^2 \overset{*}{\Theta}}{C} \right) - f \frac{M}{r}.$$

Quanto a  $\overset{*}{K}$  non s'ha da far altro che orientare il riferimento fisso in modo che un asse, p.e.  $\zeta$ , risulti con esso coincidente. Si ha allora  $\overset{*}{K}_1 = \overset{*}{K}_2 = 0$  e  $\overset{*}{K}_3$  dà la *lunghezza* di  $\overset{*}{K}$ .

Introducendo i coseni  $\alpha, \alpha', \beta$  che  $k, k'$  ed  $n$  (versore normale al piano dell'orbita) fanno con  $\zeta$  coincidente con  $\overset{*}{K}$ , avremo

$$\overset{*}{K} = c \cos \beta + \sum k \cos \alpha.$$

Attribuendo ora al generico parametro «  $\chi$  » il significato di  $p_r, r; c; \beta, \alpha, \alpha'; k, k'; \overset{*}{\Theta}, \overset{*}{\Theta}'$ ; otteniamo, ove si ponga  $\omega_3 = -\omega$ ,

$$\begin{array}{ll} \text{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_r = 0, \\ -\frac{c^2}{r^3} + f \frac{M}{r^2} = 0; \end{array} \right. & \text{II} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{r^2} - \omega \cos \beta = 0; \end{array} \right. \\ \text{III} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega c \sin \beta = 0, \\ \omega k \sin \alpha = 0, \\ \omega k' \sin \alpha' = 0; \end{array} \right. & \text{IV} \quad \left\{ \begin{array}{l} k \left( \frac{\sin^2 \overset{*}{\Theta}}{A} + \frac{\cos^2 \overset{*}{\Theta}}{C} \right) - \omega \cos \alpha = 0, \\ k' \left( \frac{\sin^2 \overset{*}{\Theta}'}{A'} + \frac{\cos^2 \overset{*}{\Theta}'}{C'} \right) - \omega \cos \alpha' = 0; \end{array} \right. \end{array}$$

$$V \left\{ \begin{array}{l} k^2 \left( \frac{\sin \overset{*}{\Theta} \cos \overset{*}{\Theta}}{A} - \frac{\sin \overset{*}{\Theta} \cos \overset{*}{\Theta}}{C} \right) = 0, \\ k'^2 \left( \frac{\sin \overset{*}{\Theta}' \cos \overset{*}{\Theta}'}{A'} - \frac{\sin \overset{*}{\Theta}' \cos \overset{*}{\Theta}'}{C'} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Dal gruppo I di queste relazioni scende subito  $p_r = \dot{r} = 0$ , dunque  $r = \text{cost.}$

Escluso l'annullarsi di  $c, k, k'$  si desume da III,  $\beta = \alpha = \alpha' = 0$ ; donde il disporsi asintotico del piano del moto e degli assi di precessione normalmente, rispettivamente parallelamente, a  $\overset{*}{K}$ .

Ottenendosi da IV,  $\frac{k}{C} = \frac{k'}{C'} = \omega$  e da V,  $\overset{*}{\Theta} = \overset{*}{\Theta}' = 0$ , si desume in definitiva da II, ove si rilevi che, trattandosi di rotazioni ( $\overset{*}{\Theta} = \overset{*}{\Theta}' = 0$ ),  $\frac{k}{C}$  e  $\frac{k'}{C'}$  definiscono le rispettive velocità angolari  $\mu$  e  $\mu'$ ,

$$\mu = \mu' = \dot{\vartheta},$$

con che risulta dimostrata l'eguaglianza finale della velocità angolare di rivoluzione e rotazione.

Vedremo in una prossima Nota più efficacemente in atto queste considerazioni, quando nel problema generale dei 3 corpi giustificheremo il risultato suggestivo annunciato sin dall'inizio.

**Meccanica.** — *Intorno agli effetti asintotici delle maree sul moto dei corpi celesti.* — II. *Problema dei 3 corpi.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sur l'équilibre entre matière et énergie.* Nota di I. PLACINTEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare.* — II. *Casi particolari notevoli.* Nota di N. MOISSEIEV, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare.* — III. *Caso generale di una agitazione incoerente.* Nota di N. MOISSEIEV, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica (Fisica-Matematica).** — *Il fenomeno Doppler per le corde vibranti.* Nota di R. SERINI, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. GIORGI.

Supponiamo di avere una corda infinita, e sia  $a$  la velocità di propagazione per le onde trasversali: essa per  $t \leq 0$  abbia forma rettilinea e i suoi punti velocità nulla. Prendiamo la corda per asse  $x$ . All'istante  $t = 0$  un sistema vibrante, per esempio un diapason, si attacca alla corda in  $O$  e il punto d'attacco scorre in seguito sulla corda con velocità  $\beta < a$ . Le vibrazioni trasversali del diapason siano date dalla funzione  $f(t)$ , dove  $f(t) = 0$  per  $t \leq 0$  e per  $t \geq \tau > 0$  se  $\tau$  è l'istante in cui il diapason si stacca. Si tratta di trovare il movimento della corda per  $t > 0$ : in sostanza è il problema di Doppler in forma completa perchè non si suppone che le vibrazioni del diapason siano permanenti.

Seguendo il metodo degli operatori  $f(\Delta)$  con  $\Delta = \frac{d}{dt}$  ricordiamo che se  $u$  è lo spostamento si ha<sup>(2)</sup>

$$u = e^{\frac{x}{a}\Delta} f_1(t) + e^{-\frac{x}{a}\Delta} f_2(t).$$

Si dovrà imporre per le funzioni  $f_1(t), f_2(t)$  la condizione che per  $x = \beta t$  sia  $u = f(t)$ , oltre quella che per  $t \leq 0$  sia  $u = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Allora è chiaro che la soluzione varierà secondochè  $x \geq \beta t$  e per la condizione di estinzione all' $\infty$  sarà:

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-\frac{x}{a}\Delta} f_2(t) & , & \quad \text{per } x > \beta t, \\ u_1 &= e^{\frac{x}{a}\Delta} f_1(t) & , & \quad \text{per } x < \beta t. \end{aligned}$$

Consideriamo la funzione  $u_2$ : dovrà essere

$$e^{-\frac{\beta t}{a}\Delta} f_2(t) = f(t).$$

Se interpretiamo l'operatore colla formola

$$e^{-\frac{\beta t}{a}\Delta} f_2(t) = f_2\left(t - \frac{\beta t}{a}\right)$$

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) Vedi GIORGI, *Lezioni di Fisica Matematica tenute nella R. Università di Cagliari*, 1926-27. Cap. XI e sgg.

si ricava invertendo

$$\left(e^{-\frac{\beta t}{a}\Delta}\right)^{-1} f(t) = f\left(\frac{t - \frac{\beta}{a}}{1 - \frac{\beta}{a}}\right) = f_2(t)$$

e così

$$\left(e^{\frac{\beta t}{a}\Delta}\right)^{-1} f(t) = f\left(\frac{t + \frac{\beta}{a}}{1 + \frac{\beta}{a}}\right) = f_1(t)$$

e quindi

$$u_2 = e^{-\frac{x}{a}\Delta} f_2(t) = f\left(\frac{t - \frac{x}{a}}{1 - \frac{\beta}{a}}\right) \quad \text{per } x > \beta t$$

$$u_1 = e^{\frac{x}{a}\Delta} f_1(t) = f\left(\frac{t + \frac{x}{a}}{1 + \frac{\beta}{a}}\right) \quad \text{per } x < \beta t.$$

Si vede di qui che per  $t \leq 0$ , tenendo conto che allora  $f(t) = 0$ ,  
 $u = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ .

Il problema è così risolto per  $0 \leq t \leq \tau$ . Si osservi che all'istante  $t$  le vibrazioni si sono propagate nell'intervallo  $-at \leq x \leq at$ ; all'infuori di questo intervallo la corda è ferma.

Se in particolare  $f(t)$  è periodica di periodo  $T$  e quindi di frequenza  $\nu = \frac{1}{T}$  la  $u_2$  e  $u_1$  hanno rispettivamente le frequenze

$$\nu'_2 = \frac{\nu}{1 - \frac{\beta}{a}} > \nu, \quad \nu'_1 = \frac{\nu}{1 + \frac{\beta}{a}} < \nu,$$

che sono le formole ben note dell'effetto Doppler pel moto della sorgente. Per tener conto del moto dell'osservatore basta nelle  $u_2, u_1$  fare la trasformazione

$$x' = x + vt$$

se  $v$  è la velocità dell'osservatore: si otterrebbero così le formole più complete e ben note.

All'istante  $\tau$  il diapason si stacca: com'è l'ulteriore movimento della corda? Il risultato è molto semplice. Se diciamo onda a destra e a sinistra la configurazione della corda all'istante  $\tau$ , rispettivamente per  $x \geq \beta\tau$ , si ha:



l'onda a destra e a sinistra si propagano inalterate verso la destra e la sinistra, rispettivamente (con velocità  $a$ ).

Il risultato si deduce dalla formola classica <sup>(1)</sup>

$$u = \frac{1}{2} [F(x + at) + F(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Phi(x) dx$$

se per  $t = 0$  (istante  $\tau$ )

$$u = F(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Phi(x).$$

Supponiamo che il campo di esistenza delle  $F(x)$  ,  $\Phi(x)$  sia  $\gamma \leq x \leq \delta$ : se si divide detto campo in due parti  $\gamma \leq x < x_1 < x \leq \delta$ , pel carattere additivo della formola precedente, si possono considerare le due propagazioni:

$$\text{per } \gamma \leq x < x_1 \quad , \quad u = F_1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Phi_1 \quad ,$$

$$\text{per } x_1 < x \leq \delta \quad , \quad u = F_2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Phi_2.$$

Noi divideremo l'intervallo  $-a\tau$  ,  $a\tau$  col punto  $\beta\tau$ : allora per

$$-a\tau < x \leq \beta\tau,$$

$$F_1(x) = u_1(x, \tau) \quad , \quad \Phi_1(x) = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{a}} f' \left( \frac{\tau + \frac{x}{a}}{1 + \frac{\beta}{a}} \right) = aF'_1(x)$$

e si ha per la formola citata

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (F_1(x + at) + F_1(x - at)) + \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} F'_1(x) dx = \\ &= F_1(x + at) = u_1(x + at, \tau) \end{aligned}$$

il che esprime che l'onda a sinistra si propaga inalterata verso sinistra con velocità  $a$ .

Invece se

$$\beta\tau \leq x \leq a\tau,$$

si ha

$$F_2(x) = u_2(x, \tau) \quad , \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{1 - \frac{\beta}{a}} f' \left( \frac{\tau - \frac{x}{a}}{1 - \frac{\beta}{a}} \right) = -aF'_2(x)$$

(1) Vedi p. es. FRANK VON MISES, *Differentialgleichungen der Physik*, 2. Auflage, 1930, p. 785.

e ragionando come precedentemente si ricava

$$u = u_2(x - at, \tau)$$

il che esprime che l'onda a destra si propaga inalterata verso destra con velocità  $a$ .

Con opportuni mutamenti si arriva alle stesse conclusioni per le onde piane sonore.

**Chimica** (Chimica fisiologica). — *Raffronti tra il valore alimentare di alcuni legumi e quello di alcuni cereali*<sup>(1)</sup>. Nota di V. ZAGAMI e V. FAMIANI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Come si è avuto occasione di esporre anche altrove, uno di noi (V. Zagami<sup>(3)</sup>) ha potuto dimostrare che l'uso continuato, uniforme ed esclusivo di uno stesso alimento non è capace di esplicare effetti dannosi evidenti pel solo effetto della ripetizione persistente, prolungata e monotona, a patto che l'alimento stesso sia affatto completo dal punto di vista della qualità e venga assunto nella quantità sufficiente a coprire il fabbisogno energetico.

Ricerche, infatti, condotte su animali di diverse specie (ratto, cavia, gatto, Colombo) — sia giovani in via di accrescimento, sia adulti — ai quali è stato somministrato per lunghi periodi il latte come alimento unico ed esclusivo; ma indubbiamente completo dal punto di vista qualitativo, non hanno permesso di osservare mai apprezzabili fenomeni abnormi.

Questi risultati sono stati recentemente confermati da M. Mazzei<sup>(4)</sup>.

L'eventuale comparsa di fenomeni morbosi durante il periodo di alimentazione con un unico determinato alimento — qualora la quantità assunta risulti sufficiente — è, adunque, evidentemente da riferire, in modo certo, alla deficienza o assenza in esso di uno o più fattori o costituenti necessari. È ovvio pertanto, che il metodo della alimentazione esclusiva assai bene si presta ad orientare circa il valore effettivo di un dato alimento, nel senso che bene risponde allo scopo di accertare se esso sia da ritenere o non completo. Ed è inoltre agevole immaginare come per un alimento risultato incompleto si possa in un secondo tempo tentare l'esatta identificazione della deficienza, pazientemente provando ad aggiungere al medesimo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 17 gennaio 1932.

(3) V. ZAGAMI, *Contributo alla conoscenza degli effetti dell'alimentazione latteica esclusiva*. « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1, 226, 1926; « Arch. Sc. Biol. », 9, 379, 1927.

(4) M. MAZZEI, *Alimentación láctea y función sexual en el gallo*. « Rev. Asoc. Med. Argent. », p. 303, 1931.

appropriati correttivi (proteine, sali minerali, vitamine, grassi ecc.), ed analizzando in ciascun caso gli eventuali effetti più o meno favorevoli ottenuti.

Appunto seguendo tali concetti direttivi abbiamo avuto occasione di eseguire finora numerose ricerche, dirette ad affrontare e a risolvere nel senso suddetto il problema per ciò che concerne particolarmente il valore alimentare dei semi di alcune leguminose e il valore alimentare dei semi di alcune graminacee, facendo cadere la scelta su quelli più importanti dal lato dell'alimentazione umana. Precisamente abbiamo finora studiato i seguenti semi di leguminose: ceci (*Cicer arietinum* L.) (V. Zagami <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>), cicerchie (*Lathyrus sativus* L.) (V. Zagami <sup>(3)</sup>), lenticchie (*Ervum lens* L.) (V. Zagami e A. Curatolo); e i seguenti semi di graminacee: grano (*Triticum sativum*), granturco (*Zea mais*), orzo (*Hordum vulgare*) e riso (*Oryza sativa*) (V. Famiani <sup>(4)</sup>).

È pur vero che taluni di questi semi hanno già costituito oggetto di studio da parte di altri AA.; ma le loro indagini, quando non si presentano incomplete, molto spesso difettano di quella uniformità di criterio e di esecuzione, che è soprattutto necessaria se si tratta di istituire raffronti.

Le nostre ormai estese osservazioni personali, raccolte con tecnica uniforme e in condizioni sperimentali affatto corrispondenti, ci offrono invece dati bene comparabili tra loro. Precisamente sulla base di questi, stabilendo opportuni raffronti, abbiamo potuto apprezzare differenze, a nostro avviso meritevoli di considerazione, e che indubbiamente ci portano ad assegnare un diverso valore alimentare ai legumi rispetto ai cereali (almeno riferendosi a quelli finora studiati).

Sono appunto tali rilievi che intendiamo sinteticamente esporre nella presente Nota.

Abbiamo sperimentato su ratti albinì in via di accrescimento, provenienti tutti da uno stesso ceppo originario, dell'età di 26-30 giorni (cioè a una settimana circa dopo lo slattamento) e che fino a quell'epoca si erano pressochè ugualmente bene sviluppati. All'inizio dell'esperimento venivano divisi in gruppi, ognuno composto sia di maschi che di femmine. Un gruppo, per controllo, era tenuto ad alimentazione mista e variata (alimenti animali e vegetali), mentre ciascuno degli altri era invece alimentato esclusivamente con uno dei semi in istudio (cicerchia, cece, lenticchia, orzo, grano, gran-

(1) V. ZAGAMI, *Su alcuni effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di leguminose nei ratti albinì*. «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», 1, 269, 1926; «Arch. Sc. Biol.», 9, 435, 1927.

(2) V. ZAGAMI, *Sul valore alimentare dei semi di «Cicer arietinum L.»*, «Il Problema Alimentare», 1, 150, 1931.

(3) V. ZAGAMI, *Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di «Lathyrus sativus L.»*, «Rendic. R. Acc. Naz. dei Lincei», 14, 218, 1931.

(4) V. FAMIANI, *Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con alcuni cereali*. «Il Problema Alimentare», 1, 165, 1931.

turco, riso-brillato). I semi suddetti - tritati fino allo stato quasi di farina - si tenevano sempre a disposizione degli animali in quantità esuberante, in modo che potessero assumerne liberamente a volontà. In ogni singolo caso gli animali mostrarono di adattarsi facilmente alla rispettiva dieta, senza mai rifiutarla ed assumendone anzi in quantità rilevante calcolata sufficiente a coprire il loro fabbisogno energetico. A tutti i gruppi si è tenuta sempre a disposizione l'acqua.

Per tutti gli animali si tenne conto, durante il periodo di esperimento, delle variazioni del peso del corpo, del comportamento dell'apparato genitale (schiusura dell'ostio vaginale nelle femmine, discesa e dimensione dei testicoli nei maschi), e dell'attività sessuale e riproduttiva (ciclo di calore e gravidanze nelle femmine, tendenza all'accoppiamento e attività dei testicoli nei maschi); si tenne conto ancora della muta del primo pelo, del comportamento e della vivacità degli animali, della eventuale comparsa di fenomeni morbosi. A determinati periodi di alimentazione esclusiva si sono eseguite radiografie per accertare lo stato dell'apparato scheletrico degli animali in esperimento rispetto a quello dei relativi controlli.

Dal complesso delle nostre esperienze è risultato, che i giovani ratti, sia maschi che femmine, sottoposti ad alimentazione esclusiva con legumi o con cereali, risentono prontamente e marcatamente gli effetti dannosi di tali diete, presentando un netto rallentamento dell'accrescimento, desunto sia dal loro peso corporeo che rimane notevolmente indietro rispetto a quello dei controlli, sia dal comportamento di tutti gli altri fenomeni, che abbiamo pure tenuto in particolare considerazione (muta del pelo, maturità sessuale, sviluppo e stato dell'apparato scheletrico).

Nell'annessa tabella, con riferimento a tutte le esperienze eseguite, sono stati riassunti i valori medi relativi al peso del corpo e alle variazioni percentuali in determinati periodi di osservazione. Ne risultano chiare e notevoli differenze, non solo tra i dati relativi ai controlli e quelli relativi agli animali alimentati esclusivamente con legumi o con cereali, ma anche confrontando tra loro i valori che si riferiscono agli animali alimentati con legumi e quelli che si riferiscono agli altri alimentati con cereali. E differenze pure sensibili si possono rilevare comparando tra loro i valori ottenuti pei vari legumi, o quelli pei vari cereali.

Queste differenze, già evidenti dopo 30 giorni di esperimento, si rendono ancora più marcate dopo 60 e 90 giorni. Così, ad es., dopo 60 giorni, contro aumenti percentuali medi del 411 % pei maschi e del 165 % per le femmine di controllo, si hanno aumenti percentuali medi del 172 % e del 165 %, del 133 % e del 141 %, del 109 % e del 106 %, del 106 % e dell'86 %, dell'86 % e dell'88 %, del 39 % e del 30 %, e del 26 % e del 32 % rispettivamente per i maschi e per le femmine ad alimentazione con cicerchia, con ceci, con lenticchie, con orzo, con grano, con granturco e con riso (brillato).

Alimento	Peso iniziale medio			Dopo 30 giorni			Dopo 60 giorni			Dopo 90 giorni						
	gr.	Peso medio	gr.	Aumento medio del peso	gr.	Aumento percentuale medio	Peso medio	gr.	Aumento medio del peso	gr.	Aumento percentuale medio	Peso medio	gr.	Aumento medio del peso	gr.	Aumento percentuale medio
M A S C H I																
Alimento misto . . . . .	34	114	80	235	174	411	217	183	538							
Semi di Lathyrus sativus L. .	32	65	33	103	87	172	112	80	250							
» » Cicer arietinum L. .	30	47	17	57	70	133	90	60	200							
» » Ervum lens L. . . .	26	42	16	62	56	109	30	48	144							
» » Hordeum vulgare . .	45	76	31	69	93	106	105	60	96							
» » Triticum sativum . .	28	43	15	53	52	86	55	27	96							
» » Zea mais . . . . .	33	43	10	30	46	39	35	5	16							
» » Oryza sativa . . . .	30	37	7	23	38	26										
F E M M I N E																
Alimento misto . . . . .	33	95	62	187	125	278	141	108	327							
Semi di Lathyrus sativus L. .	32	67	35	109	85	165	86	54	187							
» » Cicer arietinum L. .	31	50	19	60	75	141	75	44	132							
» » Ervum lens L. . . .	25	31	6	24	49	96	91	48	111							
» » Hordeum vulgare . .	43	65	22	51	80	86	50	24	92							
» » Triticum sativum . .	26	39	13	50	49	88	50	24	92							
» » Zea mais . . . . .	33	41	8	24	43	30	44	13	41							
» » Oryza sativa . . . .	31	38	7	22	41	32	44	13	41							



Disponendo i valori in ordine decrescente (come nella tabella), ne risulta che i più alti si riferiscono ai controlli; seguono quelli degli animali alimentati con legumi (cicerchia, cece, lenticchia), e per ultimo quelli degli animali alimentati con cereali (orzo, grano, granturco, riso): ciò vale tanto nel caso dei maschi che delle femmine, e per ogni periodo considerato.

In generale risultò un più lento sviluppo dell'apparato genitale nei ratti in esperimento che nei controlli. Mentre infatti in questi ultimi la nota schiusura dell'ostio vaginale è avvenuta in media verso il 50-53° giorno di vita, nei primi invece si è presentata con notevole ritardo (91-106°, 107-135°, 84-99° giorno di vita rispettivamente per gli animali a ceci, cicerchia, orzo) o non si è presentata affatto (salvo rare eccezioni). E questo è precisamente il caso di quegli animali, che durante tutto il periodo di esperimento non hanno raggiunto il peso di gr. 80-90, corrispondente cioè a quello medio degli animali normali al momento in cui il fenomeno in parola suole presentarsi: così, gli animali a riso, grano, granturco e lenticchia, che rispettivamente al 140°, al 130°, al 90° e all'88° giorno di vita non avevano raggiunto il peso medio suddetto, non presentavano allora neppure schiuso l'ostio vaginale.

L'alimentazione esclusiva sia con legumi, sia con cereali, non ostacolò la discesa dei testicoli; tuttavia il loro sviluppo si presentò di grado meno pronunciato che nei controlli, mantenendosi quasi sempre in un certo rapporto col peso corporeo, nel senso che a parità di alimento, fu più rilevante nei maschi che raggiunsero maggiori dimensioni corporee. Comunque di regola i maschi non dimostrarono mai tendenza all'accoppiamento, e, ad esperienza inoltrata, la maggior parte presentava un caratteristico stato di protrusione del pene flaccido.

La funzione riproduttiva si è mantenuta di conseguenza - sia nei maschi che nelle femmine - sempre negativa.

Anche la muta del pelo ha subito ritardi più o meno sensibili nei singoli casi, comportandosi in certo qual modo corrispondentemente all'accrescimento generale degli animali.

Le radiografie in ogni caso di alimentazione esclusiva, in confronto con quelle dei controlli normali, hanno presentato uno stato di calcificazione dello scheletro meno accentuato, estremità diafisarie relativamente rigonfie, specie in corrispondenza dell'articolazione femore-tibio-rotulea, ipertrofia della zona di accrescimento cartilaginosa, specie a livello della testa tibiale, vertebre coccigee piccole a contorni poco marcati; queste alterazioni si presentavano indubbiamente più accentuate negli animali alimentati con cereali e tra questi soprattutto in quelli alimentati con riso e con granturco.

Ma mentre negli animali alimentati con cereali, per quanto fosse difettoso lo sviluppo generale corporeo, si è mantenuta sempre l'armonia o la proporzione nello sviluppo relativo delle varie parti, e di conseguenza si è

anche conservata sempre perfetta, per così dire, la linea del corpo, lo stesso non si è invece verificato negli animali alimentati con legumi, nel qual caso ha richiamato sempre l'attenzione un caratteristico aspetto tozzo, che tutti più o meno presto hanno assunto.

I fenomeni dannosi, osservati per effetto dell'alimentazione esclusiva coi legumi o coi cereali studiati finora, inducono evidentemente a ritenere, che ciascuno di essi costituisce senza dubbio un alimento incompleto o qualitativamente deficiente pei ratti in via di sviluppo. Le stesse differenze marcate tra legumi e cereali, al pari di quelle pure sensibili tra i vari legumi e tra i vari cereali, sono indubbiamente esponenti della natura, del grado o dell'entità di deficienza qualitativa, più o meno spiccata o più o meno complessa nei singoli casi. Poichè ci siamo imposto anche il compito di identificare esattamente e precisare per ogni seme in che consistano le deficienze globalmente desunte dalle prime osservazioni, possiamo fin d'ora fissare il fatto generale, derivato dalle esperienze già eseguite con i semi di *Lathyrus sativus*, *Cicer arietinum* e *Ervum lens*, che i fenomeni dannosi determinati dall'alimentazione esclusiva con legumi — almeno per i tre suddetti ampiamente studiati — siano da ascrivere principalmente a deficienza salina, e subordinatamente forse anche a deficienza vitaminica (fattori liposolubili). Cosicchè le differenze riscontrate sperimentando coi singoli legumi sembrano dunque doversi riferire a corrispondenti differenze di grado più che di natura delle suddette accertate deficienze.

Uno di noi (V. Famiani) sta eseguendo sui cereali ricerche corrispondenti a quelle sopraccennate pei legumi, con eguale proposito di identificare e precisare anche pei primi le deficienze; e intanto sono molto avanti quelle riguardanti il grano. Ebbene, fondandoci sui risultati ottenuti finora, già ci riteniamo autorizzati ad esprimere la convinzione, che i cereali pure a questo riguardo differiscono dai legumi: la loro deficienza sembra essere di natura più complessa, da giustificare le differenze rilevate tra ratti alimentati con soli cereali e ratti alimentati con soli legumi.

Non soltanto queste, ma tutte le differenze osservate, e che abbiamo creduto utile fissare nella presente Nota, meritano indubbiamente una spiegazione. Questa si potrà comunque cercare di dare solo quando tutta la serie delle esperienze, che rientrano nel nostro programma di lavoro, avranno potuto raggiungere l'adeguato necessario sviluppo. Ci proponiamo pertanto di ritornare sull'argomento a suo tempo.

**Chimica.** — *Sull'esistenza dei cloruri politionici. Determinazione dell'indice di rifrazione delle soluzioni di zolfo nei cloruri di zolfo.* Nota di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Spettro Raman della chinolina e manifestazioni del legame Carbonio-Azoto.* Nota di G. B. BONINO e P. CELLA, presentata dal Corrisp. M. BETTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Sulla stereoisomeria dei derivati 2, 2'-disostituiti del difenile.* Nota di A. CORBELLINI e C. PIZZI, presentata dal Corrisp. L. CAMBI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *La struttura cristallina del praseodimio.* Nota di A. ROSSI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — III. Sulla ricerca dell'ittrio.* Nota di G. PICCARDI e A. SBERNA, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Sopra le diazoresine.* Nota I di Z. JOLLES, presentata dal Socio G. PELLIZZARI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Paleontologia.** — «*Sanfilippaster*», nuovo genere di Echinide del Cretaceo superiore. Nota di G. CHECCHIA RISPOLI, presentata dal Socio A. MARTELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Biologia** (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoologica e trapianti. Ricerche tra Anuri e Urodeli. Considerazioni*<sup>(1)</sup>. Nota IX di GIULIO COTRONEI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio F. SILVESTRI.

Le ricerche sui trapianti tra Anuri e Urodeli così come io le ho concepite, e come ho in parte attuato con la collaborazione dei miei allievi (Spirito, Guareschi, Perri, Marcucci, ecc.), hanno già raggiunto risultati nuovi e, crediamo, notevoli. Tra questi risultati merita di essere segnalata la netta distinzione tra le incompatibilità biochimiche che si possono attuare in un primo tempo dello sviluppo, da quelle che si verificano soltanto in un tempo. Estese ricerche da noi compiute, rivolte sempre al fine dello studio secondo della costituzione zoologica, hanno permesso di saggiare col metodo dei trapianti il comportamento biologico embrionale di molte forme di Anuri trapiantati negli Urodeli, e il comportamento inverso di Urodeli su Anuri. I fatti già accertati sono stati pubblicati in questo stesso periodico, e non è ora il caso di riassumerli; invece credo oramai di avere elementi sufficienti per esporre alcune considerazioni che riguardano uno dei punti più interessanti accertati nel nostro non breve lavoro, circa la *prima* incompatibilità che si può verificare nei trapianti embrionali di Urodeli su Anuri, mentre non si è mai verificata nelle esperienze di Anuri su Urodeli.

È da tempo che gli studiosi di trapianti embrionali e specialmente di trapianti eteroplastici, hanno cercato di riportare lo studio di tali problemi nel quadro, in verità assai ampio, delle teorie immunitarie. Basta ricordare le interessanti ricerche di Murphy (1913-1915) che tratta tale questione nei fenomeni di tolleranza e di intolleranza nei trapianti di tessuto di mammiferi su embrioni di pollo. Le ricerche di Weber, non certo dimostrative, mirebbero a mettere in risalto che si può acquisire una condizione immunitaria nei trapianti di uova di Urodeli che modifichino la reazione dell'ospite.

Altre ricerche parlerebbero in favore di una immunità locale (Faldino). Comunque si vogliano giudicare queste ricerche, o tentativi di ricerche, è ormai acquisito dopo le scoperte dei sieri emolitici specifici (Belfanti e Carbone, Bordet) che l'organismo si comporta di fronte a cellule animali di provenienza estranea proprio come di fronte ai microbi, ossia l'iniezione (o il trapianto) di tali cellule provoca l'apparizione di anticorpi specifici. Ed è noto altresì quanta importanza abbia avuto, e più ancora avrà in avvenire, lo studio siero-diagnostico e anafilattico delle specie animali, che ha

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.



potentemente contribuito a meglio lumeggiare le differenze costituzionali biochimiche delle varie specie, che a loro volta possono spiegare tanti risultati negativi che si hanno nelle operazioni di trapianti tra forme zoologiche differenti.

Ma se in linea generale si mira a far rientrare il problema dei trapianti nel quadro degli studi immunitari, le difficoltà di interpretazioni e di ricerche son tutt'altro che lievi nei casi concreti che si presentano allo studioso dei trapianti embrionali: innanzi tutto si ritiene generalmente che nei sieri di embrioni e di neonati siano notevolmente scarse le *alexine*; ma questa affermazione dev'essere riveduta con ampio studio comparativo per vedere quali sostanze agiscano come complemento negli embrioni delle varie classi: inoltre per i trapianti embrionali più che rivolgersi ai concetti di immunità acquisita dobbiamo pensare ad anticorpi normali contenuti naturalmente in una determinata specie, benchè (Bordet) si ritenga che siano in generale molto meno potenti degli anticorpi ottenuti per immunizzazione. Nelle operazioni di trapianti embrionali, poi, possiamo trovarci di fronte ad incompatibilità biochimiche prima ancora che siano sviluppati e funzionanti gli organi ematopoietici; queste incompatibilità possono comparire anche prima che entri in azione qualsiasi proprietà fagocitaria.

Queste considerazioni debbono guidarci quando tentiamo di rintracciare nell'embrione le possibili cause della prima incompatibilità sceverandole da quelle condizioni che si attuano soltanto più tardi e che riguardano il comportamento dei trapianti su organismi già differenziati.

Il fatto che stimolò una serie di ricerche che mi spingono alla presente Nota fu messo in evidenza da esperienze compiute già nel 1929 e poi ampliate e pubblicate nel 1930 (Cotronei e Spirito). Vedemmo che trapiantando la vescicola ottica di *Triton* sulla *Rana esculenta* il trapianto andava rapidamente distrutto; invece il trapianto inverso di *Rana esculenta* su embrione di *Triton* si differenziava e veniva distrutto soltanto in un secondo tempo. Esperienze compiute posteriormente (1930) con l'*Hyla arborea* ci mostrarono che la vescicola ottica di *Triton* poteva benissimo svilupparsi su quest'altra specie di Anuro. Queste esperienze di trapianto dimostravano dunque una netta differenza biochimica tra le due specie. Era logico arguire che queste diverse reazioni fossero in rapporto alle peculiari condizioni metaboliche, che si svolgono nello sviluppo delle singole specie. Sono oramai molti anni che io ho determinato che le condizioni metaboliche dello sviluppo embrionale degli Anfibi, dipendenti dal metabolismo del vitello, sono molto diverse da quelle larvali: intendendo per sviluppo larvale solo quello che s'inizia quando l'organismo comincia a mangiare, perchè solo allora entrano veramente in funzione le ghiandole a secrezione interna e entra in gioco, per l'accrescimento l'influenza del sistema nervoso. Le esperienze avanti accennate (Cotronei e Spirito) valorizzano coi nuovi risultati di operazioni di trapianto la profonda differenza fra il chimismo dei due stadi dello sviluppo.



Di fronte ai risultati differenziali tra *Rana esculenta* e *Hyla arborea* riguardanti il verificarsi o no della prima distruzione io, dunque, sospettai che ciò dipendesse da, sia pure lievi, differenze biochimiche che si svolgono nel metabolismo del vitello delle due differenti specie e questo nei rapporti con il trapiantato. Ricerche lunghe e metodiche condotte anche con differenti punti di vista sperimentali (Cotronei e Guareschi, Spirito, Perri) hanno sempre più documentato la verità della mia induzione.

Tutto il complesso di questi lavori m'induce a vedere una corrispondenza tra i fatti accertati nella prima incompatibilità dei trapianti di Urodeli su Anuri con quelli immunitari, soprattutto se lumeggiati dalla classica teoria di Bordet. Gli abbozzi trapiantati di Urodeli li possiamo considerare agenti come antigeni rispetto ai tessuti embrionali di *Rana esculenta*. Dobbiamo ora indagare con quali modalità e con quali proprietà si svolgono questi processi di reazione naturale che conducono alla distruzione del trapiantato. Già in esperienze del 1930 e del 1931 (Cotronei e Guareschi) abbiamo veduto che nei trapianti xenoplastici ed eteroplastici si potevano mettere in evidenza fenomeni di blocco del vitello: mutando cioè le condizioni biochimiche, da forma a forma biologica, si può mettere in evidenza un fenomeno di precipitazione (si può così spiegare) nelle sostanze che formano i globuli del vitello, così che in taluni casi questi possono anche persistere quando i processi di distruzione cellulare sono già avanzati; ma non in tutte le forme studiate si riesce a colpire la distinzione tra i due processi. Ci risultò anche che, nelle esperienze di trapianti di Urodeli su *Rana esculenta* (Cotronei e Guareschi), se le operazioni si compiono quando è già consumato il vitello dell'ospite si può notare una maggiore resistenza del trapianto. Si cominciava così a delineare una verifica della mia ipotesi avanti accennata, che ancora meglio veniva valorizzata dai brillanti risultati conseguiti da Spirito e da Perri.

Spirito è riuscito trapiantando l'abbozzo oculare di *Triton* allo stadio di vescicola ottica tanto primaria che secondaria su parti embrionali di *Rana esculenta*, isolate dalle parti contenenti la maggior quantità di vitello (teste isolate, code isolate) a farle differenziare. Se invece l'operazione si compie su parti embrionali ugualmente isolate ma con notevole quantità di vitello, allora si verificano rapidamente i processi distruttivi.

Le ricerche di Perri, a differenza di quelle di Spirito mirano a indagare il comportamento del trapianto a seconda della quantità di globuli vitellini in esso contenuti. Perri ha potuto accertare che la rapida distruzione della vescicola ottica di Urodeli sull'embrione di *Rana esculenta* è anche in funzione della quantità di globuli vitellini contenuti nel trapiantato.

Dunque per i processi citolitici che investono i trapianti di Urodeli esercitano influenza tanto il vitello dell'ospite quanto quello del donatore: questo fatto va messo in risalto perchè può farci capire e precisare quale è la parte che spetta realmente al metabolismo del vitello.

Tutto ci lascia ritenere che in questi processi entrino in giuoco sia gli anticorpi normali degli embrioni di *Rana esculenta*, sia le proprietà di antigeni degli abbozzi degli Urodeli come ancora l'influenza di un complemento. Questo è rappresentato dal metabolismo del vitello (disintegrazione proteica e forse anche lipoidea del vitello). Tutta una serie di esperienze parla concordemente in favore di una concezione di un processo litico successivo ad un'azione sensibilizzante (Bordet) piuttosto che ad un'azione contemporanea dell'anticorpo (di *Rana esculenta*) verso l'antigene (cellule di Urodeli) e verso il complemento (vitello).

Che l'azione tossica dell'embrione di *Rana* verso il trapianto si svolga dapprima con una fase di semplice sensibilizzazione lo dimostrano le esperienze di ricupero del Perri. Se si riporta in tempo opportuno il trapianto di Urodelo dalla *Rana esculenta* di nuovo sull'Urodelo si può annullare ogni azione citotossica: dunque si può ottenere la desensibilizzazione: questo però non è possibile oltre un certo limite di tempo, perchè allora è entrato in attività l'altro fattore (complemento) che conduce alla citolisi o distruzione. Questo processo è graduale e talvolta si ha una parziale distruzione del trapianto. Dunque questi anticorpi sono poco diffusibili e le esperienze avanti ricordate dimostrano, inoltre, nel nostro caso, che l'antigene può essere recuperato per dissociazione del complesso anticorpo-antigene (Bordet). Cosicchè si può ritenere che l'anticorpo contenuto naturalmente nell'embrione di *Rana esculenta* abbia gradualmente compenetrato il trapiantato (di Urodelo) senza fargli, in un primo tempo, subire profonde alterazioni. In un secondo tempo interviene l'azione del complemento quando si sia raggiunto un determinato equilibrio anticorpo-antigene: il complemento è quello che, in queste condizioni, determina l'azione litica o disgregatrice: e il complemento è rappresentato dalla disintegrazione metabolica del vitello: le esperienze di Spirito sono di una evidenza nettamente dimostrativa essendosi potuto annullare, proprio sull'embrione di *Rana esculenta* in zone prive o quasi di vitello, l'azione citotossica di questa specie in un determinato stadio.

Sin dai primi risultati ottenuti io mi ero orientato nel senso di un perturbato equilibrio nel metabolismo vitellino in seguito alle azioni che si svolgono tra ospite (*Rana esculenta*) e trapianti di Urodeli, e la sostanza di questa interpretazione non si è dimostrata erronea, ma sempre meglio lumeggiata con le analisi sperimentali avanti esposte: le considerazioni fatte in questa Nota non soltanto ci hanno permesso di integrare esperienze di vario genere, mostrando come tutte concordano verso la stessa interpretazione, ma ci hanno fatto meglio comprendere il valore delle singole fasi del processo d'incompatibilità che conduce alla distruzione del trapianto: e mi pare che netta ne risulti la concordanza con le idee fondamentali della classica teoria di Bordet.

La sensibilizzazione agli anticorpi dell'embrione di *Rana esculenta* è tale che, in accordo con le esperienze di ricupero, dobbiamo ammettere che la

fissazione del complemento si operi più energicamente soltanto quando l'antigene e l'anticorpo si trovino in determinate proporzioni (Bordet)<sup>(1)</sup>. I nostri risultati sperimentali sono in accordo con quelli teorici di Bordet, dobbiamo però, per il momento, restringere la nostra interpretazione per i trapianti embrionali al solo caso di anticorpi normali. Che poi il vitello agisca come complemento lo possiamo desumere dal peculiare comportamento dei processi di lisi e dal fatto che esso non è strettamente specifico dal momento che ha influenza tanto quello dell'ospite che quello del donatore.

Le considerazioni avanti esposte hanno essenzialmente voluto fare un confronto con fatti noti di altro genere di esperienze: si tratta però di argomenti di cui non mi nascondo la difficoltà e la complessità. Che cosa sono ad esempio gli anticorpi naturali contenuti nella *Rana esculenta*? Sono sostanze che anch'esse entrano nel metabolismo del vitello o meglio stimolano quella disintegrazione del vitello i cui prodotti ritengo agiscano come complemento? Io sono propenso ad ammetterlo, ma per ora è un semplice sospetto che avanzo, che cioè nella costituzione degli anticorpi entrino quei fermenti che hanno influenza nel processo disintegrativo dei corpuscoli vitellini: e per quanto da integrarsi con tante e diverse esperienze mi sembra che meriti di esser segnalata l'idea espressa dal Rondoni<sup>(2)</sup>: « Allora sarebbe logico vedere negli anticorpi a tipo litico o coagulante... degli agenti enzimatici che per funzionare richiedono una definita struttura chimico-fisica del mezzo e il complemento sarebbe niente altro che questa struttura ottimale facilmente alterabile ».

Infine le considerazioni esposte in questa Nota ci chiariscono il diverso comportamento che si può avere in operazioni inverse di trapianti. L'embrione di *Rana esculenta* possiede anticorpi verso gli Urodeli, questi, negli stadi corrispondenti non ne posseggono verso la *Rana esculenta*. Ciò conduce a risultati completamente opposti, circa la prima incompatibilità da noi studiata.

(1) BORDET, *Immunité, Antigenes, Anticorps* in *Traité de Physiologie normale et Pathologique*. Tome VII, 1926, p. 379. Masson. Paris.

(2) RONDONI P., *Elementi di biochimica*. 2ª edizione 1928, p. 554. Unione Tip. Editr., Torino.

**Biologia** (Patologia vegetale). — *Contributo alla conoscenza della biologia e della sistematica degli stipiti dello "Sclerotium Rolfsii"* <sup>(1)</sup>.  
Nota di M. CURZI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. PETRI.

In una recentissima pubblicazione il Weber <sup>(3)</sup> riporta un elenco di 189 piante ospiti dello *Sclerotium Rolfsii* Sacc., nelle quali sono comprese la maggior parte delle piante erbacee ortive e ornamentali e alcune legnose dei generi *Citrus*, *Coffea*, *Crataegus*, *Ficus*, *Pittosporum*, *Rosa*, ecc. Certamente ci troviamo di fronte a un parassita polifago, capace di esercitare la sua azione parassitaria su piante diversissime, come altri funghi simili riferibili allo stesso genere di basidiomiceti (*Corticium vagum* B. et C.), ma non abbiamo però alcun dato sicuro per dire che si tratti sempre della medesima specie, dello stesso unico parassita, il quale verrebbe a manifestarsi in forme vegetative tanto diverse e dissimili, come alcuni autori, con una comoda superficialità, vorrebbero ancora oggi sostenere.

Fin dalle prime osservazioni su uno stipite di *Sclerotium* sp. ed un altro di *Sclerotium Rolfsii*, isolato da me per la prima volta in Italia ed in Europa, riportati in una Nota presentata a questa Accademia nel luglio dell'anno scorso, scrivevo che « pur tenendo conto delle possibili variazioni e degli stipiti che la specie può presentare nelle diverse condizioni ambientali e parassitarie, più specie di *Sclerotium* appartenenti al ciclo evolutivo di alcuni basidiomiceti inferiori, possono produrre le medesime infezioni », e aggiungevo più oltre « che non debbono riferirsi a una sola entità specifica gli *Sclerotium* parassiti, riportati finora nei diversi continenti sotto il nome di *Sclerotium Rolfsii* » <sup>(4)</sup>.

Come tutti i casi di malattia attribuiti allo *Sclerotium Rolfsii* non possono secondo me riferirsi a un'unica specie, non può nemmeno attribuirsi a una sola entità specifica l'area di distribuzione oggi conosciuta per la specie saccardiana. Dopo i paesi meridionali degli Stati Uniti d'America, la presenza del fungo è stata constatata in tutti i continenti e segnalata nelle Hawaii, Cuba, Porto Rico, Egitto, Africa del Sud, Giappone, Filippine,

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) G. F. WEBER, *Blight of carrots caused by "Sclerotium Rolfsii" with geographic distribution and host range of the fungus*. « Phytopatology », vol. XXI, 12, pp. 1129-1140, 6 fig., 1931.

(4) M. CURZI, *Alcuni casi di cancrena pedale da "Sclerotium" osservati in Italia*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », Class. Sc. fis. mat. nat., vol. XIV, serie 6<sup>a</sup>, 2° sem., fasc. 5-6, pp. 233-236, 1 fig., 1931.



Sumatra, Giava, Indie, Ceylon, Australia e Italia; la sua area di distribuzione potrebbe domani estendersi ancora di più con le nuove ricerche e non è da meravigliarsi se, in un tempo non tanto lontano, esso venisse ritrovato da molti altri autori in ogni paese tropicale e subtropicale.

Le nostre conoscenze su la biologia dei funghi ci portano a ritenere come più probabile però che una specie fungina, abitualmente terricola, non dotata di una diffusione anemofila, non possa in tempi recenti aver fatto il giro del globo e ritrovarsi in continenti ed in paesi tanto lontani. Le osservazioni da me fatte finora su stipiti di diversa provenienza mi hanno portato a rilevare una netta indipendenza fra parecchi di loro, in modo tale da farmi ritenere che alcuni stipiti giapponesi da me esaminati, abbiano avuto una origine e un'evoluzione assai differente da quella degli stipiti americani.

Se dovessero considerarsi come stipiti di *Sclerotium Rolfsii* tutti quelli indicati dagli autori, americani e giapponesi, indiani e africani, si avrebbe una scala così diversa di caratteri i cui estremi non si otterrebbero nemmeno dal confronto di specie di *Sclerotium* ritenute da tempo assai dissimili.

Per me non si tratta nè di una nè di due specie, ma di più specie di basidiomiceti inferiori con sclerozi vegetativi, non legati alla riproduzione perfetta, la cui determinazione esatta non potrà ottenersi senza l'osservazione dello stadio basidioforo o senza un accurato studio di confronto con specie delle quali si conosce tale forma di riproduzione.

La sporificazione perfetta non è stata mai osservata dagli autori americani che si sono occupati dello *Sclerotium Rolfsii*; è stata invece ottenuta da me in condizioni ambientali differentissime nei due *Sclerotium* isolati in Italia dall'astro e dalla patata, descritti accuratamente in una prima Memoria, riguardanti una serie di ricerche intorno ai vari stipiti dello *Sclerotium Rolfsii*, determinati dai vari autori <sup>(1)</sup>.

In tale pubblicazione, da poco data alla stampa, ho concluso che questi due stipiti italiani rappresentano due specie fungine ben distinte, non tanto nello stadio imperfetto e sterile di *Sclerotium*, come in quello perfetto di *Corticium*.

Lo *Sclerotium* isolato dalla patata corrisponde a quello originale che servì al Saccardo per la descrizione della specie. Esso si deve prendere quindi come tipo e considerare al di fuori dell'orbita di questa specie tutti gli altri stipiti che si dimostrano con caratteri opposti. Esso forma facilmente dense croste di ife basidiofore al disopra del substrato o su la parete della scatola Petri o del tubo di coltura, con basidi clavati e basidiospore ialine, lisce, globose e apiculate. Tale sporificazione, non è riferibile a nessuna delle specie di basidiomiceti oggi conosciute e per questo ho stabilito la nuova combinazione di *Corticium Rolfsii* (Sacc.) Curzi.

(1) M. CURZI, *Studi su lo "Sclerotium Rolfsii"*. Memoria I: *Intorno a due "Sclerotium" isolati in Italia*, ecc., « Boll. R. Staz. Patologia Vegetale di Roma »; anno X, fasc. 4°, pp. 306-373, figg. 23, tavv. VI-XIV, 1931.



Lo *Sclerotium* isolato dall'astro forma le fruttificazioni basidiofore mai crostiformi, ma distintamente aeree, a fiocchi candidi, talora molto grandi e rilevati sulla superficie della coltura, con basidi clavati e basidiospore allungate, ovali e piriformi. In alcuni casi, specialmente nei terreni non ben provvisti di principi nutritivi, le ife basidiofore non formano degli ammassi densi come quelli che generalmente si osservano nei terreni ordinari, ma sono uniformemente sparse e non intrecciate le une con le altre, dando luogo a un lasso tappeto candido, talora molto esteso, come è stato osservato in natura sul *Corticium centrifugum* (Lév) da Tulasne<sup>(1)</sup>. Con questa vecchia specie, il *Corticium* dell'astro ha molte affinità, al pari di alcuni stipiti orientali; l'identità specifica però non è stata ancora stabilita definitivamente, mancando della specie del Lèveillé una moderna e precisa descrizione, quale oggi si richiede per un esatto e definitivo riferimento sistematico.

Tutte le principali caratteristiche, nelle due specie riguardanti i due *Sclerotium* isolati in Italia, sono essenzialmente differenti.

La prima ha i caratteri molto costanti: dalle unioni a fibbia quasi sempre emisferiche, passiamo alla quasi uniformità delle dimensioni e della forma degli sclerozi nei diversi substrati, alle fluttuazioni e alle variazioni a salti appena manifeste. La seconda, al contrario, ha i caratteri variabilissimi: le unioni a fibbia hanno l'uncino talora emisferico tal'altra e più spesso paraboloidale, o allungato in un breve ramo micelico in gran parte rasente alla cellula seguente dell'ifa; gli sclerozi non sono mai uniformi e regolari e sono molto influenzati dalle condizioni ambientali, le fluttuazioni e le variazioni a salti sono accentuate e frequenti.

Fra i due funghi esiste un netto antagonismo. Nelle colture eseguite contemporaneamente su le medesime piastre lo *Sclerotium* dell'astro produce su quello della patata una distinta zona di inibizione per il micelio aereo e per gli sclerozi, e sviluppa più fruttificazioni basidiofore e più sclerozi nella linea di delimitazione delle due colture.

L'azione antagonistica dello *Sclerotium* dell'astro si esercita anche contro alcuni stipiti stranieri col quale è stato confrontato, ma è nulla contro uno stipite giapponese del Nakata e minima contro gli stipiti di *Sclerotium Rolfsii* di Stevens e di Wolf, i quali hanno in comune con esso molti caratteri vegetativi del micelio e degli sclerozi.

Sottoposti a diverse condizioni fisico-chimiche dell'ambiente, i due funghi hanno un comportamento distintamente differente. Così ad esempio, con l'aumento nel substrato della concentrazione dei carboidrati, nello *Sclerotium* della patata aumenta proporzionalmente il numero degli sclerozi, i quali conservano la medesima forma e le stesse dimensioni, mentre nello stipite dell'astro il numero diminuisce e gli sclerozi aumentano di volume e assumono forme molto irregolari.

(1) L. R. TULASNE e C. TULASNE, *Selecta Fungorum Carpologia*, t. I, pp. 113-115, 1861.

La maggior parte degli stipiti di *Sclerotium Rolfsii* finora da me osservati, debbono aggrupparsi attorno a queste due specie di *Corticium*. Se non si riesce a ottenere lo stadio perfetto, si debbono ricercare le similitudini nello sviluppo degli organi vegetativi nelle più diverse condizioni ambientali. Ma tale studio più che su i caratteri degli sclerozi, variabilissimi anche negli stipiti più costanti su lo stesso terreno a seconda dell'ampiezza dell'ambiente della coltura, deve basarsi sul portamento e sull'aspetto del micelio.

Non è molto che dal confronto di alcuni stipiti stranieri di *Sclerotium Rolfsii*, avevo stabilito che tanto lo stipite di Stevens quanto quello di Wolf non dovevano rientrare nell'orbita specifica dello *Sclerotium* isolato da me dalla patata e quindi in quella del vero *Sclerotium Rolfsii*.

Lo stipite di Wolf è ritenuto dai migliori specialisti come uno stipite tipico di *Sclerotium Rolfsii*, e ciò non sarebbe affatto errato se l'esame venisse limitato alla forma ed alle dimensioni degli sclerozi, i quali sono piccoli e spesso regolari. Osservato attentamente si nota però che tale fungo ha una vegetazione micelica rassomigliante a quella dello *Sclerotium* italiano dell'astro; per questo mi è subito apparso anche esso differente dallo *Sclerotium Rolfsii* tipico.

La conferma più dimostrativa di questa determinazione non poteva essere data che dalla forma perfetta, la quale è stata da me osservata in alcune scatole Petri, soltanto in questi ultimi giorni. Nello stipite di Wolf l'imenio non è mai denso e crostiforme come nel *Corticium Rolfsii*, ma lasso e distintamente aereo, più ancora che nel *Corticium* sp. dell'astro. Dal substrato si innalzano fiocchi radi di ife miceliche divergenti e molto elevati su la superficie della coltura, i quali prendono in seguito un aspetto candido, niveo, per la formazione di numerosi basidi all'estremità delle ife, le quali, nel loro insieme, costituiscono densi corimbi che fanno curvare verso il basso le ife che li sostengono. I basidi sono clavati con due, tre o quattro sterigmi e le basidiospore ovali, piriformi, non essenzialmente diverse da quelle del *Corticium* dell'astro.

Fra questo e il precedente esiste una netta, marcata differenza nelle dimensioni, nel colore e nella variabilità degli sclerozi, i quali, nello stipite americano sono generalmente piccoli, spesso anche più dello *Sclerotium* della patata; ma tali sclerozi tendono ad aggrupparsi e a presentare altre caratteristiche comuni allo stipite dell'astro. Per di più poi da una variazione discontinua a settore di quest'ultimo, mi è stato possibile isolare uno stipite variante, il quale ha il micelio aereo non tanto elevato in confronto dell'originario e gli sclerozi più numerosi, più piccoli e più regolari.

Questi fatti, oltre a rilevare la stretta parentela che esiste fra il *Corticium* italiano dell'astro e quello americano di Wolf, vengono a dimostrare inoltre che i concetti degli autori che basano la tassonomia degli *Sclerotium* su la forma e le dimensioni degli organi di conservazione, non sono esatti.

Riassumendo, tutti gli stipiti di *Sclerotium Rolfsii* descritti e da me esaminati, si possono per ora riunire in tre aggruppamenti distinti, aventi come tipo: il primo la forma scleroziale del *Corticium Rolfsii* (Sacc.) Curzi, il secondo la forma scleroziale del *Corticium centrifugum* (Lèv.) ed il terzo lo *Sclerotium Delphinii* Welch. Tali gruppi si possono riassumere come segue:

I. — Micelio non fioccoso, per lo più strisciante, e cordonato; sclerozi numerosi, relativamente piccoli, globosi, sparsi, non aggregati e non coalescenti, di forma e di dimensioni pressocchè costanti; imenio denso crostiforme, aderente al substrato; basidiospore globose.

Tipo: *Sclerotium Rolfsii* Sacc.

Stipiti: 1) Rolfs-Saccardo 1911, steli di *Solanum tuberosum* da Gai-newille, Florida (Erbario micologico Saccardiano); 2) Edson e Shapovalov 1923, coltura microsclerotica n. 127, da steli di *Solanum tuberosum* dall'Arkansas; 3) Curzi 1931, da steli di *Solanum tuberosum* in Italia.

II. — Micelio fioccoso, cotonoso, abbondantemente aereo, a sviluppo ordinario centrifugo; sclerozi generalmente non tanto numerosi, irregolarmente sparsi, aggregati e coalescenti, variabilissimi nella forma e nelle dimensioni; imenio lasso, mai crostiforme, con ife basidiofore a fiocchi candidi prettamente aerei; basidiospore oblunghe, ovali o piriformi.

Tipo: *Sclerotium centrifugum* (Lèv.) n. c.

Stipiti: 1) Lèveillé 1843, Francia; 2) Tulasne 1861, Francia; 3) Wolf 1914, Alabama (ricevuto dal Centraalbureau voor Schimmelcultures di Baarn); 4) Taubenhause 1919, Texas; 5) Edson e Shapovalov 1923, coltura n. 126 da tuberi di patata nella Carolina del Nord; 6) Nakata 1926, Giappone (ricevuto dal Centraalbureau voor Schimmelcultures di Baarn); 7) Stevens 1931 (*Scl. Rolfsii*); 8) Curzi 1931, da Steli di *Aster chinensis* in Italia.

III. — Micelio non fioccoso, cordonato, strisciante; sclerozi non numerosi, grandi, alveolati, concavi e per lo più colorati vivamente in rossiccio; imenio sconosciuto.

Tipo: *Sclerotium Delphinii* Welch.

Stipiti: 1) Takahasci 1927, Wisconsin; 2) Stevens 1931 (*Scl. Delphinii*); 3) Whetzel 1931 (ricevuto dal Centraalbureau voor Schimmelcultures di Baarn).



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà alla Classe il doloroso annuncio della morte del Socio FERRUCCIO ZAMBONINI e ne rievoca brevemente la figura.

Il Socio MILLOSEVICH si associa con animo commosso alle parole pronunciate dal Presidente in onore del Socio ZAMBONINI e sollecita dalla Classe l'onore di commemorarlo in una delle prossime sedute.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando « Tuberculose, contagion, hérédité », « Le Cancer » e « La vie la maladie et la mort » di Augusto Lumière; « La partecipazione italiana al sesto Congresso Internazionale della Strada, Washington - 1930 »; C. Bornati « Gli impianti idroelettrici del Municipio di Torino nell'alta valle dell'Orco »; gli « Atti del VI Congresso internazionale dei Matematici ».

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci BLANC, ENRIQUES, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, MARTELLI.

---





## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 7 febbraio 1932*

- AGAMENNONE G. — Frane, sprofondamenti e scosse sul Vesuvio dal 1906 al 1917. (Estr. dal « Bollettino della Società Sismologica Italiana ». Vol. XXIX, pp. 141-164). Roma, 1931. 8°.
- ALFANI GUIDO. — Una grande invenzione italiana: il motore a scoppio Barsanti-Matteucci (1853). Firenze, 1931. 8°, pp. 1-35.
- ÅNGSTRÖM ANDERS. — Registrations of illumination from sun and sky with cuprous oxide cells. (Reprinted from « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Vol. XXXI, pp. 438-444). Leipzig. s. d. 8°.
- ÅNGSTRÖM ANDERS. — Ueber die Strahlungsdurchlässigkeit benetzter Mattglasscheiben. (Sonderabd. aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Bd. XXXI, Heft VI. pp. 435-437). Leipzig. 1931. 8°.
- Atti 'del raduno dei tecnici agricoli del Mezzogiorno e delle isole d'Italia. Portici 29-31 marzo 1931. Napoli, 1931, 8°, pp. 1-263.
- BORNATI CLEMENTE. — Gli impianti idrolettrici del Municipio di Torino nell'alta valle dell'Orco. Torino, 1930. 4°, pp. 1-305.
- CESARIS DEMEL A. — Necrologio di Antonio Dionisi Accademico d'Italia 26 aprile 1866 - 19 settembre 1931. (« Pathologia », Rivista mensile. Vol. XXIII, n. 482, 1931). Genova, 1931. 8°, pp. 713-715.
- Comitato per l'Ingegneria del Consiglio Nazionale delle Ricerche. La partecipazione italiana al sesto Congresso internazionale della strada. Washington, ottobre 1930. Roma, 1931. 8°, pp. 1-340.
- FABIANI RAMIRO. — Eruzioni sottomarine in Sicilia durante il Giurese. (Reprint. from the « Compte-Rendu, XV International Geological Congress, South Africa, 1929 ». Vol. II, pp. 504-506). s. d. t. 8°.
- FABIANI RAMIRO. — Analogie tettoniche fra la Sicilia e la Tunisia (Reprint. from the « Compte-Rendu, XV International Geological Congress, South Africa, 1929 ». Vol. II, pp. 506-510). s. d. t. 8°.
- FABIANI RAMIRO. — Esplorazione geofisica regionale in Sicilia; Campagna 1929 e 1930. (Estr. dal « Bollettino dell'Assicurazione mineraria Siciliana », Anno V, n. 8 e VI, n. 8). Palermo, 1929, pp. 1-10; 1930, pp. 1-6.
- FABIANI RAMIRO. — Guida sommaria delle escursioni. (Società Geologica Italiana). Palermo, 1931. 8°, pp. 1-30.
- FABIANI RAMIRO. — Idee sulla provenienza degli idrocarburi di Sicilia. (Reprint. from the « Compte-Rendu, XV International Geological Congress, South Africa, 1929 ». Vol. II, pp. 303-305). s. d. t. 8°.
- FABIANI RAMIRO. — L'Istituto e il museo di Geologia della R. Università di Palermo. Palermo, 1931. 8°, pp. 1-37.
- FABIANI RAMIRO. — Sulla convenienza che l'esplorazione gravimetrica regionale della Sicilia venga integrata da osservazioni di gravità nel mare circostante. (Estr. dal « Bollettino dell'Associazione mineraria Siciliana ». Anno VI, n. 4-5). Palermo, 1930. 8°, pp. 1-9.

- FABIANI RAMIRO e PETRUCCI GIUSEPPE. — Esplorazione geofisica regionale della Sicilia. Censo preliminare su un'anomalia geomagnetica riscontrata in territorio di Pachino. (Estr. dal «Bollettino dell'Associazione mineraria Siciliana». Anno VII). Palermo, 1931. 8°, pp. 1-10.
- FRIEDMANN HERBERT. — Observations on the growth rate of the foot in the mound birds of the genus *Megapodius*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-4.
- GERUNDO MICHELE. — Studio preliminare sulla fisico-chimica della demenza precoce. (Estr. dalla Rivista «Patologica». Vol. XXIII). Genova, 1931. 8°, pp. 1-4.
- LECAT MAURICE. — A new application of azeotropism. (Reprinted from the «Journal of Physical Chemistry». Vol. XXXIV, pp. 2508-2518). s. l. 1930. 8°.
- LECAT MAURICE. — Atomie et Cosmos. Partie I, II. (Extr. de la «Revue des Questions scientifiques». Tomes XIX, XX). Louvain, 1931. 8°, pp. 1-16, 1-29.
- LOMBARDI LUIGI. — Fenomeni di polarizzazione in un campo elettrostatico uniforme. Misura di differenze di potenziale e di costanti dielettriche (Estr. dalle «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Serie II, Tom. XLV, pp. 171-234). Torino, 1895. 4°.
- LOMBARDI LUIGI. — Ricerche sopra sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche. (Estr. dalle «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Serie II, Tom. XLVII). Torino, 1897. 4°, pp. 1-38.
- LONGO BIAGIO. — Importanza della coltivazione delle piante officinali esotiche acclimatabili nel nostro Mezzogiorno. (Estr. dal «Bollettino del R. Orto Botanico di Napoli». Tomo X, pp. 9-16). Napoli, s. d. 8°.
- LONGO BIAGIO. — Relazione per l'anno 1930 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal «Bollettino del R. Orto Botanico di Napoli». Tomo X). Napoli, 1930. 8°, pp. 1-7.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — La vie, la maladie et la mort. Paris, 1930. 8°.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — Le cancer, maladie des cicatrices. Préface de L. Bérard. Paris, 1929. 8°, pp. 1-287.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — Le problème de l'anaphylaxie. Paris, 1924. 8°, pp. 1-X, 1-241.
- LUMIÈRE A. — Les annales des laboratoires A. L. de physiologie expérimentale et de pharmacodynamie. Années 1924-1930. Lyon, 1924-30.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — Nomenclature des principaux travaux scientifiques, 1887-1931. Lyon, 1931. 8°, pp. 1-44.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — Tuberculose, contagion, hérédité. Édition II. Lyon, 1931. 8°, pp. 1-XV, 1-424.
- MALLOCH JOHN R. — Flies of the genus *Pseudotephritis* Johnson (Diptera: Ortalidae). (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-6.
- MANSFIELD W. C. — Some tertiary mollusks from Southern Florida. (From the «Proceedings of the United States National Museum» Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-12.
- MARSHALL WILLIAM — Anodontites: a genus of South and Central American and Mexican pearly freshwater mussels. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-16.
- MONTEROSSO BRUNO. — Notizie e considerazioni su quattro recenti catture di «*Selache maxima* Cunn.» nel mare di Catania. (Estr. dagli «Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania». Vol. XVIII). Catania, 1931. 4°, pp. 1-29.
- P. A. — Il cambiamento di stato degli elementi quale causa del fenomeno elettrico. Roma, 1931. 8°, pp. 1-26.
- PLASKETT H. H. — The formation of the Magnesium B. lines in the solar atmosphere. (Reprinted from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. XCI, pp. 870-933). s. l. 1931. 8°.

Revue des travaux scientifiques tchécoslovaques. Section II<sup>e</sup>; mathématiques – physique – chimie; minéralogie et géologie-géographie; sciences techniques, biologiques et médicales. T. III 1922-1924. Prague, 1931. 8°, pp. 1-872.

ROCARD Y. — L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz. Paris, 1932. 8°, 1-x, 1-160.

SHOEMAKER CLARENCE R. — The Stegocephalid and Ampeliscid amphipod cru-

staceans of Newfoundland, Nova Scotia, and New Brunswick in the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-18.

VIGNE PAUL. — L'oeuvre scientifique de Auguste Lumière dans le domaine de la biologie et de la médecine. Lyon, 1931. 8°, pp. 1-30.

N. P.

---





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Fascicolo del 21 febbraio 1932 (Anno X)*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Meccanica.** — *Moto con scia di un profilo flessibile; azioni dinamiche. Nota II<sup>(1)</sup> del Corrisp. U. CISOTTI<sup>(2)</sup>.*

7. SOLUZIONE APPROSSIMATA: PROFILO FORTEMENTE TESO. — Supporremo ora che il profilo sia fortemente teso, cioè che  $T_0$  sia molto grande senza essere infinita; in modo preciso, posto:

$$(25) \quad \varepsilon = \frac{l}{\rho_0}, \quad l = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2,$$

con che  $\varepsilon$  designa il rapporto tra la lunghezza del filo e il raggio di flessione nel punto di prora, sia  $\varepsilon$  così piccolo da potersi trattare come quantità di primo ordine. Per la (6) risulta allora:

$$\varepsilon = \frac{\mu l c^2}{2 T_0},$$

la quale mostra che l'ipotesi ora introdotta equivale a ritenere grande il valore  $T_0$  della tensione del filo di fronte ad una forza di intensità  $\frac{1}{2} \mu l c^2$ .

(1) V. la Nota I a p. 165.

(2) Nella seduta del 21 febbraio 1932.

In tale ipotesi vediamo come si semplifichi la condizione (20); poniamo a tal uopo:

$$(26) \quad \Omega = \varepsilon \omega_i \quad , \quad \omega_i = \vartheta_i + i\tau_i ,$$

e corrispondentemente

$$\Theta = \varepsilon \vartheta_i \quad , \quad T = \varepsilon \tau_i ,$$

essendo  $\omega_i$  una funzione di  $\zeta$  da determinarsi in modo che  $\Omega$  soddisfi nel semicerchio a tutti i requisiti voluti e, in particolare, alle (20) e (21), tenuto conto che  $\varepsilon$  va trattato come quantità di primo ordine.

Si noti che, per la (25), la (20) può scriversi:

$$\varepsilon \frac{d\vartheta_i}{d\sigma} = \frac{4a^2}{cl} \varepsilon \{ \sin \sigma_0 \cdot \sin \sigma \cdot \text{Ch}(\varepsilon \tau_i) + (1 - \cos \sigma_0 \cdot \cos \sigma) \cdot \text{Sh}(\varepsilon \tau_i) \} \cdot \sin \sigma ,$$

e poichè, per l'accennata approssimazione,

$$\text{Ch}(\varepsilon \tau_i) = 1 \quad , \quad \text{Sh}(\varepsilon \tau_i) = \varepsilon \tau_i ,$$

dalla precedente si deduce:

$$\varepsilon \frac{d\vartheta_i}{d\sigma} = \varepsilon \frac{4a^2}{cl} \cdot \sin \sigma_0 \cdot \sin^2 \sigma ,$$

da cui integrando, semplificando e tenendo presente che  $\vartheta_i$  deve annullarsi per  $\sigma = \sigma_0$ , si ottiene:

$$(27) \quad \vartheta_i(\sigma) = \frac{a^2}{lc} \sin \sigma_0 \cdot \{ 2(\sigma - \sigma_0) + \sin 2\sigma_0 - \sin 2\sigma \} .$$

Applicando la (23) alla funzione  $\omega_i(\zeta)$ , questa risulta definita dalla seguente relazione:

$$(28) \quad \omega_i(\zeta) = \frac{a^2 \sin \sigma_0}{\pi lc} \int_0^\pi [2(\sigma - \sigma_0) + \sin 2\sigma_0 - \sin 2\sigma] \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} d\sigma .$$

La funzione  $\omega(\zeta)$  che risolve il problema è dunque, per (19) e (26):

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \varepsilon \omega_i(\zeta) ,$$

essendo  $\omega_i$  la funzione testè definita dalla (28) e  $\omega_0$  dalla (17).

*Curvatura del profilo.* — La curvatura è definita, in un punto generico del profilo [I. P., n. 104, (· · ·)], dalla formula seguente:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\vartheta}{d\tilde{\omega}} = \frac{ce^v}{2a^2 |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \cdot \sin \sigma} \cdot \frac{d\vartheta}{|d\sigma|} ;$$

ma è:

$$\tau = \tau_0 + \varepsilon \tau_1 = \log \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma + \sigma_0}{2}} \right| + \varepsilon \tau_1,$$

$\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon \vartheta_1$ , essendo  $\vartheta_0 = \begin{cases} \sigma_0 - \pi, & \text{per } 0 < \sigma < \sigma_0, \\ \sigma_0, & \text{per } \sigma_0 < \sigma < \pi, \end{cases}$   
per cui

$$\frac{d\vartheta}{d\sigma} = \varepsilon \frac{d\vartheta_1}{d\sigma} = \varepsilon \frac{4a^2 \operatorname{sen} \sigma_0}{cl} \cdot \operatorname{sen}^2 \sigma.$$

Si ha dunque:

$$e^\tau = e^{\tau_0} (1 + \varepsilon \tau_1) = (1 + \varepsilon \tau_1) \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma + \sigma_0}{2}} \right|,$$

quindi, colla voluta approssimazione,

$$e^\tau \cdot \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \varepsilon \frac{4a^2 \operatorname{sen} \sigma_0}{cl} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma + \sigma_0}{2}} \right| \cdot \operatorname{sen}^2 \sigma;$$

per cui:

$$\frac{1}{r} = \frac{2\varepsilon}{l} \cdot \frac{\operatorname{sen} \sigma_0 \cdot \operatorname{sen} \sigma}{1 - \cos(\sigma_0 + \sigma)},$$

e, per la (25),

$$(29) \quad \frac{1}{r} = \frac{2 \operatorname{sen} \sigma_0}{\rho_0} \cdot \frac{\operatorname{sen} \sigma}{1 - \cos(\sigma_0 + \sigma)}.$$

Si rilevi che, come doveva essere, per  $\sigma = \sigma_0$  si ha:  $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_0}$ . Inoltre agli estremi del profilo ( $\sigma = 0$  e  $\sigma = \pi$ ) si ha  $\frac{1}{r} = 0$ ; il massimo valore di  $\frac{1}{r}$  si ha nel punto di prora  $\sigma = \sigma_0$ .

*Rappresentazione intrinseca del profilo.* — Avendosi, per la (27), (26) e (19),

$$(30) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon \frac{a^2 \operatorname{sen} \sigma_0}{lc} \{ 2(\sigma - \sigma_0) + \operatorname{sen} 2\sigma_0 - \operatorname{sen} 2\sigma \},$$

$$\vartheta_0 = \begin{cases} \sigma_0 - \pi, & \text{per } 0 < \sigma < \sigma_0, \\ \sigma_0, & \text{per } \sigma_0 < \sigma < \pi, \end{cases}$$

la eliminazione di  $\sigma$  tra (29) e (30) fornisce una relazione tra la curvatura del profilo e l'inclinazione  $\vartheta$  della tangente (nel senso del flusso) sulla direzione della corrente, che costituisce una rappresentazione intrinseca della forma del profilo flessibile. In quanto agli altri elementi: lunghezza  $l = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2$  del profilo, forma dei peli liberi<sup>(1)</sup>, ecc. basta applicare le formule del n. 104 di I. P.

8. AZIONI DINAMICHE SUL PROFILO. — Le componenti cartesiane della risultante delle pressioni dinamiche sul profilo sono [I. P., n. 106]:

$$R_x = \frac{I}{2} \mu \int_{P_1 \rightarrow P_2} (c^2 - V^2) \frac{\partial x}{\partial n} ds = - \frac{I}{2} \mu \int_{P_1 \rightarrow P_2} (c^2 - V^2) dy,$$

$$R_y = \frac{I}{2} \mu \int_{P_1 \rightarrow P_2} (c^2 - V^2) \frac{\partial y}{\partial n} ds = \frac{I}{2} \mu \int_{P_1 \rightarrow P_2} (c^2 - V^2) dx;$$

che si possano conglobare nella seguente relazione complessa:

$$R_y - iR_x = \frac{I}{2} \mu \int_{P_1 \rightarrow P_2} (c^2 - V^2) d\zeta,$$

ma, per la (5), tenuta presente la (6), si ha:

$$\frac{I}{2} \mu (c^2 - V^2) = - \frac{T_0}{\rho} = - \frac{I}{2} \mu c^2 \frac{\rho_0}{\rho} = - \frac{I}{2} \mu c^2 \rho_0 \frac{d\vartheta}{ds},$$

per cui, sostituendo:

$$R_y - iR_x = - \frac{I}{2} \mu c^2 \rho_0 \int_{P_1 \rightarrow P_2} \frac{d\vartheta}{ds} d\zeta = - \frac{I}{2} \mu c^2 \rho_0 \int_{P_1 \rightarrow P_2} \frac{d\zeta}{ds} d\vartheta,$$

ed essendo

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta = e^{i\vartheta},$$

e indicando con  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  le tangenti agli estremi  $P_1$  e  $P_2$  del profilo, nel verso  $P_1 \rightarrow P_2$ ,

$$R_y - iR_x = - \frac{I}{2} \mu c^2 \rho_0 \int_{P_1 \rightarrow P_2} e^{i\vartheta} d\vartheta = \frac{i}{2} \mu c^2 \rho_0 (e^{i\vartheta_2} - e^{i\vartheta_1}) =$$

$$= \mu c^2 \rho_0 e^{i \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}} \cdot \sin \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}.$$

(1) Può essere utile a tale scopo [I. P., nn. 104 e 106] avere, in termini finiti, l'espressione della derivata di  $\omega_1$ ; si ottiene da (28):

$$\frac{d\omega_1}{d\zeta} = \frac{2 a^2 \sin \sigma_0}{\pi l c \zeta} \left\{ \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right)^2 \log \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} - 2 \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right\}.$$

Risulta da questa relazione che la risultante delle pressioni sopportate dal profilo è:

$$(31) \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = |R_y - iR_x| = \mu c^2 \rho_0 \sin \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2},$$

e forma coll'asse reale, cioè colla direzione della corrente, l'angolo

$$(32) \quad \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \pi}{2}.$$

Nel caso in cui il profilo è simmetrico, rispetto all'asse reale, chiamando  $2\alpha$  l'angolo sotto cui si incontrano le tangenti agli estremi, essendo

$$\vartheta_1 = -\alpha, \quad \vartheta_2 = \alpha - \pi,$$

l'inclinazione definita da (32) diviene nulla, cioè — com'è naturale — la risultante è parallela alla corrente e, per la (31), il suo valore risulta

$$R = \mu c^2 \rho_0 \cos \alpha.$$

9. APPLICAZIONE AL CASO DI UN PROFILO FORTEMENTE TESO. — Dalla (30) si ricava, tenendo presente che in  $P_1$  è  $\vartheta = \vartheta_1 + \pi$ ,

$$\vartheta_1 = \sigma_0 - \pi + \varepsilon \frac{a^2 \sin \sigma_0}{lc} \{ 2(\pi - \sigma_0) + \sin 2\sigma_0 \},$$

$$\vartheta_2 = \sigma_0 - \pi - \varepsilon \frac{a^2 \sin \sigma_0}{lc} \{ 2\sigma_0 - \sin 2\sigma_0 \},$$

quindi, per la (25),

$$(33) \quad R = \pi \mu c a^2 \sin \sigma_0,$$

e l'inclinazione

$$\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \pi}{2} = \sigma_0 - \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon \frac{a^2 \sin \sigma_0}{lc} \{ \pi - 2\sigma_0 + \sin 2\sigma_0 \}.$$

La (33) coincide coll'espressione di  $R$  dedotta dalla (...) del n. 108 di I. P., quando si faccia, in quest'ultima,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta = \sigma_0 - \frac{\pi}{2}$  e si tenga conto che in essa si è presupposto  $\mu = 1$ ,  $c = 1$ .



**Astronomia (Astrofisica).** — *Altezza della cromosfera nel 1931.*  
Nota<sup>(1)</sup> del Corrisp. G. ABETTI.

I risultati delle osservazioni eseguite ad Arcetri ed a Madrid, durante il 1931, per l'altezza della cromosfera solare, misurando l'altezza della riga  $H_{\alpha}$  invertita, con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo, sono i seguenti:

*Altezza media della cromosfera nel 1931.*

$+90^{\circ}$ N	$+60^{\circ}$ E	$+30^{\circ}$ E	$0^{\circ}$ E	$-30^{\circ}$ E	$-60^{\circ}$ E	$-90^{\circ}$ S	$-60^{\circ}$ W	$-30^{\circ}$ W	$0^{\circ}$ W	$+30^{\circ}$ W	$-60^{\circ}$ W	Media
Arcetri												
10".73	9".98	9".66	9".56	9".56	9".74	10".31	9".81	9".48	9".59	9".76	9".89	9".84
Madrid												
10 .85	10 .22	9 .80	10 .00	9 .95	10 .22	10 .51	10 .10	9 .76	10 .02	10 .14	10 .09	10 .14

Le osservazioni di Arcetri si basano su 118 giorni di osservazioni, quelle di Madrid su 29. Le osservazioni di Arcetri danno una notevole diminuzione generale della cromosfera:

$$1931-1930 \quad - 0''.44,$$

quelle di Madrid danno invece un aumento di  $0''.33$ , ciò che si può spiegare col fatto, che in questa stazione i pochi giorni di osservazione possono avere influito sul valore medio dell'annata. Dalla tabella, e dalla figura 1, si vede che l'altezza è massima ai poli e minima all'equatore, restando così provato che essa varia periodicamente col ciclo solare, come ho cominciato a notare sin dal principio di questo <sup>(2)</sup>.

Per mettere meglio in evidenza il carattere di questa variazione è stata tracciata la fig. 2, dove tutte le misure fatte attorno al bordo solare in Arcetri, negli anni segnati, sono riportate su di uno stesso quadrante. Si vede che nel 1922, in epoca di minimo dell'attività solare, l'altezza fu massima

(1) Presentata nella seduta del 21 febbraio 1932.

(2) Questi « Rendiconti », serie 6<sup>a</sup>, vol. III, p. 140 (1926),

ai poli e minima all'equatore; nel 1926, in epoca di massimo di attività, l'altezza della cromosfera aumentò notevolmente essendo pressochè costante

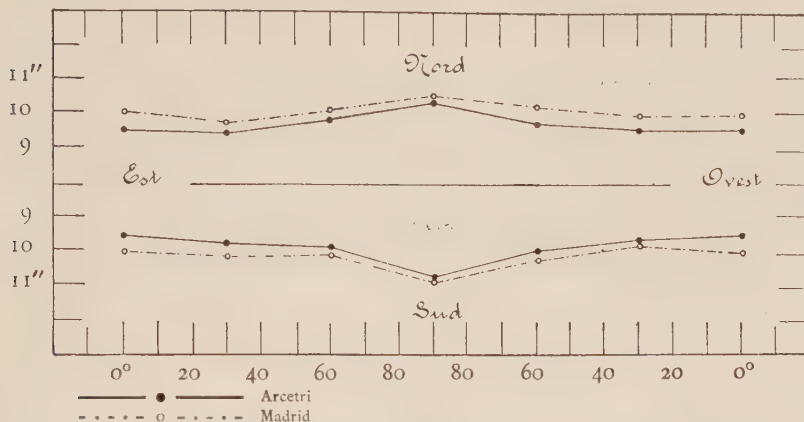


Fig. 1. - Altezza della cromosfera nel 1931.

a tutte le latitudini; nel 1929, rimanendo sempre quasi costante a tutte le latitudini, cominciò a diminuire, e nel 1931, avvicinandosi nuovamente l'epoca

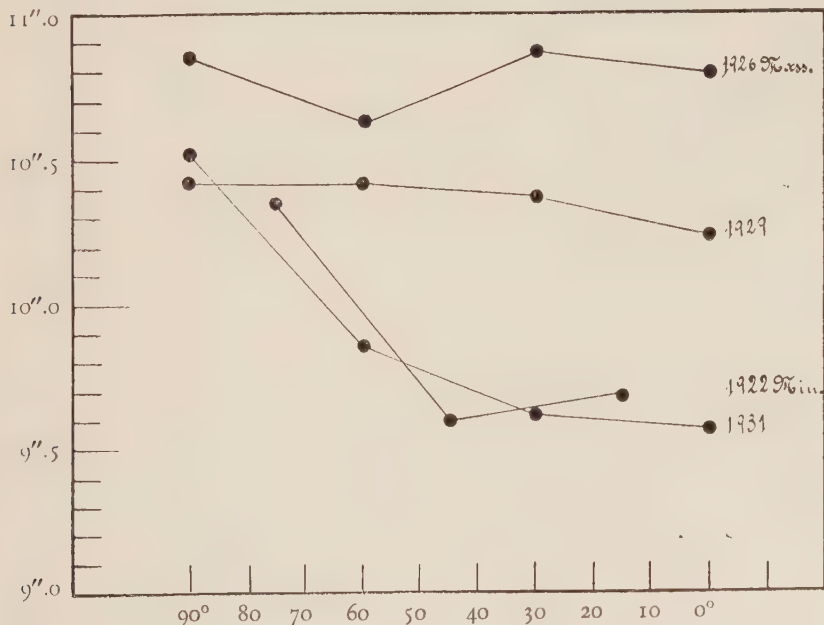


Fig. 2. - Altezza della cromosfera osservata in Arcetri negli anni 1922-26-29-31 e riferita ad un quadrante del bordo solare.

del minimo, l'altezza, diminuita considerevolmente, tornò ad essere più alta ai poli e più bassa all'equatore. Le osservazioni degli anni prossimi e del

ciclo futuro diranno se, come sembra, queste variazioni si ripetono regolarmente, indicando possibili e probabili variazioni di temperatura e di pressione ai poli e all'equatore del Sole, in relazione con le correnti che si osservano per le protuberanze e per le macchie, dirette verso l'equatore, o verso i poli.

Quanto al progredire del ciclo, è risultato dalle osservazioni di Arcetri, Catania, Madrid, Zurigo, che l'area totale delle protuberanze, misurata in unità di protuberanze, è diminuita, dal 1930 al 1931, di 68 unità <sup>(1)</sup>, mentre dal 1929 al 1930 era diminuita di 291 unità. Nel 1931 il massimo di frequenza delle protuberanze si è presentato per ambedue gli emisferi a 45° di latitudine, ciò che dovrebbe essere indice dell'inizio del nuovo ciclo.

**Chimica.** — *La crioscopia ed il peso molecolare dei polimeri dei carboidrati.* Nota <sup>(2)</sup> del Socio E. PATERNÒ.

Da quando basandosi sulle esperienze di Raoult e sulle geniali considerazioni di van t'Hoff, Paternò insieme a Nasini, e poi da solo o con altri collaboratori, aveva provato come nell'abbassamento del punto di congelamento prodotto nell'acqua od in altri solventi, poteva fondarsi un processo assai facile e pratico per la determinazione del peso molecolare delle sostanze non volatili, o che si scomponevano col calore, da molti fu creduto di potere applicare il processo alla determinazione del peso molecolare degli albuminoidi e dei corpi analoghi non suscettibili di dialisi. E, non ostante le esperienze di Paternò e Nasini con la gelatina e l'albumina, e la pubblicazione del 1889 di Paternò che distinse per il primo le soluzioni vere da quelle delle sostanze non dializzabili (colloidi) e la conferenza da esso fatta al Congresso degli Scienziati di Firenze il 18 ottobre 1908 e riprodotta nella « Gazzetta Chimica », t. XLIX, pp. 11, 381; nonchè la conferenza fatta alla Società Chimica di Milano (vedi « Rev. Scientif. », 20 agosto 1910), molti non hanno creduto di desistere da queste oziose esperienze e la letteratura chimica della cellulosa è ricca di dati e più di tutto di considerazioni senza valore. E si pervenne sino al punto che un chimico di indiscusso valore, per spiegare che il glicogeno in soluzione acquosa non esercita più una sensibile pressione osmotica, negava l'esistenza di molecole nel senso ordinario della parola dicendo che per le sostanze che non diffondono attra-

(1) Cfr. « Pubblicazioni R. Osservatorio di Arcetri », fasc. 50 (1932), (in corso di stampa).

(2) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

verso la membrana, non è più possibile parlare di un peso molecolare di una determinata grandezza.

Non faremo la storia di questo argomento e di queste aberrazioni che non hanno interesse per noi, ma a prova della insistenza di taluni esporremo qualche recente fatto di tentativi di determinazioni crioscopiche del peso molecolare di derivati della cellulosa, per mettere in grado i giovani di non ripetere simili tentativi.

Uno degli ultimi fatti è quello di Pictet (« Helvetica Acta », 1926, fasc. I, p. 23) che si è occupato della crioscopia dell'amido solubile ottenuto col processo di Lulkowski. Egli, pure avendo notato che si formano tri e tetra-essane, attribuisce all'amido solubile la formula assurda  $(C_6H_{10}O_5)_4$ .

Syniewski (« Bull. », II, t. 38, p. 904) deduce per l'amiloide la formula strabiliante  $C_{216}H_{372}O_{186}$ ; e non citeremo altri esempi.

Andare in cerca del peso molecolare della cellulosa, dell'amido e delle sostanze proteiche per mezzo della crioscopia, secondo noi, ha lo stesso valore che, fondandosi sulle leggi di diffusione dei gas, le quali pure hanno permesso la determinazione del peso molecolare dell'ozono, ci si volesse sbizzarrire ad applicare il processo per determinare il peso molecolare del pulviscolo atmosferico o di altre sostanze sospese in un gas.

Il recente poderoso lavoro di Hess e Schutze (« Ann. », t. 448, p. 99) non ci sembra che porti alcuno sprazzo di luce sull'argomento, e l'esame dei bizzarri diagrammi lascia dei dubbi sul valore dei risultati ottenuti.

Prendiamo questa occasione per dire che abbiamo fatto delle esperienze crioscopiche con l'acetilcellulosa della Ditta Bayer. E col prodotto disseccato a 105° sino a peso costante, abbiamo avuto con soluzioni e concentrazioni crescenti in acido acetico:

#### t. congelamento

15°.85

15°.80

15°.78.

Abbiamo pure sperimentato con la soluzione in veratrolo (p. cong. 15°.6) ottenendo, alla concentrazione:

solvente	gr. 6.76
acetilcellulosa	1.00,

un punto di congelamento di 15°.4. L'acetilcellulosa perciò non è solubile nè in acido acetico nè in veratrolo, il quale la gelatinizza stupendamente, come fa anche con la nitrocellulosa, dando un gelo solubile in alcool.

**Chimica.** — *La cellulosa nel reattivo di Schweitzer.* Nota <sup>(1)</sup>  
del Socio E. PATERNO.

È ormai riconosciuto che la cellulosa non si scioglie puramente e semplicemente nella soluzione cupro-ammoniacale, e tanto meno che sia rigenerata per precipitazione con gli acidi. Si forma invece una soluzione colloidale, dovuta forse ad una trasformazione che non è idrolisi, ma che muta parzialmente la cellulosa in un corpo che resta egualmente disciolto allo stato colloidale. Il prodotto, che si rigenera per l'azione degli acidi, ha secondo le nostre esperienze la stessa costituzione della seta viscosa, con la differenza probabile che la parte solubile in soda sia proporzionalmente inferiore, e che la possibilità di ottenere il filo a titolo più basso con migliori caratteristiche, sia in gran parte dovuto alle minori proporzioni di questo prodotto secondario.

Nai nostri studi ci siamo assicurati che l'ossicellulosa delle varie provenienze si scioglie benissimo nella soluzione di Schweitzer. Che la cellulosa col liquido cupro-ammoniacale subisce una specie di peptonizzazione era stato indicato da Baur <sup>(2)</sup>.

Ma la parte più interessante dei nostri studi consiste nell'aver trovato un processo per preparare direttamente la soluzione di cellulosa nel liquido cupro-ammoniacale eliminando la noiosa anticipata preparazione del liquido di Schweitzer, metodo che rende possibile di ottenere subito una soluzione concentrata e che presenta numerosi vantaggi, forse anche dal punto di vista economico.

La cellulosa di fabbrica macinata, o il cotone, si fa digerire con soluzione al 10 % di acetato di rame (gr. 5 o gr. 10). Si aggiunge carbonato sodico sino a reazione alcalina. Dopo un tempo conveniente (24 ore) si filtra e si lava. La sostanza lavata, di colore verdastro, contiene ancora la fibra della cellulosa inalterata. Essa si scioglie con la maggiore facilità ed in notevole proporzione in ammoniaca acquosa concentrata, tanto che la soluzione per aggiunta di un acido si rapprende in massa gelatinosa; però in questo caso il precipitato perde la forma fibrosa.

La soluzione cupro-ammoniacale di cellulosa così preparata può contenere maggiore quantità di cellulosa che non le soluzioni ottenute coi pro-

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

(2) BAUR, «Kolloid. Zeit.», 1925, t. 36, p. 25.



cessi comuni, e in condizioni di viscosità tali, da non potersi agitare facilmente con una bacchetta di vetro.

L'ossicellulosa sottoposta a questo trattamento si comporta in modo perfettamente simile, ma è molto meno vischiosa, tanto che sarà facile, preparando separatamente le due soluzioni, ottenere un miscuglio che abbia immediatamente la viscosità desiderata e più conveniente per la filatura.

Questo processo deve brevettarsi.

**Chimica.** — *Cellodestrina, amiloide e pentosani.* Nota <sup>(1)</sup> di E. PATERNO.

Dagli studi compiuti al laboratorio di ricerche della « Châtillon » possono trarsi non poche cognizioni utili sulla cellulosa e sulle trasformazioni che subisce sino alla formazione della seta artificiale.

Prima di tutto ci sembra demolito il castello delle varie idrocellulose, idralcellulose, celloxana e via dicendo, e resta oziosa ogni discussione sulla loro identità o meno. Si tratta di miscugli nei quali predomina la cellulosa e che contengono maggiore o minore proporzione di ossicellulosa.

In secondo luogo, ci sembra ormai chiarito che la sodio-cellulosa non è un composto chimico nè toпочimico, e nemmeno un composto labile e facilmente idrolizzabile come gli alcoolati alcalini, ma un prodotto di adsorbimento della soda per parte della cellulosa, contenente anche dei prodotti di alterazione di questa.

In terzo luogo, ci sembra chiarito che nell'azione dei reattivi sulla cellulosa debbono distinguersi due stadi diversi. In un primo stadio, si formano composti che sono prodotti di parziale depolimerizzazione della cellulosa, della natura di quelli che sono stati chiamati cellodestrina e amiloide, o di ossidazione, come l'ossicellulosa, che sono dei polisaccaridi polimerizzati e dotati di spiccate proprietà colloidali. Nel secondo stadio ha luogo l'idrolisi della cellulosa che conduce come prodotto finale al glucosio, ma che in determinate condizioni può dare luogo a derivati del cellobiosio, del tetrosio, che sono composti non più colloidali, ma in gran parte cristallini e veramente solubili in acqua, acido acetico ecc. e dei quali molti sono stati studiati con cura e ben definiti nelle loro proprietà fisiche e chimiche.

Lo stesso però non può dirsi intorno alla destrina ed all'amiloide. Della cellodestrina è stato anche descritto il metodo di preparazione, ma, esaminando bene la cosa, non è indicato nemmeno un carattere che serva ad iden-

(1) Presentata come plico suggellato nella seduta del 7 novembre 1926.

tificarla. Dell'amiloide, di cui secondo taluni è composta anche la carta pergamena, non è indicato che la produzione, specialmente nella limitata azione dell'acido solforico sulla cellulosa, ed una sola caratteristica, cioè quella di essere colorata dallo iodio. Ma nessuno ha ottenuto o descritto un composto che presenti i caratteri di specie chimica. Le reazioni colorate svelano la presenza di un corpo, ma non caratterizzano il corpo che la reazione presenta. I ricordi della scoperta del tiofene nel benzolo debbono servire di esempio. La reazione del furfurolo col fuscello di abete intinto di acido cloridrico, e mille altre di queste reazioni sono conosciute. Il fatto che la carta pergamena è colorata dal iodio non indica già che essa sia un amiloide, ma deve spiegarsi nel senso che la carta immersa in acido solforico dà luogo alla formazione di piccole quantità di una sostanza amidacea che, incorporandosi alla cellulosa, le comunica le note proprietà di resistenza e di consistenza. Niente più e niente meno.

Sulla carta pergamena abbiamo fatto qualche esperienza determinando la composizione di una carta pergamena preparata da una carta da filtro svedese, ed abbiamo ottenuto:

Umidità del prodotto seccato all'aria . . .	15.00 %	sul secco
Ceneri . . . . .	0.68	» »
Emicellulosa . . . . .	6.21	» »
$\beta$ -cellulosa . . . . .	3.70	» »
N° di Rame . . . . .	1.26	» »

Su questo argomento sono degne di nota le ricerche di Caille (« Ind. et Chim. », 1925, p. 11) e gli studi di Semee e Matula (« Kolloid. Chem. Zeit. », 1919, p. 11) che hanno studiato la degradazione della cellulosa per azione dell'acido solforico a concentrazione variabile dal 50-85 % e dell'acido fosforico dal 75 all'83 % ed a temperature da 50° a 70° ed hanno seguito l'andamento della reazione, determinando la viscosità, la parte solubile in acqua, quella precipitata con alcool, e la variazione del colore prodotta dallo jodio, che varia col tempo dal bleu al violetto e al violetto bruno, e che sparisce col tempo. Ciò prova che prima si forma una sostanza amiloide, poi una della natura della destrina, e poscia avviene l'idrolisi. Ma queste esperienze provano soltanto l'esistenza e la formazione transitoria di questi composti, come col fenomeno di Thyndall e nelle esperienze di Spring si riconosce che nell'aria sono in sospensione dei germi o dei corpuscoli, e nelle esperienze di Spring che le soluzioni, anche molte volte filtrate, conservano della materia in sospensione. Noi crediamo adunque di potere concludere che è stata osservata la formazione di amiloide, ma non è stato preparato questo, e che per la cellodestrina può avverarsi che essa non sia altro che ossicellulosa. Certamente un lavoro importante è anche

quello di Ost (« Ann. », t. 198, p. 315, 1903) il quale insieme a Mühlmeister ha studiato la solfolisi della cellulosa ottenendo dei prodotti di forma solida.

Sciogliendo gr. 30 di cellulosa in cc. 300 di acido solforico al 70% e dopo due ore versando in acqua, si ottengono, dicono gli autori, gr. 5.4 di amiloide. Lo stesso miscuglio, dopo 20 ore, non precipita più con acqua, ma, per aggiunta di alcool, dà un precipitato che pesa gr. 3.1, dal quale si ottiene il 60% di destrina. Non neghiamo i fatti, ma l'affermare che i due precipitati siano amiloide e destrina ci sembra fantastico, ed in contraddizione con l'affermazione successiva che da 10 gr. di cellulosa e 320 cc. di acido solforico dopo 24 ore si ha un precipitato di gr. 13.8 di destrina insolubile, e con l'altra che la destrina coll'acido solforico al 6% si trasforma quantitativamente in glucosio, mentre l'amiloide ha per questo scopo bisogno di un secondo trattamento con acido solforico concentrato.

Noi escludiamo nel modo più reciso che sia stato ottenuto allo stato isolato l'amiloide, mentre non crediamo del tutto improbabile la esistenza della cellodestrina, finora però non ottenuta se non mischiata all'ossicellulosa.

Per quanto riguarda i pentosani (xilano, ecc.) essi sono corpi ben caratterizzati, se non altro, per il fatto dei loro prodotti di idrolisi e della loro netta trasformazione in furfurolo, come sono caratterizzati i metilpentosani ed i loro prodotti di scomposizione e di idrolisi.

Però resta a chiarire un importante punto, ed è quello della trasformazione della cellulosa in pentosano (xilano).

Abbiamo tentato di sciogliere questo dubbio determinando il pentosano in una cellulosa, e poscia nei suoi prodotti di trasformazione, sodio-cellulosa, xantogenato, viscosa e seta, e direttamente sottoponendo la sodio-cellulosa all'azione dell'ossigeno e determinando il pentosano prima e dopo. Ecco i primi risultati ottenuti:

Alcalicellulosa	prima del trattamento	. . . .	tracce
»	dopo 3 ore a 100°	. . . .	0.06 %
»	» 6 » » 100°	. . . .	0.14
»	» 24 » » 100°	. . . .	0.23
»	» 6 » » 60°	. . . .	0.02
»	» 9 » » 60°	. . . .	0.03
»	» 24 » » 60°	. . . .	0.14

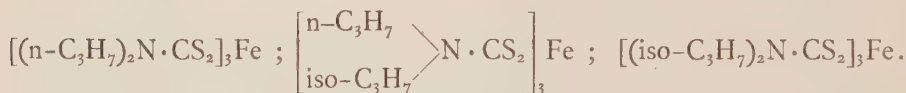
Da questi risultati si deduce che la cellulosa si trasforma in pentosano attraverso la formazione dell'« ossicellulosa ».

**Chimica.** — *Sul comportamento magnetico dei complessi.* —  
IV. *N, N-Dipropil-ditiocarbammati ferrici*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> del Corrisp.  
L. CAMBI, di L. SZEGÖ e di A. CAGNASSO.

Abbiamo già illustrato il comportamento chimico e magnetico di una vasta serie di ditiocarbammati ferrici, anche in confronto di sali analoghi del ferro e degli altri metalli della 1<sup>a</sup> serie di transizione, e rimandiamo alle nostre precedenti pubblicazioni<sup>(3)</sup>.

Due questioni di maggiore interesse sorgevano dalle ricerche su citate: 1° la stretta relazione fra comportamento magnetico e l'intima struttura del radicale acido, relazione non osservata con tale imponenza in nessun altro caso finora noto; 2° la probabilità che il comportamento magnetico di questi sali fosse dipendente dalla temperatura con una funzione assai più complessa di quelle semplici volute dalle leggi di Curie e di Curie-Weiss.

Per l'importanza teorica generale di tali questioni ci accingemmo ad un esame sistematico e completo di nuove serie di sali. Riferiamo ora i risultati conseguiti con i tre dipropil-ditiocarbammati:



Detti sali vennero preparati con un nuovo metodo, assai più semplice di quelli già da noi usati in precedenza, facemmo cioè reagire l'ammina su idrato ferrico parzialmente essiccato e di fresco precipitato, in presenza di solfuro di carbonio.

Si effettua in modo praticamente quantitativo il processo:



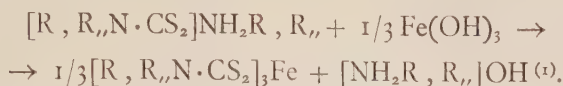
Lo stesso insieme di reazioni attuammo in alcuni casi facendo agire l'idrato ferrico sul ditiocarbammato dell'ammonio disostituito in presenza di

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 21 febbraio 1932.

(3) L. CAMBI e A. CAGNASSO, questi « Rendic. », 6<sup>a</sup> serie, XIII, p. 254 (1931); id., p. 809; L. CAMBI e L. SZEGÖ, « Berichte », 64, p. 2591 (1931).

solfuro di carbonio: evidentemente qui interviene in un primo tempo la reazione di spostamento che in realtà pure verificammo:



Delle tre dipropil-ammine impiegate la  $n-C_3H_7 \cdot NH \cdot iso-C_3H_7$  non era stata finora isolata<sup>(2)</sup>, e venne da noi caratterizzata mediante le sue costanti fisiche e confrontando le tre  $N, N$ -Dipropil- $N'$ -feniluree.

L'esame del comportamento magnetico ha fornito risultati analoghi a quelli già descritti da L. Cambi e L. Szegő<sup>(3)</sup> per i derivati  $N, N$ -Di- $n$ -butilico e  $N, N$ -Di-isobutilico: la struttura dei radicali alchilici isomeri induce una notevolissima differenza nella suscettibilità magnetica: il fatto appare ormai generale.

Analogamente a quanto verificammo nei derivati di- $n$ -butilici, l'ammino-gruppo recante il radicale alchilico a catena ramificata offre la più bassa suscettibilità, ad es. a  $15^\circ C$ :

	$\chi_A \times 10^6$	P
$N, N$ -Di- $n$ -propil-ditiocarbammati $(C_6H_{14}N \cdot CS_2)_3Fe$ . .	+ 8776	22.5
$N, N$ -Di-isopropil-ditiocarbammati $(C_6H_{14}N \cdot CS_2)_3Fe$ . .	+ 2710	12.5
$N, N$ -propil-isopropil-ditiocarbammati $(C_6H_{14}N \cdot CS_2)_3Fe$ .	+ 7200	20.4
$N, N$ -Di- $n$ -butil-ditiocarbammati $(C_8H_{18}N \cdot CS_2)_3Fe$ . . .	+ 12732	27.1
$N, N$ -Di-isobutil-ditiocarbammati $(C_8H_{18}N \cdot CS_2)_3Fe$ . . .	+ 3682	14.6

Non meno interessante è stato il risultato delle misure magnetiche a diverse temperature. Operammo una serie di determinazioni a  $350^\circ K$  ( $+ 77^\circ C$ );  $290^\circ K$  ( $+ 17^\circ C$ );  $194^\circ K$  ( $- 79^\circ C$ );  $84^\circ K$  ( $- 189^\circ C$ ).

(1) Queste reazioni illustrano la grande tendenza e la notevole stabilità dei ditiotali di cui ci occupiamo.

Il metodo dell'impiego diretto dell'ammina, senza passare attraverso i ditiocarbammati alcalini, ci è stato prezioso per la possibilità di operare con piccole quantità di reagenti, con rese elevate ed elevata purezza dei sali ottenuti.

(2) Sono stati descritti soltanto alcuni sali di questa ammina. Vedi REIS, « Zeitschr. f. Krist. », 36, p. 341; LE BEL, « C. R. », 125, p. 352.

(3) « Berichte », loc. cit.



Notammo anzitutto che in nessuno dei tre casi studiati la suscettibilità segue la legge di Curie-Weiss  $\chi_A \cdot (T - \theta) = \text{cost.}$  Poi, che la stessa suscettibilità rispetto alla temperatura ha un andamento distinto, proprio dei tre sali isomeri considerati.

Dai risultati riferiti nel diagramma che riporta i valori  $1/\chi_A$  rispetto alla temperatura nessuno dei tre casi presenta l'andamento rettilineo voluto dall'equazione predetta. E cioè, mentre alle basse temperature il di-isopropil-derivato manifesta un accrescimento della suscettibilità atomica col decrescere della temperatura, negli altri due isomeri, nello stesso campo, si nota il fatto inverso. Alle temperature più elevate lo stesso derivato di-isopropilico presenta l'andamento inverso, anomalo.

Il comportamento dei nostri sali richiama i risultati di Honda e Ishiwara<sup>(1)</sup> sull'ossido di rame e gli alogenuri rameici, e quelli più recenti di Klemm<sup>(2)</sup> sugli stessi composti cuprici. Nel passaggio da sali di rame aventi reticolo ionico a quelli con legami omeopolari si nota appunto tale inversione dell'andamento della suscettibilità con la temperatura.

Se nel caso cui accenniamo la spiegazione del fenomeno appare relativamente semplice, nel nostro si presenta assai più complessa, poichè si verifica per sali analoghi egualmente non ionizzati, e in dipendenza dalla semplice isomeria dei radicali alchilici dell'anione ditiocarbammico.

Allo stato attuale delle nostre ricerche, nell'escludere anche per i nostri sali la validità della legge di Curie-Weiss, si è portati ad ammettere in questi come probabile un passaggio graduale degli elettroni dallo stato quantico corrispondente all'ione ferrico (con 5 magnetoni Bohr) a quello che corrisponderebbe ai complessi ferrici (con un magnetone Bohr), in relazione alla temperatura.

Abbiamo per confronto ripetute le misure di Ishiwara<sup>(3)</sup> sul ferricianuro potassico e le confermiamo nello stesso campo di temperature.

Riportiamo nel diagramma anche i dati noti di Osterhuis e Onnes<sup>(4)</sup> sull'allume ferrico ammonico, sale che segue esattamente la legge semplice di Curie.

Ritourneremo prossimamente sull'argomento in base alle ulteriori ricerche in corso.

## PARTE SPERIMENTALE.

1. *Ammine di-propiliche.* — Impiegammo la diammina normale pura del commercio, che rettificammo. La di-isopropilammina venne da noi prepa-

(1) T. ISHIWARA, «Sc. Rep. Tôhoku Univ.», 3, p. 303 (1914); K. HONDA e T. ISHIWARA, «Sc. Rep. Tôhoku Univ.», 4, p. 213 (1915).

(2) KLEMM, «Zeitschr. f. anorg. Chem.», 203, p. 104 (1931).

(3) «Sc. Rep. Tôhoku Univ.», 3, p. 103 (1914).

(4) «Proc. Roy. Acc. Sc. Amsterdam», 15, p. 322 (1912).

rata con i metodi noti. La diammina mista, normale ed isopropilica, venne preparata tanto partendo dalla monoammina normale ed ioduro isopropilico, quanto dalla isopropilammina e bromuro propilico normale; il prodotto ottenuto per le due vie era identico, ed identici ne risultarono i derivati che descriviamo.

L'ammina mista non era nota e per la sua esatta identificazione riportiamo qui sotto le costanti fisiche da noi repertate:

	P. E. <sub>760</sub>	D <sub>4</sub> <sup>12</sup>
Di-n-propilammina	110°.4	0.741
Di-isopropilammina	84°	0.722
n-propil-isopropilammina	95°	0.736.

2. *N, N-dipropil-N'-feniluree*. — Per più netta identificazione della nuova ammina preparammo le tre dipropil-feniluree, facendo reagire rispettivamente le tre ammine in etere assoluto con fenilisocianato.

$(n-C_3H_7)_2N \cdot CO \cdot NHC_6H_5$ . — Venne purificata per cristallizzazione da miscela di benzolo ed etere di petrolio, aghi lucenti, p. f. 74°.

N (Dumas)	trovato	12.80	calcolato	12.72.
-----------	---------	-------	-----------	--------

$(iso-C_3H_7)_2N \cdot CO \cdot NHC_6H_5$ . — Purificata analogamente, aghi minutissimi, p. f. 121°.

N (Dumas)	trovato	12.81	calcolato	12.72.
-----------	---------	-------	-----------	--------

$n-C_3H_7(iso-C_3H_7)N \cdot CO \cdot NHC_6H_5$ . — Purificata per cristallizzazione dall'etere di petrolio, prismi duri, p. f. 58°.

N (Dumas)	trovato	12.68	calcolato	12.72.
-----------	---------	-------	-----------	--------

3. *N, N-dipropil-ditiocarbammati ferrici*. — Vennero preparati dibattendo a freddo in vaso chiuso idrato ferrico in eccesso, diammina diluita con egual volume di alcool assoluto, aggiungendo di poi solfuro di carbonio in rapporto equimolecolare alla diammina. La reazione è completa in dodici ore.

Il ditiocarbammato venne estratto con cloroformio. La soluzione cloroformica evaporata nel vuoto a freddo, il sale residuo venne purificato per cristallizzazione in miscela di cloroformio ed etere di petrolio.

$[(n-C_3H_7)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . — Cristalli in scaglie nere lucenti, molto solubili in tutti i solventi a bassa costante dielettrica con colore rosso-bruno, stabile fino a 80° anche all'aria.

All'analisi risulta:

	Fe	N (Dumas)	S
calcolato	9.55	7.19	32.92
trovato	9.62	7.24	33.10

$[n-C_3H_7(iso-C_3H_7)N \cdot CS_2]_3Fe$ . — Polvere cristallina nera con riflessi rossastri con solubilità e proprietà analoghe al precedente sale.

Analisi:

	Fe	N (Dumas)	S
calcolato	9.55	7.19	32.92
trovato	9.65	7.17	32.89.

$[(iso-C_3H_7)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . — Minute scaglie nero-lucenti con solubilità e comportamento analogo ai precedenti. Le soluzioni hanno colore più spiccato verso il rosso-aranciato, rispetto a quelle dei sali predetti.

Analisi:

	Fe	N (Dumas)	S
calcolato	9.55	7.19	32.92
trovato	9.38	7.26	33.05.

4. *Misure magnetiche.* — Le misure della suscettibilità magnetica dei sali solidi vennero eseguite col metodo della pesata <sup>(1)</sup>. Usammo per le determinazioni del valore assoluto della suscettibilità un intraferro di 13 mm. corrispondente ad un campo magnetico di ca. 20.000 gauss.

Le variazioni di peso delle sostanze vennero confrontate con quella ottenuta con acqua ( $\chi(20^\circ) = -0.720 \cdot 10^{-6}$ ).

Per la determinazione della suscettibilità a diverse temperature è stato usato un intraferro di 40 mm. Il tubo contenente la sostanza si trovava nel centro di una provetta che a sua volta era immersa nel bagno frigorifero (aria liquida, anidride carbonica solida + acetone). Le temperature vennero misurate con 3 termocoppie di rame-costantina. Per le misure a temperatura elevata usammo una doppia camicia entro cui circolava vapore di benzolo. Misurando la temperatura nella stessa posizione in cui nell'esperienza si viene a trovare il tubo contenente la sostanza abbiamo cercato di eliminare le possibilità di errori.

Per controllo abbiamo determinato la suscettibilità del sale di Mohr che è risultata corrispondente a quella data da Jackson <sup>(2)</sup>.

(1) Gouy, « C. R. », 109, p. 935 (1889).

(2) « Phil. Trans. Roy. Soc. London A. », 224, p. 1 (1923).

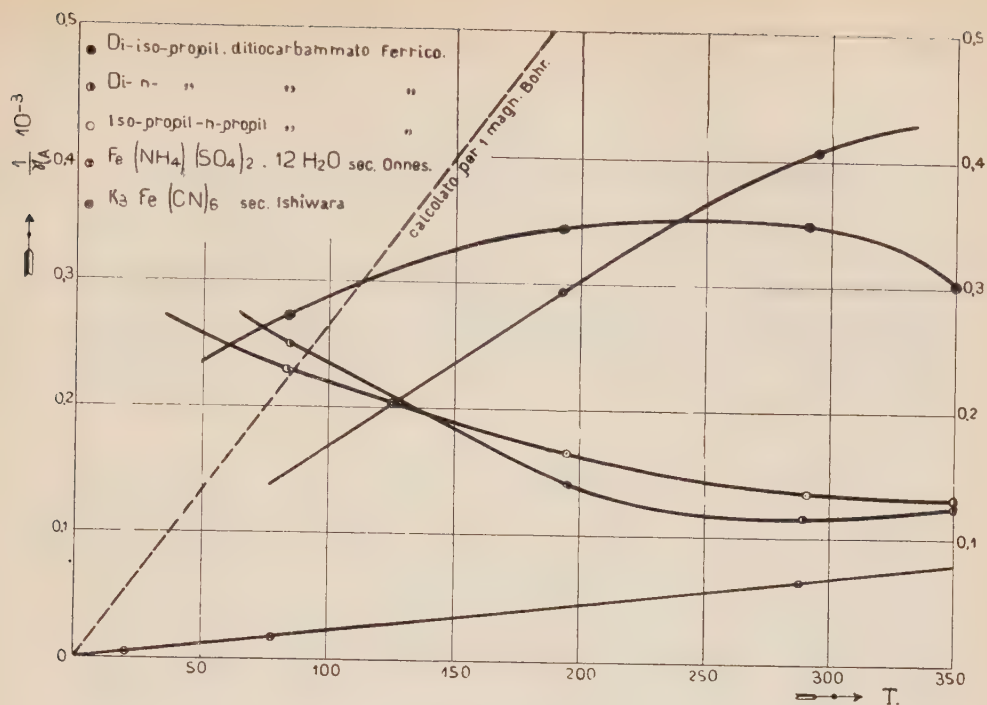


TABELLA.

Ditiocarbammati		t°C.	$\chi \cdot 10^6$	$\chi_M \cdot 10^6$
N, N-di-n-propil	(C <sub>6</sub> H <sub>14</sub> ·NCS <sub>2</sub> ) <sub>3</sub> Fe . . . . .	+ 77°	14.15	8140
		+ 18°	14.90	8550
		— 78°	12.15	7045
		— 189°	6.49	3930
N, N-di-iso-propil	(C <sub>6</sub> H <sub>14</sub> ·CNS <sub>2</sub> ) <sub>3</sub> Fe . . . . .	+ 77°	5.32	3286
		+ 18°	4.57	2876
		— 78°	4.58	2884
		— 189°	5.92	3619
N, N-n-propil-iso-propil	(C <sub>6</sub> H <sub>14</sub> ·CNS <sub>2</sub> ) <sub>3</sub> Fe . . . . .	+ 77°	13.18	7610
		+ 18°	12.60	7290
		— 78°	10.15	5947
		— 189°	7.26	4352

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi.* — I. *Problemi variazionali.* Nota di G. ANDREOLI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In relazione ad alcune recenti Note lincee del dott. Barba ho redatto due Memorie [in corso di stampa negli « Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa »<sup>(2)</sup>] nelle quali è sviluppato in modo completo la geometria dei trasporti, sia di fasci, che di punteggiate, su una  $V_2$ , ricovrendo, così, la  $V_2$  stessa di riferimenti di fasci e di punteggiate e completando l'estensione che il parallelismo arrecava alla geometria delle  $V_2$ . Ho, ivi, evitato qualunque sviluppo analitico, pur accennando alle possibilità di impostazioni analitiche diverse da quelle abituali del C. D. A.

In questa breve Nota mi propongo, fra l'altro, precisamente, di delineare uno di tali aspetti, e cioè quello variazionale, degli sviluppi geometrici di cui sopra.

Ma la loro parte sostanziale consiste nel mostrare che ad ogni  $V_2$  munita di metrica lineare e di metrica tangenziale (cioè di metrica angolare, opportunamente riferita ad altri elementi) corrisponde per reciprocità un'altra  $V_2$  che abbia, come metrica lineare, quella tangenziale della prima, e come tangenziale la lineare della data.

Le due varietà formano così una *coppia reciproca*, corrispondendosi punti dell'una a geodetiche dell'altra.

Ove poi si completi la  $V_2$  munendola di parallelismo e di metrisimo, la sua reciproca  $V_2^*$  risulterà completata anch'essa appunto in modo reciproco (il parallelismo dell'una fissa il metrisimo dell'altra).

Esempio tipico risulta la sfera unitaria, reciproca a sè stessa.

Si osservi che, per avere un assetto completo non basta considerare la  $V_2$  a metrica data da una forma quadratica definita, ma occorre altresì considerare quelle con forma quadratica indefinita. E quindi, sostanzialmente, non le sole  $V_2$  immerse in spazi lineari euclidei, ma occorre considerare

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) Dai titoli: G. ANDREOLI, *Parallelismi ecc. in una  $V_2$* , « Ann. Sc. N. Pisa », 1932; ID., *Geometria completa dei trasporti ecc.* « Ann. Sc. N. Pisa », 1933.



anche quelle immerse in spazi lineari di tipo lorentziano, nei quali, l'assoluto si ha definito da

$$\sum_1^n x_i^2 - \sum_{n+1}^{n+m} x_i^2 = 0.$$

2. Sia assegnata in una  $V_2$  una metrica riemanniana definita da

$$ds^2 = \sum a_{rs} dx_r dx_s.$$

Il problema (I) della ricerca delle geodetiche si riconduce a quello delle estremali di

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \sqrt{\sum a_{rs} dx_r dx_s},$$

estremali che scriveremo sotto la forma

$$\varphi(x, y, u, v) = 0;$$

ove la funzione  $\varphi$  è tale che per punti  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  sufficientemente vicini, il sistema

$$\begin{cases} \varphi(x_0, y_0; u, v) = 0 \\ \varphi(x_1, y_1; u, v) = 0 \end{cases}$$

permetta di determinare, in modo univoco  $u$  e  $v$ .

S'intende bene che, ove occorra, al posto di  $u$  e  $v$  si introdurranno tre quantità omogenee atte a definire, ugualmente, la geodetica.

In sostanza, la coppia,  $u, v$  potrà dirsi di *coordinate duali generalizzate*, delle geodetiche nella  $V_2$  [oppure, rispettivamente si parlerà di *terna omogenea di coordinate duali generalizzate*].

3. Se si hanno le due geodetiche  $(u, v)$ ,  $(u + du, v + dv)$  che si potranno dire infinitamente vicine, allora, si cerchi l'espressione dell'angolo formato dalle due geodetiche, supposto che sia definita una regione abbastanza piccola della superficie stessa nella quale le geodetiche si incontrino sicuramente una sola volta. Si troverà come quadrato dell'elemento d'angolo una forma quadratica differenziale in  $da$  e  $db$  che potrà risultare definita, indefinita o addirittura riducibile (1).

Ed in effetti: consideriamo, anzitutto, il piano euclideo.

(1) Si intende bene, che, come l'elemento lineare su una curva è considerato munito di segno e sulla  $V_2$  invece no, anche qui accade lo stesso per l'angolo. In un fascio esso è munito di segno, ma sulla  $V_2$  no; si da prendersi sempre  $|\dot{\alpha}| = +\sqrt{\dot{\alpha}^2}$ .

In esso una qualsiasi retta è posta sotto la forma

$$ux + vy + 1 = 0$$

se non passa per l'origine, ove sia

$$u = (\sin \alpha)/\rho$$

$$v = -(\cos \beta)/\rho$$

con  $\sin \alpha = \cos \beta$  ;  $\cos \beta = \sin \alpha$ .

Si vede, dunque, che essendo  $1/(u^2 + v^2) = \rho^2$ ,  $u/v = -\tan \alpha$  il  $d\alpha$  sarà dato da

$$d\alpha = d\left(\arctg \frac{u}{v}\right) = (u dv - v du)/v^2$$

e quindi

$$d\alpha^2 = (u dv - v du)^2/v^2;$$

trovandosi così la forma quadratica riducibile.

Se invece ci troviamo su una sfera, si potranno assumere senz'altro come coordinate  $u, v$  quelle sferiche del polo del cerchio massimo considerato, ed allora, poichè l'angolo di due cerchi massimi è misurato precisamente dalla distanza dei due poli (se la sfera è di raggio unitario) si trova subito la forma quadratica definita positiva.

Se, infine si ha una pseudo-sfera, si può ripetere, con il solito passaggio attraverso le funzioni iperboliche, il ragionamento fatto nel caso della sfera: salvo che la detta forma potrà anche essere indefinita (poichè l'angolo può non essere reale).

Trovandoci su una superficie qualunque, se nell'intorno del punto di intersezione delle due geodetiche si assimila la superficie stessa rispettivamente ad un piano, una sfera, una pseudo-sfera a seconda della sua curvatura, resta giustificato l'asserto, anche nel caso generale.

4. Sorge allora il problema (II).

Posto:

$$d\alpha = \sqrt{\sum b_{ij} du_i du_j}$$

trovare quali sono gli involuppi che estremizzano l'integrale

$$\int_{(u, v)}^{(u_1, v_1)} \sqrt{\sum b_{ij} du_i du_j}.$$

Come si vede si ha un nuovo tipo di problema variazionale caratterizzato dal fatto che si parte da un ordinario problema variazionale, se ne trovano le estremali dipendenti da certi parametri, e si fissa un II problema variazionale in relazione a questi parametri delle prime estremali.

Nel caso generale, il nuovo tipo di problema variazionale si imposta così:

I. Si estremizzi l'integrale:

$$\int_A^{A_1} \Phi[u, v, du, dv]$$

ove le  $u, v$  sono i parametri arbitrari che compaiono in

$$\varphi(x, y, u, v) = 0$$

che è ottenuta come equazione delle estremali di

$$\int_P^{P_1} F(x, y, dx, dy)$$

e si caratterizzi l'involuppo che le trovate fissano nel piano  $x, y$  attraverso la  $\varphi = 0$ .

(Si intende che  $\Phi$  ed  $F$  saranno omogenee di I grado in  $du, dv$  e rispettivamente in  $dx, dy$ ).

Se si vuol un esempio del problema generale analogo per le equazioni differenziali, si avrà, p. e. il seguente tipo, che è di soluzione immediata, del resto.

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

di cui gli integrali si ottengano sotto la forma:

$$\begin{cases} m(x, y; u, v) = 0 \\ n(x, y; u, v) = 0. \end{cases}$$

Se ora, a lor volta, si determinano le  $u, v$  attraverso le due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{u} = h(u, v) \\ \dot{v} = l(u, v) \end{cases}$$

e gli integrali di queste siano posti sotto la forma

$$\begin{aligned} p(u, v; \alpha, \beta) &= 0 \\ q(u, v; \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned}$$

occorre riconoscere quali curve si ottengono come involuppo risalendo al sistema originario di coordinate  $x, y$ , per valori fissati di  $\alpha$  e  $\beta$ .

Nel caso delle geodetiche, veramente figurano le  $x'', y''$  ed  $x', y'$  al posto di  $x', y'$ ;  $x, y$  ed analogamente per  $u, v$ . Ma ciò è ovviamente senza importanza.

**Matematica.** — *Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche.* Nota di PATRICK DU VAL, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

Le superficie di genere uno di cui vogliamo discorrere sono le superficie regolari con curva canonica d'ordine zero, cioè le superficie di cui tutti i generi e plurigeneri sono uguali all'unità; le quali si possono caratterizzare con le condizioni

$$p_a = P_2 = 1.$$

Le superficie normali di questa famiglia, senza curve eccezionali in un  $S_\pi$ , sono superficie a sezioni—curve canoniche di genere  $\pi$  e d'ordine  $2\pi - 2$ , in uno spazio a  $\pi - 1$  dimensioni. Il grado di un sistema lineare (per esempio sistema di sezioni a mezzo di quadriche) ne determina quindi immediatamente le dimensioni e ci permette di calcolare la postulazione della superficie rispetto alle varietà di ogni ordine (per es. quadriche). Si trova così facilmente che la dimensione di un sistema di quadriche che contenga la superficie è

$$\frac{(p-1)(p-4)}{2},$$

che è anche la dimensione del sistema di quadriche per la curva—sezione canonica di genere  $p$ , ed anche del sistema di quadriche per la curva normale razionale, superficie rigata o luogo  $r$ -dimensionale, generato da una serie  $\infty^1$  razionale di varietà ad  $r - 1$  dimensioni, di ordine  $p - 2$ . Per  $p = 6$  è anche la dimensione del sistema di quadriche per la superficie di Veronese.

Ne segue che le quadriche per la nostra superficie di genere 1 in  $S_p$  tracciano su un  $S_{p-1}$  generale il sistema completo di quadriche per la sezione della superficie, che è una curva canonica di genere  $p$ . Ne deriva che se la superficie non è l'intersezione completa del sistema di quadriche, cioè se ogni quadrica per essa contiene necessariamente una varietà più estesa, lo stesso sarà vero per la sezione iperpiana generale e viceversa.

Ora è noto<sup>(2)</sup> che i soli casi in cui la curva canonica non iperellittica di genere  $p$  non è l'intersezione completa del sistema delle quadriche per essa sono i seguenti:

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla Teoria delle superficie algebriche*, p. 297 sgg.

a) La curva possiede un  $g'_3$ . In questo caso l'intersezione completa delle quadriche è una superficie rigata razionale d'ordine  $p-2$ , su cui giace la curva, e le cui generatrici sono trisecanti, che tracciano su di essa curva la  $g'_3$ . Rappresentiamo la superficie rigata birazionalmente su un piano in tal modo che le sue sezioni iperpiane corrispondano a curve d'ordine  $m$ , le quali passino  $(m-1)$  volte per un punto fissato A, ed eventualmente anche per un punto semplice B, secondo che  $p=2m$  o  $p=2m+1$ ; vediamo che la detta curva canonica di  $S_{p-1}$  può essere rappresentata con una curva d'ordine  $m+3$  dotata di un punto  $m$ -plo in A, ed eventualmente passante anche per B: quindi quella curva risulta definita come sezione residua della superficie di genere 1 con una varietà cubica contenente  $p-4$  generatrici della rigata razionale passante per essa.

b) La curva è di genere 6, ed è birazionalmente equivalente a una quintica piana (cioè ha una serie semi-canonica di dimensione 2). In questo caso l'intersezione completa delle quadriche per essa curva è una superficie di Veronese, e quindi la curva stessa risulta l'intersezione residua della detta superficie con una varietà cubica per una delle sue coniche.

Ora se una superficie di genere 1 ha sezioni iperpiane del tipo a), allora l'intersezione completa delle quadriche per essa è una varietà a tre dimensioni la cui sezione iperpiana è la rigata su cui giace la sezione della superficie; cioè se  $p > 4$  è una varietà a tre dimensioni normale di ordine  $p-2$  generata da una  $\infty^1$  razionale di piani<sup>(1)</sup>. Su questa varietà giace la superficie, la quale ne sega gli  $\infty^1$  piani secondo cubiche. Ma ogni superficie tracciata su tale varietà  $V_3$ , è sempre sezione di  $V_3$ , con una varietà di un certo ordine passante per un certo numero di piani della  $V_3$  stessa. Quindi la nostra superficie risulta definita come intersezione di  $V_3$  con una varietà cubica per  $p-4$  dei suoi piani.

Ora, se proiettiamo la  $V_3$  da uno dei suoi piani, otteniamo una varietà di ordine  $p-5$  in  $S_{p-1}$ ; e la superficie su di essa diventa una superficie le cui sezioni iperpiane sono curve canoniche di genere  $p-3$  sempre evidentemente di tipo a), poichè la superficie contiene un fascio di cubiche ellittiche, giacenti nei piani della varietà. Così per proiezioni successive si riduce la superficie all'intersezione di una quadrica e di una varietà cubica in  $S_4$ , ovvero a una superficie quartica di  $S_3$  o a un piano doppio con una sestica di diramazione, secondo che  $p \equiv 4, 3$  o  $2 \pmod{3}$ . Ma le superficie di genere 1 così ottenute non sono generali del loro tipo.

Vediamolo effettivamente per i diversi casi. Nel primo caso si tratta di una superficie intersezione di una quadrica e di una varietà cubica di  $S_4$ . Ma questa superficie, come quella da cui deriva per proiezione, deve contenere sempre un fascio di cubiche, e perciò la quadrica per essa dovrà essere un cono: ciò che implica appunto una particolarità per la superficie

(1) ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla Teoria geometrica delle equazioni ...*, III, p. 106.



del 6° ordine a sezioni canoniche di  $S_4$ . Nel secondo caso si tratta di una superficie del 4° ordine di  $S_3$ , ma questa deve contenere una retta, asse di un fascio di piani secanti secondo cubiche: e appunto la retta impone una condizione alla superficie del 4° ordine che deve contenerla. Nel terzo caso al fascio di cubiche corrisponde nel piano doppio un sistema di cubiche pluritangenti (in 9 punti di contatto), sistema di indice 2, che dipende quadraticamente da un parametro. Se la cubica generale del sistema si rappresenta con

$$A_3 + 2\lambda H_3 + \lambda'^2 B_3 = 0$$

l'equazione della sestica è

$$(H_3)^2 = A_3 \cdot B_3$$

e i punti di contatto della cubica formano una serie semi-canonica  $g'_9$  di dimensione 1.

Consideriamo adesso la possibilità di esistenza di una superficie la cui sezione iperpiana generale sia di tipo  $b$ ), e che abbia  $p = 6$ . L'intersezione completa del sistema di quadriche per la superficie è evidentemente una varietà a tre dimensioni la cui sezione iperpiana generale è una superficie di Veronese; e su questa giace la superficie stessa. Ora la sola varietà di questo tipo è il cono proiettante la superficie di Veronese da un punto; lo chiameremo il cono di Veronese. Su questo giacciono  $\infty^2$  coni quadrici che proiettano le coniche della superficie di Veronese <sup>(1)</sup>; ed ogni superficie di questo cono è coresiduale con un certo numero di questi coni quadrici e precisamente con tanti quante volte la sua sezione iperpiana generale è coresiduale a coniche sulla sezione del cono di Veronese.

La sezione iperpiana del cono di Veronese è coresiduale con due coni quadrici cosicchè ogni superficie coresiduale con un numero pari è una sezione completa, mentre ogni superficie coresiduale con un numero dispari è residuale rispetto a una sezione completa, di un cono quadrico. In questo ultimo caso la varietà secante passa per il vertice del cono di Veronese e la sezione di questo con la sezione iperpiana ivi tangente si scinde nel cono quadrico residuo e in un altro; così ogni superficie coresiduale con un numero dispari di coni quadrici ha nel vertice un nodo conico semplice, il cono tangente del quale è uno dei coni quadrici del cono di Veronese.

Dato che la curva di tipo  $b$ ) è coresiduale con cinque coniche sulla superficie di Veronese, la superficie che ha tale curva come sezione iperpiana generale è la sezione residuale del cono di Veronese con una varietà cubica per uno dei suoi coni quadrici. Al vertice essa ha un punto conico in cui è toccata da un altro cono quadrico. Ogni generatrice del cono di

(1) ENRIQUES, in « Math. Annalen », XLVI (1898) p. 191.

Veronese incontra la superficie due volte in punti diversi dal vertice; così la proiezione della superficie è una superficie di Veronese doppia; e rappresentando la superficie di Veronese sopra un piano otteniamo un piano doppio la cui curva di diramazione deve naturalmente essere sestica. È facile veder ciò, poichè una retta del piano doppio corrisponde alla traccia della superficie sopra uno dei coni quadrici, che è una quintica di genere 2.

Si noti però che qui non abbiamo la sestica generale come curva di diramazione perchè l'intorno del nodo da cui si proietta la superficie si rappresenta con una conica semplice (non doppia) sulla superficie di Veronese doppia (la conica associata derivante dalla traccia della superficie sul cono tangente, è una quintica razionale che passa tre volte per il vertice). Queste coniche corrispondono a una linea del piano doppio la cui immagine si scinde in due linee semplici, ed è quindi tritangente alla curva di diramazione; il che viene ad imporre a questa una condizione.

Possiamo dunque riassumere i nostri risultati come segue:

*Se una superficie di genere 1, le cui sezioni iperpiane sono curve canoniche non iperellittiche di genere  $p$ , con  $p > 4$ , non è la intersezione completa del sistema di quadriche per essa, allora questa intersezione completa è:*

a) *una varietà tridimensionale normale razionale  $V_{p-2}$  di ordine  $p-2$ , generata da un'infinità semplice di piani, la superficie essendo segata su  $V_{p-2}$  da una varietà cubica per  $p-4$  dei suoi piani;*

b) *oppure per  $p=6$  un cono  $V_4$  che proietta una superficie di Veronese da un punto, la superficie stessa essendo segata su  $V_4$  da una varietà cubica per uno dei coni quadrici che proiettano le coniche della superficie di Veronese.*

*Le nostre superficie particolari di genere 1 sono sempre trasformabili birazionalmente in una delle seguenti:*

a<sub>1</sub>) ( $p \equiv 4, \text{ mod. } 3$ ): *la intersezione di un cono quadrico in uno spazio a quattro dimensioni con una varietà cubica generale; oppure*

a<sub>2</sub>) ( $p \equiv 3, \text{ mod. } 3$ ): *una superficie quartica dello spazio a tre dimensioni sulla quale giace una retta; oppure*

a<sub>3</sub>) ( $p \equiv 2, \text{ mod. } 3$ ): *un piano doppio la cui curva di diramazione è una sestica involuppo di un'infinità di cubiche, di indice 2; o infine*

b) ( $p=6$ ): *un piano doppio la cui curva di diramazione sia una sestica con retta tritangente.*

Ciascuna delle forme tipo  $(a_1, a_2, a_3, b)$  dipende da 18 moduli anzichè da 19 come nel caso delle forme generali di superficie del genere 1. Dunque le superficie le cui sezioni son curve canoniche di genere  $p \equiv 4$  e che non sono intersezioni complete di quadriche appaiono essere caso particolare di quelle che sono intersezioni complete, precisamente come accade per le curve canoniche loro intersezioni iperpiane.

**Matematica.** — *Sul parallelismo di Levi-Civita.* Nota di  
LUISA PELOSI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Sia  $V_n$  una varietà ad  $n$  dimensioni,  $C$  una curva tracciata su essa, descritta da un punto  $P$ , ed  $u$  un vettore unitario *tangenziale* (cioè tangente alla  $V_n$  in  $P$ ); se per uno spostamento  $dP$  di  $P$  sulla curva  $C$  (curva di trasporto) il vettore  $u$  assume un incremento  $du$  *normale alla varietà  $V_n$  in  $P$* , allora si dice che il vettore  $u$  si sposta per *parallelismo* nel senso di Levi-Civita, lungo la curva  $C$ .

Da questa semplicissima definizione, il prof. Boggio <sup>(2)</sup> ha mostrato come si possono dedurre in modo rapidissimo le proprietà fondamentali del parallelismo; fra le altre la seguente (*Geom. diff.* p. 260):

*Se il vettore  $u$ , lungo la curva  $C$ , è già parallelo, nel senso di Levi-Civita, rispetto alla varietà ambiente  $V_n$ , è anche parallelo rispetto ad ogni varietà  $V_m$  passante per  $C$  e appartenente alla  $V_n$ .*

Questo teorema, dovuto al Bianchi <sup>(3)</sup>, è dimostrato da questo autore mediante due lunghe pagine di sviluppi analitici, mentre la dimostrazione del Boggio occupa tre sole righe!

In particolare, se si considera la *superficie geodetica* formata dalle geodetiche di  $V_n$  passanti per  $P$  e tangenti alle rette del fascio determinato dalla retta  $Pu$  e dalla tangente alla curva  $C$  in  $P$  si conclude che se il vettore  $u$  si sposta per parallelismo rispetto alla varietà  $V_n$ , si sposta pure per parallelismo rispetto alla superficie geodetica considerata.

Quest'importante proprietà data dal prof. Severi sin dal 1917 <sup>(4)</sup>, e che dà una definizione geometrica diretta, ed evidentemente intrinseca, del parallelismo di Levi-Civita, è sfuggita ad alcuni autori, come ad es. al prof. Serini, il quale in una Nota recente <sup>(5)</sup>, ritrova lo stesso teorema con calcoli assai complicati.

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) BURGATTI, BOGGIO, BURALI, *Geometria differenziale*, p. 256. (Zanichelli, Bologna, 1930). Nel seguito quest'opera sarà richiamata con *Geom. diff.*

(3) BIANCHI, *Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita nella metrica degli spazi curvi*, § 5, («Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli», serie 3<sup>a</sup>, vol. XXVIII, 1922).

(4) SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, § 11 («Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», t. XLII, 1917).

(5) SERINI, *Deduzione intrinseca del parallelismo del Levi-Civita*, («Rendiconti R. Istituto Lombardo», vol. LXIV, 1931).

Nella stessa Nota il prof. Serini considera dapprima il caso di una superficie  $V_2$  e mostra che se  $P_1$  è un punto di  $V_2$  infinitamente vicino a  $P$ , il vettore  $u_1$  dedotto da  $u$  mediante spostamento per parallelismo di Levi-Civita, si può definire come vettore unitario tangenziale che forma colla geodetica di  $V_2$  passante per  $P$  e  $P_1$  lo stesso angolo che il vettore  $u$  forma colla geodetica considerata.

Questa proprietà, che il prof. Serini dimostra con lunghi calcoli, si può stabilire con tutta facilità in modo diretto, osservando che si ha:

$$(1) \quad u_1 = u + du$$

e che il vettore  $u_1$  deve soddisfare alle condizioni:

$$(2) \quad u_1^2 = 1, \quad u_1 \times t_1 = u \times t,$$

essendo  $t$  e  $t_1$  i versori tangenti in  $P$  e  $P_1$  alla geodetica  $PP_1$ . Sostituendo il valore (1) nelle (2), osservando che  $t_1 = t + dt$  si ha subito (trascurando infinitesimi d'ordine superiore al primo):

$$u \times du = 0, \\ u \times t_1 + du \times t_1 = u \times t, \quad \text{cioè} \quad u \times dt + t \times du = 0;$$

ma per essere la curva  $PP_1$  geodetica, il vettore  $dt$  è normale alla superficie  $V_2$  (*Geom. diff.*, p. 62, o p. 173), quindi rimane  $t \times du = 0$ . Perciò il vettore  $du$  è normale ai vettori non paralleli  $u$  e  $t$ ; ne segue che esso è normale alla superficie  $V_2$  in  $P$ , perciò il vettore  $u_1$  è il trasformato di  $u$  per parallelismo; c. d. d.

Risulta dalla (1) che la proiezione del vettore  $u_1$  sul piano tangente alla  $V_2$  in  $P$  è un vettore parallelo ad  $u$ , perciò ne segue questa semplice costruzione <sup>(1)</sup> per il vettore  $u_1$ : sia  $P'_1$  la proiezione di  $P_1$  sul piano  $\alpha$  tangente in  $P$  alla  $V_2$ , e si conduca per  $P'_1$  la parallela (euclidea) al vettore  $u$  (la quale giacerà su  $\alpha$ ) allora il piano condotto per tale parallela e normale ad  $\alpha$ , taglierà il piano tangente in  $P_1$  alla  $V_2$  secondo la retta  $P_1 u_1$  parallela, nel senso di Levi-Civita, alla retta  $Pu$ .

2. Si possono trattare, con pari semplicità e perspicuità, altre questioni sul parallelismo, ad es. la seguente, considerata da A. Wundheiler e dalla prof. Nalli <sup>(2)</sup>.

(1) Cfr. LEVI-CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 119, Roma, 1925.

(2) NALLI, *Sopra uno spostamento generalizzato negli spazi di Riemann*. (« Rendiconti R. Accademia Lincei », serie 6<sup>a</sup>, vol. IX, 1<sup>o</sup> sem., 1929).

Siano, per una varietà  $V_n$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vettori tangenziali, funzioni dei punti  $P$  della curva di trasporto  $C$ , e tali inoltre da verificare le seguenti condizioni:

- a)* il vettore  $\mathbf{u}$  ha lunghezza costante,
- b)* è costante il prodotto scalare  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ,
- c)* se  $P_1$  è un punto della curva  $C$  infinitamente vicino a  $P$ , il vettore  $\mathbf{u}(P_1)$  appartiene alla giacitura determinata dal vettore  $\mathbf{v}(P_1)$  e da quello che si ottiene trasportando il vettore  $\mathbf{u}$  da  $P$  in  $P_1$  per parallelismo nel senso di Levi-Civita.

Ora, da queste condizioni, si può dedurre che il differenziale superficiale <sup>(1)</sup> del vettore  $\mathbf{u}(P)$  appartiene alla giacitura determinata dalle rette  $P\mathbf{u}$ ,  $P\mathbf{v}$ .

Infatti, le condizioni *a)*, *b)* danno intanto:

$$a) \mathbf{u}^2 = \text{cost}, \quad b) \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \text{cost},$$

e dalla *c)* si trae:

$$c) \mathbf{u}(P_1) = \varepsilon \mathbf{v}(P_1) + (1 + \varepsilon_1) \mathbf{u}_v,$$

ove  $\mathbf{u}_v$  è il vettore  $\mathbf{u}$  spostato per parallelismo, ed  $\varepsilon, \varepsilon_1$  sono quantità infinitesime.

Osservando che se  $d_n \mathbf{u}$  è la componente normale alla varietà  $V_n$  del vettore  $d\mathbf{u}$  si ha (*Geom. diff.*, p. 257):

$$\mathbf{u}_v = \mathbf{u} + d_n \mathbf{u},$$

la (*c)* può scriversi:

$$\mathbf{u} + d\mathbf{u} = \varepsilon(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + (1 + \varepsilon_1)(\mathbf{u} + d_n \mathbf{u}),$$

od ancora, trascurando infinitesimi d'ordine superiore al primo:

$$d\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{v} + d_n \mathbf{u} + \varepsilon_1 \mathbf{u},$$

ma, se  $d_v \mathbf{u}$  è la componente tangenziale di  $d\mathbf{u}$ , si ha  $d\mathbf{u} = d_v \mathbf{u} + d_n \mathbf{u}$ , quindi risulta:

$$d_v \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{v} + \varepsilon_1 \mathbf{u},$$

conforme all'asserto.

(1) Nella Nota della prof. NALLI si parla solo di «vettore derivato di  $\mathbf{u}$ »; bisogna evidentemente intendere che tale derivata sia la derivata *superficiale* di  $\mathbf{u}$  (nel senso di BOGGIO).



3. Se si riferisce la curva di trasporto  $C$  ad un parametro  $t$ , la precedente può scriversi:

$$(3) \quad \frac{d_v \mathbf{u}}{dt} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v},$$

ove, nel 1° membro figura la derivata *superficiale* di  $\mathbf{u}$ , e  $\lambda$ ,  $\mu$  sono fattori numerici; poichè dalla (a) segue:  $\mathbf{u} \times d_v \mathbf{u} = 0$ , si deduce dalla (3):

$$\lambda \mathbf{u}^2 + \mu \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0,$$

che non differisce dalla (3) della Nota della prof. Nalli.

Prendendo poi il differenziale superficiale della (b) si ha:

$$d_v \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times d_v \mathbf{v} = 0,$$

cioè, per la (3):

$$\lambda \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}^2 + \mathbf{u} \times \frac{d_v \mathbf{v}}{dt} = 0,$$

che equivale (ma è assai più semplice) all'ultima formula di p. 959 della Nota della prof. Nalli.

4. Abbiamo visto che se il vettore  $\mathbf{u}$  si sposta per parallelismo lungo la curva  $C$  della  $V_n$ , il differenziale  $d\mathbf{u}$  deve essere normale alla varietà  $V_n$ , cioè il differenziale superficiale di  $\mathbf{u}$  deve essere nullo, ossia:

$$(4) \quad d_v \mathbf{u} = 0.$$

Si può dire che questa è l'equazione vettoriale intrinseca del parallelismo di Levi-Civita; da essa si traggono subito le equazioni intrinseche, in coordinate generali, dovute al prof. Levi-Civita. Infatti, se diciamo  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  le coordinate generali (o curvilinee) del punto  $P$  sulla varietà  $V_n$ , ed  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$  le componenti contravarianti del vettore  $\mathbf{u}$ , è noto (*Geom. diff.*, p. 284), che

$$\mathbf{u} = \sum_i u^i \frac{\partial P}{\partial x_i},$$

prendendo il differenziale superficiale, e ricordando la (4), si ha:

$$\sum_i du^i \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{ik} u^i \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_k} dx_k = 0;$$

moltiplicando scalarmente per  $\text{grad}_v x_r$  si ha:

$$du^r + \sum_{ik} u^i \frac{\partial_r^2 P}{\partial x_i \partial x_k} \times \text{grad}_v x_r \cdot dx_k = 0,$$

ossia (*Geom. diff.* p. 282):

$$du^r + \sum_{ik} u^i \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r \end{matrix} \right\} dx_k = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

che sono le note equazioni intrinseche di Levi-Civita, per il parallelismo <sup>(1)</sup>.

**Matematica.** — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendentes.* Nota di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Ricerche nel gruppo delle fitosterine. Sulle sterine dell'olio di vinaccioli* <sup>(2)</sup>. Nota di C. ANTONIANI e F. ZANELLI, presentata <sup>(3)</sup> dal Corrisp. A. MENOZZI.

Questa Nota fa parte ed è il proseguimento della serie di ricerche da tempo iniziate dal nostro maestro prof. A. Menozzi sulle sterine animali e vegetali.

Già da molti anni il Windaus ha dimostrato che gran parte delle sterine vegetali ritenute come individui chimici singoli, altro non sono che miscele di una sterina vegetale assai diffusa e isomera della colesterina: la *sitosterina* con altre, tra le quali predominante è la così detta *stigmasterina*. Oggi ancora però si riscontrano numerosi termini di questo gruppo descritti e classificati in base ai vecchi criteri di indagine, e per questi termini sussiste pertanto ancora il dubbio se veramente trattisi di individui singoli oppure di miscele.

(1) LEVI-CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 158.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(3) Nella seduta del 21 febbraio 1932.

Tale è il caso della sterina dell'olio di vinaccioli, già studiata dal Paris <sup>(1)</sup> e dal Sani <sup>(2)</sup> e da quest'ultimo ricercatore contrassegnata col nome di *ampelosterina*. Di questa sterina abbiamo pertanto ritenuto utile ripetere lo studio secondo il metodo proposto dal Windaus.

#### PARTE SPERIMENTALE.

L'olio di vinaccioli utilizzato per queste ricerche <sup>(3)</sup> aveva un contenuto in sterine totali pari al 0.18 %. Kg. 9.2 di olio hanno dato gr. 45.6 di insaponificabile, pari al 0.52 % dell'olio.

L'ottenimento del prodotto sterinico allo stato cristallino presenta, come già osservava il Sani, difficoltà notevolissime. Da quantità anche notevoli di insaponificabile grezzo si ottengono perciò quantità esigue di prodotto in aspetto di purezza.

Per lenta cristallizzazione da alcool-etero e infine da alcool a 99°, abbiamo ottenuto gr. 0.5 circa di prodotto allo stato di squamette cristalline lucenti. P. f. 128–129;  $\alpha_D = 31.5$  ( $C = 3.2$  %).

La bromurazione del prodotto acetilato, eseguita secondo le indicazioni del Windaus <sup>(4)</sup> non ha dato luogo ad alcuna separazione di derivati insolubili. Dalla soluzione etero-bromo-acetica — lasciata a sè per circa 24 ore alla temperatura di 10–12° — venne separato il prodotto di bromurazione per addizione di circa 1/3 di acqua. Il prodotto ottenuto, bianco fioccoso, lavato con acqua sino a reazione neutra, venne essiccato su acido solforico e successivamente sciolto in alcool a 95° a caldo. Per tale trattamento il prodotto si separò in due frazioni, l'una solubile, l'altra pochissimo solubile in alcool. Quest'ultima aveva aspetto ceroso, era leggermente colorata in giallo e conteneva il 9.2 % di Br. Il contenuto in Br. della frazione solubile in alcool era del 20.6 %.

Per debromurazione con amalgama di sodio, la frazione solubile fornì un prodotto iniziale con p. f. 63°,  $\alpha_D = 5.2$ . Per cristallizzazione frazionata da alcool a 99° si ottenne da questa un primo prodotto con p. f. 80°, mentre dall'alcool padre si separò una seconda frazione, più abbondante, con p. f. 118–119,  $\alpha_D = 39.7$ .

Il prodotto con p. f. 80° per ricristallizzazione da alcool-etero diede una prima frazione con p. f. 93–94° e reazioni di Liebermann e Salkowski negative.

Per evaporazione della soluzione madre si ottenne una seconda frazione

(1) «Staz. Agr. Sperim.», vol. 44, p. 668, 1911.

(2) Questi «Rendiconti», vol. XIII, p. 551, 1904.

(3) L'olio ci venne fornito dalla Società Cottonoil, che ringraziamo.

(4) «B.», 39, 4378, 1906; 40, 3681, 1907.

la quale, dopo saponificazione e cristallizzazione da alcool, diede p. f. 115-116,  $\alpha_D + 10$  circa; reazioni di Liebermann e Salkowski positive.

Per saponificazione della frazione con p. f. 118-119° si ottenne una sterina a p. f. 135-136,  $\alpha_D - 32.6$  ( $C = 2.3\%$ ).

#### CONCLUSIONI.

Sottoponendo il prodotto sterinico grezzo dell'olio di vinaccioli ad acetilazione e bromurazione secondo il metodo di Windaus, si osserva la formazione di un unico derivato bromoacetilato solubile. Ciò esclude la presenza di *stigmasterina* o di sterine analoghe a questa.

I risultati ottenuti dimostrano però che il prodotto bromurato ottenuto nel modo descritto, non è costituito da un'unica sostanza. In esso è innanzi tutto presente un prodotto bromurato di natura non sterinica, che può separarsi dagli altri componenti traendo profitto della sua poca solubilità in alcool. Non completamente però; tanto che una parte di esso rimane ancora ad inquinare il prodotto di bromurazione e solo può separarsi per cristallizzazione frazionata da alcool, a debromurazione avvenuta (sostanza con p. f. 93-94). La presenza (anche dopo il trattamento con alcool) di una piccola quantità di questa sostanza non sterinica a basso contenuto in Br., spiega il basso contenuto in Br. del derivato bromoacetilato solubile in alcool.

Il prodotto acetilato sterinico che si ottiene per debromurazione, appare a sua volta costituito da due sterine distinte, di cui una avente p. f. 115-116 e  $\alpha_D + 10$  circa, l'altra p. f. 135-136 e  $\alpha_D - 32.6$  e di cui l'acetato fonde a 118-119 con  $\alpha_D - 39.7$ . Per quest'ultima sterina le costanti fisiche da noi osservate si accordano con quelle riscontrate da Menozzi e Moreschi <sup>(1)</sup> per la sterina delle noci e crediamo quindi, nonostante il basso punto di fusione dell'acetato rispetto alle indicazioni del Windaus, di poter concludere per la presenza di *sitosterina*, dato che appunto per tale viene ritenuta dai più anche la sterina studiata da Menozzi e Moreschi.

Riteniamo quindi che la sostanza sterinica con p. f. 128-129 e  $\alpha_D - 31.5$  presente nell'insaponificabile dell'olio di vinaccioli, risulti essenzialmente di *sitosterina*, accompagnata da piccole quantità di una sterina destrogira - indizio forse della presenza di diidrositosterina - e di piccole quantità di un prodotto non sterinico alogenabile.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XIX, serie 5ª, 1910.

**Chimica.** — *Sulla stereoisomeria dei derivati 2, 2'-disostituiti del difenile*<sup>(1)</sup>. Nota di A. CORBELLINI e C. PIZZI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. CAMBI.

Lo studio delle stereoisomerie dei derivati del difenile e dei composti analoghi ha dimostrato, come è noto, la possibilità di scindere in antipodi ottici solamente quei derivati che portano almeno tre gruppi sostituenti nelle posizioni 2,2', 6 e 6'.

I diversi tentativi di pervenire alla scissione dei derivati 2,2'-disostituiti, aventi o no contemporaneamente sostituite le posizioni 3, 3', 4, 4', 5, 5',<sup>(3)</sup> rimasero finora infruttuosi<sup>(4)</sup> ad eccezione dell'acido 4, 4'-dinitrodifenico<sup>(5)</sup>.

In una precedente Nota sulla stereoisomeria dei derivati 8,8'-disostituiti dell'1, 1'-dinaftile uno di noi<sup>(6)</sup> ha dimostrato la possibilità di scindere l'acido 1, 1'-dinaftile 8, 8'-dicarbossilico (I) nei due antipodi ottici.

Questo acido si può considerare come un derivato 2, 2', 3, 3'-tetrasostituito del difenile e rappresenta quindi il primo derivato 2, 2'-disostituito che si è riusciti a scindere negli antipodi ottici. Si deve però rilevare

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) Come l'esperienza tuttora conferma la stereoisomeria nei derivati del difenile è provocata dalla presenza di gruppi sostituenti nelle posizioni 2, 2', 6, 6'. L'intervento di altri gruppi sostituenti nelle posizioni 3, 3', 5, 5' è necessario solamente in alcuni casi per rendere distinti i due stereoisomeri creando con la loro presenza l'asimmetria dei nuclei benzolici (L. MASCARELLI, «Gazz. Chim. It.», 58, 791, 865 (1928)).

(4) Non si è riusciti a scindere i seguenti composti: acido difenico (E. E. TURNER e R. J. W. LE FÈVRE, «J. Soc. Chem. Ind.», 45, 831 (1926); F. BELL e P. H. ROBINSON, «J. Chem. Soc.», 1698 (1927)), acido 4- e 5-nitrodifenico (F. BELL e P. H. ROBINSON, «J. Chem. Soc.», 2235, 2238 (1927)), acido 5, 5'-dinitrodifenico (F. PUFAHL, «Ber.», 62, 2817 (1929)), acido 2, 2'-difenildisolfonico (W. M. STANLEY e R. ADAMS, «J. Am. Chem. Soc.», 52, 4471 (1930)), acido 4, 4'-diammino 2, 2'-difenildisolfonico (E. E. TURNER e R. J. W. LE FÈVRE, loc. cit.; W. M. STANLEY e R. ADAMS, loc. cit.) e l'acido 1, 1'-diantrachinonil-4, 4'-dicarbossilico (W. M. STANLEY e R. ADAMS, «J. Am. Chem. Soc.», 53, 2364 (1931)) il quale si può considerare come un derivato 2, 2', 3, 3', 4, 4' esastituito del difenile.

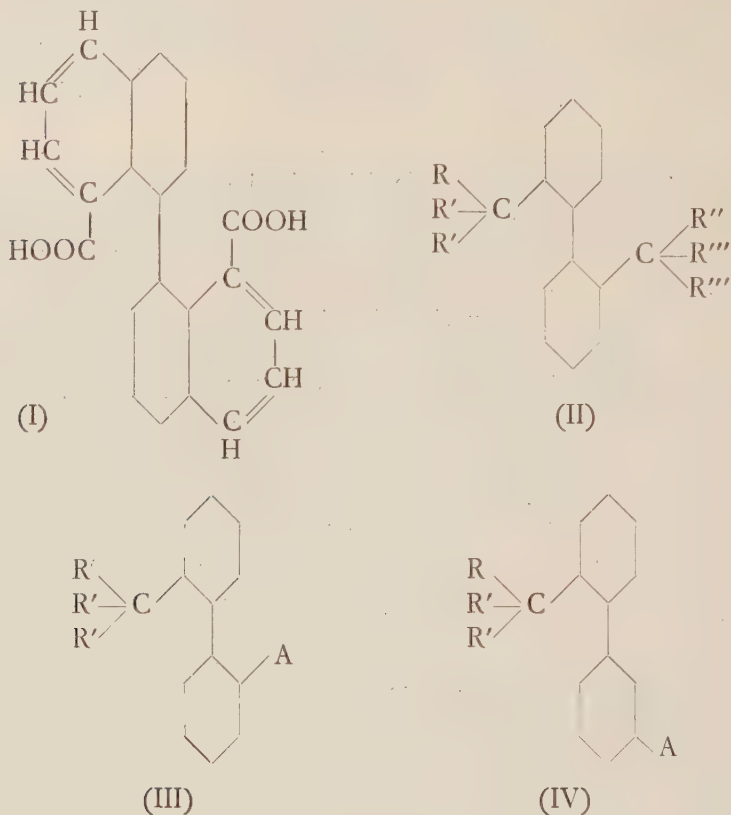
(5) R. KUHN e O. ALBRECHT («Ann.», 455, 297 (1927)) cristallizzando frazionatamente il sale di dichinina di questo acido avrebbero ottenuto come prima frazione un sale destrogiro e come ultima frazione un sale levogiro senza riuscire ad ottenere gli acidi attivi dalla loro decomposizione.

Reputando necessaria una conferma del comportamento anomalo di questo acido stiamo verificando i risultati sperimentali dei predetti AA.

(6) A. CORBELLINI, questi «Rendiconti», 6<sup>a</sup> serie, XIII, 1<sup>o</sup> sem., 702 (1931). La stessa scissione è stata successivamente eseguita da W. M. STANLEY, «J. Am. Chem. Soc.», 53, 3104 (1931).

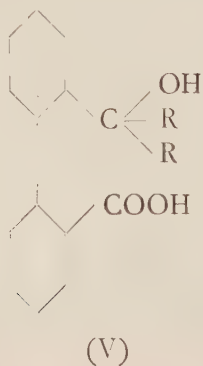


che si tratta di gruppi sostituenti a catena ramificata  $\text{>C-COOH}$  ben diversi da quelli semplici finora considerati.



Ne conseguiva la previsione dell'esistenza di analoghe stereoisomerie anche nei composti del tipo (II), (III) e (IV).

Abbiamo verificato sperimentalmente queste previsioni, ed a tale scopo abbiamo preso in esame i composti 2, 2'-disostituiti della formola generale



in cui R è un radicale alchilico od arilico semplice o sostituito e che si ottengono facendo agire i corrispondenti alogenuri di magnesio (2 mol.) con l'anidride difenica (1 mol.).

Mentre stiamo estendendo lo studio a questi nuovi composti (R = metil, etil, o-, m- e p-tolil, o- e p-anisil, p-bromofenil,  $\alpha$ - e  $\beta$ -naftil, ecc.) esponiamo in questa Nota i risultati delle nostre indagini sulla scissione dell'acido 2-[bis-fenil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico (R = C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>).

Il tentativo di scindere questo composto nei suoi antipodi ottici è riuscito.

Cristallizzando frazionatamente da alcool il suo sale di brucina si ottiene come prima frazione (circa il 70 %) un sale destrogiro (p. f. 200°) che in soluzione cloroformica ( $[\alpha]_D^{18} = +41^{\circ}.15$ ) è instabile già a temperatura ordinaria. Infatti il suo potere rotatorio diminuisce annullandosi dopo due-tre giorni, per assumere poi valori negativi che tendono a quello del sale del racemico ( $[\alpha]_D^{18} = -14^{\circ}.86$ ).

La seconda frazione che si ottiene evaporando a secco la soluzione madre dalla quale si è separata la prima è sinistrorsa (p. f. 182°, in soluzione cloroformica  $[\alpha]_D^{18} = -7^{\circ}.48$ ).

Scindendo a freddo il sale della prima frazione si ottiene un acido destrogiro che in soluzione cloroformica si racemizza facilmente già a temperatura ordinaria. Dalla seconda frazione si ottiene un acido puro destrogiro avente però un potere rotatorio minore del precedente.

In base a questi risultati si conclude che per cristallizzazione frazionata del sale del racemico si ottiene in maggior quantità il sale destro, meno solubile, per effetto dell'equilibrio



La composizione della seconda frazione sarà prevalentemente destra o sinistra secondo la velocità di evaporazione del solvente, la solubilità del sale destro e la velocità di racemizzazione del sale sinistro.

Lo studio già in corso della relazione fra costituzione del radicale R nei composti del tipo (V) e la possibilità di scinderli in antipodi ottici e della variazione di velocità di racemizzazione dei diversi composti attivi ci permetterà forse di indagare più intimamente sulla natura della stereoisomeria nei derivati del difenile.

#### PARTE SPERIMENTALE.

##### *Acido 2-[bis-fenil-ossimetil] 2'-difenilcarbossilico.*

Si ottiene trattando l'anidride difenica <sup>(1)</sup> (1 mol.) con bromuro di fenilmagnesio (2 1/2 mol.) operando con le stesse modalità seguite da A. E. Tschit-

(1) Preparata dal fenantrene secondo G. CHARRIER e A. BERRETTA, « Gazz. Chim. It. », 54, 765 (1924).

schibabin e P. G. Ssergejew<sup>(1)</sup> che hanno studiato la reazione fra gli stessi composti nel rapporto di una molecola a quattro molecole.

Insieme all'acido si forma anche una certa quantità di 2, 2' di-[bis-fenil-ossimetil]-difenile (p. f. 252°).

L'acido greggio che si ottiene precipitando la sua soluzione alcalina ghiacciata con acido acetico diluito, e che talora si separa come massa bianca peciosa, si purifica trasformandolo nel suo lattone. A tale scopo si fa passare per brevissimo tempo nella sua soluzione concentrata in alcool 95° una corrente di acido cloridrico gassoso; per raffreddamento e riposo si separa cristallino il lattone. Ricristallizzato da alcool si presenta in cristalli bianchi irregolari fondenti a 190°<sup>(2)</sup>.

Alla analisi si è avuto:

	trov.	%	C	86.25	H	5.12
per C <sub>26</sub> H <sub>18</sub> O <sub>2</sub>	calc.			86.15		5.01.

Il lattone è solubile in cloroformio, alcool, benzolo, quasi insolubile in etere.

La saponificazione del lattone ha luogo bollendolo per breve tempo con potassa alcoolica (lattone gr. 2, alcool etilico 95° cmc. 12, idrato potassico gr. 0.7, acqua cmc. 2) fin quando un campione della soluzione non precipita più per diluizione con acqua.

Si diluisce la soluzione con acqua fino a circa 50 cmc. e la si acidifica raffreddando con acido acetico diluito. L'acido 2-[bis-fenil-ossimetil] 2'-difenil-carbossilico si separa sotto forma di precipitato bianco fioccoso che si rapprende a 85° e fonde a 110°<sup>(3)</sup>. È facilmente solubile nella maggior parte dei solventi organici.

SCISSIONE DELL'ACIDO. — Fra i diversi sali presi in esame (di cinconina, stricnina, brucina) abbiamo scelto quello di brucina che cristallizza bene da alcool.

Ad una soluzione di 2.07 gr. (1 mol.) di brucina anidra in 40 cmc. di alcool etilico 95° si aggiungono 2 gr. (1 mol.) di acido 2-[bis-fenil-ossimetil] 2'-difenilcarbossilico. Si bolle per breve tempo, si filtra la soluzione e la si concentra ponendola in essicatore a vuoto su acido solforico.

Quando il volume è ridotto a circa metà si filtra il sale separatosi (1<sup>a</sup> frazione gr. 2.8, p. f. 200°); evaporando il filtrato a secco sempre in essicatore si ottiene una seconda frazione (gr. 1.2, p. f. 182°).

(1) « Ber. », 59, 659 (1926).

(2) P. G. SSERGEJEW, « Chem. Zentr. », II, 392 (1930),

(3) P. G. SSERGEJEW, loc. cit.

L'analisi delle due frazioni ha fornito:

1 <sup>a</sup> frazione	trov. %	C 75.82	H 6.10	N 3.70
2 <sup>a</sup> frazione	»			3.35
per $C_{49}H_{46}O_7N_2$	calc.	75.94	5.99	3.62;

il loro potere rotatorio in soluzione cloroformica misurato appena fatta la soluzione risulta rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 1^a \text{ frazione} & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [\alpha]_D^{18} = (+ 0^{\circ}.67 \cdot 100) : (1.6280 \cdot 1) = + 41^{\circ}.15 \\
 2^a \text{ frazione} & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [\alpha]_D^{18} = (- 0^{\circ}.08 \cdot 100) : (1.0693 \cdot 1) = - 7^{\circ}.48.
 \end{aligned}$$

Il potere rotatorio della soluzione cloroformica della prima frazione lasciata a sè a circa 18° va diminuendo annullandosi dopo circa due tre giorni ed assumendo poi valori negativi.

Il potere rotatorio misurato dopo 150 ore dalla prima misura risulta:

$$[\alpha]_D^{18} = (- 0^{\circ}.18 \cdot 100) : (1.6280 \cdot 1) = - 11^{\circ}.06.$$

Esso tende evidentemente al valore del potere rotatorio del sale di brucina della miscela racemica, che dalla misura di una soluzione di 0.1900 gr. di acido e 0.1970 gr. di brucina anidra in 25 cmc. di cloroformio risulta essere:

$$[\alpha]_D^{18} = (- 0^{\circ}.23 \cdot 100) : (1.5480 \cdot 1) = - 14^{\circ}.86.$$

La scissione del sale di chinina si effettua scegliendolo a temperatura ordinaria nella minor quantità possibile di piridina, precipitando la soluzione per diluizione con acqua ghiacciata ed acidificando la sospensione con acido cloridrico ghiacciato. La parte insolubile costituita dall'acido attivo viene lavata parecchie volte prima con acido cloridrico diluito poi con acqua e si asciuga in essiccatore.

Gli acidi attivi così ottenuti dalla prima e dalla seconda frazione fondono ambedue a 110° come il racemico ed in soluzione cloroformica sono ambedue destrogiri, il primo in quantità maggiore del secondo. Le soluzioni lasciate a sè a temperatura ordinaria perdono rapidamente l'attività ottica.

**Chimica.** — *Sopra le diazoresine* <sup>(1)</sup>. Nota I di Z. JOLLES, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio G. PELLIZZARI.

Le diazoresine presentano, per la loro complessa costituzione e per il meccanismo della loro formazione un notevole interesse di indole generale, sia perchè esse accompagnano tutte quelle reazioni nelle quali si ricorre ai diazotati, sia perchè iniziandone lo studio si potrà conoscere una nuova classe di composti, finora non sottoposti ad una ricerca sistematica.

I diazotati normali subiscono, come è noto, in ambiente alcalino una decomposizione spontanea, più o meno rapida, accompagnata da sviluppo di azoto e dalla formazione di prodotti amorfi, di peso molecolare elevato, colorati generalmente dal rosso chiaro al rosso ruggine e qualche volta in rosso scuro. Tali prodotti, conformemente alla loro origine, prendono il nome di *diazoresine*. Essi sono inoltre caratterizzati da una grande resistenza di fronte ai comuni reagenti come acido cromico, acido nitrico, permanganato potassico ecc. Allo stato secco e di estrema suddivisione si presentano sotto forma di una polvere finissima, carica elettricamente.

Il primo a notare la formazione di resine nelle soluzioni alcaline dei diazotati, fu Peter Griess, nel 1866 <sup>(3)</sup>. Egli riuscì a separare la resina dell'anilina e ne determinò la formula bruta  $C_{24}H_{18}N_2O$ .

Successivamente Frankland <sup>(4)</sup>, studiando l'azione della diazonaftalina sopra l'acido salicilico, ha notato che insieme all'acido naftilazosalicilico ha luogo la formazione contemporanea di un prodotto resinoso, insolubile negli alcali, che egli ottenne egualmente neutralizzando la soluzione del cloruro di naftildiazonio con del carbonato sodico.

Data la difficile purificazione di tali sostanze e la considerevole resistenza che esse offrono all'azione dei reagenti chimici, non meraviglia se nella letteratura non si trovano che dei dati scarsi ed inesatti intorno a questi interessanti prodotti. In genere quando in una qualunque reazione con dei diazotati, ha luogo la formazione di sostanze amorfe, scure, dovute evidentemente alla decomposizione spontanea che i diazotati subiscono in ambiente alcalino, è uso di metterle in disparte, classificandole come « resine »; tutt'al più ne viene separata, mediante estrazione con solventi appro-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) « A. », 137, 78.

(4) « Soc. », 37, 750, 1880.



priati, la parte cristallina di cui la massa rimane in parte impregnata e che non ha nulla da fare con la resina in parola.

Noi abbiamo incominciato pertanto con la preparazione di resine, partendo da una serie di basi con vari sostituenti nel nucleo aromatico. Allo scopo di conoscere i rendimenti abbiamo operata la decomposizione al riparo dall'anidride carbonica dell'aria, entro un pallone chiuso con un tubo a idrato di potassio. A reazione ultimata, quando cioè lo sviluppo di azoto è cessato ovvero quando nel liquido di reazione non si riscontra più il diazotato normale ( $\beta$ -naftolo), si separa il prodotto per filtrazione, si lava più volte con acqua e si porta a costanza di peso in essiccatore a vuoto su acido solforico. Al liquido che contiene l'isodiazotato<sup>(1)</sup>, filtrato ed acidificato con acido carbonico, viene aggiunto un eccesso di  $\beta$ -naftolo e dalla quantità esatta del colorante si risale alla quantità della base non resinificata.

Abbiamo preso in esame le seguenti ammine aromatiche:

anilina, m-, p-toluidina, o-, p-anisidina, o-, p-fenetidina, gli acidi o- e p-aminobenzoici,  $\alpha$ -naftilammina.

Il rendimento, in prodotto greggio, non è uguale nelle varie esperienze con una stessa base; così p. es. nel caso dell'anilina esso oscilla tra 88-95 %. La concentrazione dell'alcali e la temperatura vi hanno influenza indubbiamente non trascurabile. Nei liquidi alcalini di reazione furono riscontrati nella maggior parte dei casi, i corrispondenti idrocarburi aromatici che per l'anilina e l'anisidina abbiamo nettamente identificati, attraverso i rispettivi nitroderivati (nitrobenzolo, nitransolo). Il fenetolo, toluolo e naftalina sono stati riconosciuti dal loro caratteristico odore.

Tale riduzione spontanea dei diazotati normali ad idrocarburo concorre evidentemente ad abbassare il rendimento della reazione di decomposizione in diazoresina.

I rendimenti in prodotto greggio conseguiti con alcune delle basi esaminate, sono riuniti nella seguente tabella, riferiti a parti 100 della base:

(1) Trattandosi di reazioni che si compiono in modo piuttosto lento, il diazotato normale si trasforma in parte nel suo isomero.

TABELLA I.

Base di partenza	Rendimento in prodotto resinoso (valore medio da varie determinazioni)
Anilina . . . . .	90
Anisidina orto . . . . .	78
» para . . . . .	80
Fenetidina para . . . . .	80
Toluidina meta . . . . .	93
» para . . . . .	70

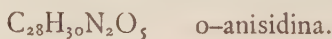
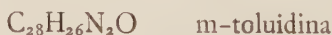
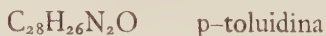
La purificazione delle diazoresine è resa particolarmente difficile per la presenza nella maggior parte dei casi, di piccole quantità di prodotti, aventi un tenore di azoto più alto. Tant'è vero che le analisi di azoto eseguite sopra prodotti non sufficientemente purificati, danno dei valori assai più elevati che non i prodotti puri. Questi ultimi si ottengono solo dopo prolungato lavaggio mediante estrazione con opportuni solventi.

Per meglio illustrare tale fatto, sono riportati nella tabella II i valori di azoto, trovati, dopo successive purificazioni delle diazoresine dell'anilina, della m-, p-toluidina e dell'o-anisidina.

La formazione di diazoresina può essere rappresentata, nel caso dell'anilina, con l'equazione seguente:



Se con equazioni analoghe potesse venir rappresentato il processo di resinificazione di altre basi come p. es. la p- e m-toluidina e la o-anisidina, alle rispettive diazoresine dovrebbero corrispondere le formule:



Come risulta dalla tabella II, nella quale sono riportati i valori di azoto, calcolati in base alle formule brute predette, essi sono in buon accordo con le rispettive analisi.

TABELLA II.

Diazo-resine di:	N %		Differenza	Stato di purezza
	trov.	calc.		
anilina . . . . .	8.64	8.00	0.64	prodotto greggio
» . . . . .	8.32	»	0.32	dopo 12 ore di estrazione con etere a ricadere
» . . . . .	8.25	»	0.25	idem, dopo 24 ore
o. anisidina . . . . .	8.97	5.96	3.01	prodotto greggio
» . . . . .	7.06	»	1.10	dopo rapido lavaggio con etere a freddo
» . . . . .	6.20	»	0.24	dopo prolungata estrazione con etere a ricadere
p. toluidina . . . . .	6.90	6.89	0.01	purificato 2 volte da li- groina
m. toluidina . . . . .	7.98	»	1.09	prodotto greggio
» . . . . .	7.34	»	0.45	lavato con ligroina a caldo

Nulla ancora di definitivo possiamo dire circa la costituzione di questi composti amorfi. Il materiale sperimentale di cui disponiamo non autorizza per ora di pronunziarsi per tale o tal'altra formula strutturale. Non è improbabile che queste sostanze siano in stretta relazione con i prodotti del tipo:



ottenuti per la prima volta da Griess <sup>(2)</sup> per azione di ferrocianuro sopra il nitrato di diabenzolo e studiati più tardi da Ehrenpreis <sup>(3)</sup>, come già altrove fu posto in rilievo <sup>(1)</sup>.

La presenza dell'aggruppamento



nel caso dell'anilina, sembra confermata dal fatto che riducendo la corrispondente diazo-resina con stagno ed acido cloridrico siamo pervenuti all'anilina e ad un'altra base, non ulteriormente studiata <sup>(4)</sup>.

(1) Vedi A. ANGELI e Z. JOLLES, «G.», 61, 403, 1931.

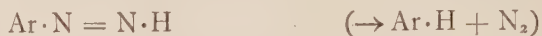
(2) «B», 9, 132, 1876.

(3) «Chem. Zentr.», 1907, I, 1789.

(4) Vedi comunicazione preliminare «Rendiconti R. Accademia Naz. dei Lincei», vol. XI, p. 925. Nota 2 a piè pagina.

Per ossidazione con acido cromatico in soluzione acetica o solforica della resina predetta, siamo pervenuti ad una piccola quantità di acido benzoico che abbiamo nettamente identificato. Ciò proverebbe la presenza di un legame difenilico come nella formula di Ehrenpreis.

Circa il meccanismo della resinificazione si può ammettere che esso sia un processo di ossidazione interna dei diazotati, dovuta alla spiccata proprietà ossidante di questi composti. È probabile che in assenza di corpi ossidabili abbia luogo un processo di riduzione e di ossidazione fra le molecole dello stesso diazotato. A favore di tale ipotesi enunciata per la prima volta da Angeli<sup>(1)</sup> si può portare fra l'altro anche il fatto da noi notato, che nelle soluzioni alcaline dei diazotati si riscontrano i corrispondenti idrocarburi, alla cui formazione deve necessariamente contribuire il termine labile



che è un prodotto intermedio di riduzione del diazotato normale, come è stato recentemente dimostrato<sup>(2)</sup>.

Proseguono ricerche sopra questi interessanti composti.

## PARTE SPERIMENTALE

(in collaborazione con WILLY CAMIGLIERI).

*Resina di anilina.* — Gr. 10 di anilina si diazotano nel solito modo e si alcalinizzano con il quadruplo della quantità di idrato sodico, necessaria per neutralizzare il sale di diazonio. Si separa un precipitato amorfo, marrone scuro, e contemporaneamente ha luogo un forte sviluppo gassoso. Dopo 8 giorni cessa lo sviluppo di gas mentre il liquido alcalino non si copula più con  $\beta$ -naftolo. Il precipitato, lavato bene con acqua ed asciugato, si estrae in calzettina con etere, fino a che il solvente non ricada incolore. Il residuo è costituito dal prodotto puro.

*Ossidazione con acido cromatico.* — Una piccola quantità della resina si pone in pallone con acido acetico glaciale, in cui si scioglie con intensa colorazione scura; vi si aggiunge dell'acido cromatico in più riprese e si scalda a fiamma diretta per circa 140 ore. Trascorso tale tempo si concentra il liquido di ossidazione in una capsula e si riprende più volte con acqua, fino a scomparsa della maggior parte dell'acido acetico. Il prodotto di ossidazione è solubile in alcali, acidificando con acido solforico diluito, non si ha alcuna precipitazione. È quasi completamente insolubile in alcool amilico. Dopo averlo portato in soluzione di alcali concentrato vi si aggiunge del

(1) Loc. cit.

(2) A. ANGELI e Z. JOLLES, «Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei», X, p. 141, 1929.

permanganato potassico, fino a persistenza della colorazione viola, a bagno maria bollente. Si filtra ed il liquido fortemente concentrato si acidifica con acido solforico diluito e si estrae con etere. Il residuo eterico è costituito da una massa biancastra alla cui superficie sono disposti verticalmente dei bellissimi aghi bianchi, lucenti che fondono a 118-121°. P. f. misto con acido benzoico: 119°. Il residuo sarà sottoposto ad ulteriore studio.

*Identificazione del benzolo nella soluzione del diazotato.* — Si sottopone il liquido alcalino alla distillazione in corrente di vapor d'acqua e nella prima porzione del distillato si identifica il benzolo con la prova del nitrobenzolo.

*Resina della p-anisidina.* — Ad una soluzione di gr. 10 di p-anisidina, diazotata nel solito modo si aggiunge un forte eccesso di alcali. Quasi immediatamente si nota un vivo sviluppo di azoto con contemporanea separazione della resina color rosso-ruggine. Alla superficie del liquido si forma un'abbondante schiuma a forma di calotta, dovuta al forte sviluppo di azoto. Dopo circa tre giorni la reazione è terminata (il liquido alcalino di reazione non si copula con  $\beta$ -naftolo).

*Identificazione dell'anisolo nel liquido di diazotazione.* — Si procede come nel caso del benzolo dall'anilina. Il distillato odora fortemente di anisolo. La prima porzione del distillato viene trattata con etere ed il residuo eterico, costituito da poche gocce oleose, si tratta con cc. 5 di acido nitrico di densità 1.42: si separano delle goccioline oleose, colorate intensamente in rosso carminio. Si filtra per filtro semplice, si lava con acqua e si stende su carta assorbente: dopo poche ore la massa oleosa cristallizza in bei cristalli bianchi, che purificati dall'etere con carbone animale, fondono a 48°. P. f. misto con p-nitroanisolo: 49°.

In modo analogo a quello descritto per l'anilina e la p-anisidina, si separano le resine anche delle altre basi, ad eccezione dell'

*Acido p-amminobenzoico.* — Per diazotazione di questa base e successiva alcalinizzazione si ebbe un liquido colorato in giallognolo che presenta intensissima la reazione dei diazotati normali; riscaldando a bagno maria si ha forte sviluppo di azoto e nello stesso tempo il liquido assume una intensa colorazione bruna; acidificando cautamente con acido solforico diluito si ha abbondante precipitato, costituito da una massa bruna, evidentemente la diazoresina, ma questa volta solubile negli alcali per la presenza di gruppi carbossilici.

*Acido antranilico.* — Andamento simile al precedente isomero.

*O-fenetidina.* — Alcalinizzando la soluzione del diazotato di questa base, si perviene ad una massa peciosa, nera, che rimane tale anche dopo lungo tempo.

**Chimica.** — *Sopra le diazoresine.* Nota II di Z. JOLLES, presentata dal Socio G. PELLIZZARI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.



**Chimica.** — *La struttura cristallina del praseodimio.* Nota di A. ROSSI, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Il metallo è stato preparato in questo Laboratorio da G. Canneri per elettrolisi del  $\text{PrCl}_3$  fuso e quindi sottoposto ai seguenti saggi di purezza: nei riguardi degli altri elementi delle terre rare e del lantanio, è stata fatta una ricerca mediante l'osservazione dello spettro di emissione X, serie L, del metallo in esame, nel campo di lunghezze d'onda compreso fra  $2.6596 \text{ \AA}$  ( $L\alpha_1$  del lantanio) e  $2.042 \text{ \AA}$  ( $L\alpha_1$  del gadolinio), e sono risultati presenti, insieme a tracce minime di europio, il cerio, il neodimio e il samario, ciascuno in quantità certamente inferiore all'uno per mille; nei riguardi di altri elementi possibili, è stata determinata la quantità di praseodimio contenuta nel materiale in esame. È risultato essere presente il 99.4 % di praseodimio, il complemento a cento essendo costituito in buona parte da carbonio e silicio provenienti dai materiali usati per l'elettrolisi. Occorre peraltro considerare una percentuale più bassa di praseodimio puro, a causa delle combinazioni possibili fra le impurezze presenti ed il metallo.

Per aspirazione del metallo fuso in un sottile cannellino di refrattario, e susseguente assottigliamento del cilindretto ottenuto, al tornio, mediante una piccola lima, è stata preparata una bacchettina del diametro di un millimetro; questa, protetta dalla ossidazione mediante un sottilissimo strato di paraffina, veniva collocata lungo l'asse di una camera per la fotografia delle polveri ed esaminata nelle condizioni seguenti: radiazione K del rame filtrata attraverso nichel ( $\lambda = 1.537 \text{ \AA}$ ); fenditura rettangolare mm.  $1 \times 3$ ; diametro della camera 57.3 mm.; cinque ore di posa con una tensione di 30–35 KV. ed un'intensità di 13–14 M. A.; temperatura ambiente ( $18^\circ$ ). Una seconda pellicola sovrapposta come schermo a quella aderente alle pareti della camera, permetteva di attenuare considerevolmente l'annerimento del fotogramma dovuto alla radiazione X secondaria emessa dalla bacchettina, favorendo una migliore accuratezza nella lettura delle righe, specialmente per quelle corrispondenti ai raggi maggiormente deviati.

I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella in cui, nella colonna 1 sono posti i valori della metà della distanza fra due righe corrispondenti (media letture di 3 fotogrammi), nella colonna 2 i valori degli angoli di diffrazione corrispondenti, corretti per lo spessore della bacchettina ed il non perfetto parallelismo dei raggi uscenti dalla fenditura; nella co-

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

lonna 3 i valori di  $d/n$  (distanze dei piani reticolari divise per l'ordine di riflessione) trovati; nella colonna 4 i valori di  $d/n$  calcolati per il sistema esagonale essendo:  $c/a$  (rapporto assiale) = 1.62,  $a_0$  (lato della cella elementare) = 3.657 Å, e gli indici dei piani corrispondenti quelli segnati a fianco nella colonna 5.

TABELLA I.

	1	2	3	4	5
1	15.70	15°.01	2.966	2.963	00.1 (2)
2	16.60	15°.55	2.802	2.793	10.1
3	21.70	21°.03	2.140	2.164	10.2
4	25.40	24°.46	1.834	1.829	11.0
5	27.90	27°.18	1.676	1.676	10.3
6	30.20	29°.37	1.555	1.556	11.2
7	31.85	31°.16	1.481	1.481	00.1 (4)
8	38.95	38°.25	1.237	1.236	20.3
9	39.95	39°.27	1.209	1.197	12.0
10	41.40	40°.54	1.174	1.173	12.1
11	42.35	41°.52	1.151	1.151	11.4
12	44.40	43°.55	1.108	1.110	12.2
					10.5
13	47.00	46°.33	1.059	1.056	10.0 (3)
14	49.20	48°.46	1.022	1.024	12.3
15	54.80	54°.25	0.9450	0.9427	10.6

L'accordo fra i valori di  $d/n$  osservati, e quelli calcolati, rientra ampiamente nei limiti degli errori sperimentali inerenti alle condizioni di lavoro, e porta a far ritenere che il praseodimio cristallizzi, analogamente al cerio <sup>(1)</sup> e al lantanio <sup>(2)</sup>, nel sistema esagonale. D'altra parte occorre notare che sono visibili specialmente nel migliore dei fotogrammi ottenuti, altre tre righe, una assai debole, le altre due debolissime (distanze approssimate dal centro del fotogramma: 18.7; 20.7; 24.5), che non sono previste al pari delle altre dal sistema esagonale per  $c/a = 1.62$  e  $a_0 = 3.657$  Å. Si può pensare che esse siano dovute alle impurezze presenti.

(1) Hull. « Phys. Rev. », 18-88 (1921).

(2) Mc LENNAN and Mc KAY, « Trans. Roy. Soc. Canada » (iii), 24, III; 33-35 (1930).

*Densità del praseodimio.* — La letteratura riporta per la densità del praseodimio il valore 6.60 <sup>(1)</sup>. Quattro determinazioni eseguite a 16° C. con la bilancia idrostatica su blocchetti diversi del metallo prima descritto, usando come liquido del benzolo anidro di densità controllata, fornivano il seguente valore della densità:

$$d = 6.765 \pm 0.008.$$

La natura e la quantità delle impurezze trovate può far ritenere che questo valore sia leggermente più basso del vero.

Supponendo, analogamente a quanto è stato fatto per il cerio e per il lantanio, che il praseodimio abbia la struttura esagonale compatta (2 atomi nella cella elementare, di coordinate:  $1/3, 2/3, 1/4$  —  $2/3, 1/3, 3/4$ ), ed una cella elementare di dimensioni  $a_0 = 3.657 \text{ \AA}$ ;  $c_0 = 5.924 \text{ \AA}$ , si calcola per la densità il seguente valore:

$$d = 6.777$$

che è in ottimo accordo col valore dato dalla bilancia.

Altrettanto soddisfacente non è il confronto fra le intensità delle righe, trovate, e quelle previste, per l'esagonale compatto, dalla nota formula approssimata:

$$I = J \times \left[ \frac{d_{hkl}}{n} \right] 2.35 \times \left\{ \left[ \sum_s N_s \cos 2\pi n (hx_s + ky_s + l z_s) \right]^2 + \left[ \sum_s N_s \sin 2\pi n (hx_s + ky_s + l z_s) \right]^2 \right\}$$

in cui  $J$  è il numero dei piani cooperanti alla riflessione,  $N_s$  il numero atomico;  $x_s, y_s, z_s$ , le coordinate degli atomi.

La seguente tabella mostra i risultati ottenuti:

TABELLA II.

$h k l$	I. trovata	I. calc.	$h k l$	I. trovata	I. calc.
10.0	O	3.3	11.2	f	5.0
00.1 (2)	f	3.8	20.1	O	3.6
10.1	f	14.9	00.1 (4)	mf	0.7
10.2	dd	2.7	10.1 (2)	O	0.9
11.0	dd	3.7	10.4	O	0.9
10.3	f	4.5	20.3	d	2.2
10.0 (2)	O	0.7	12.0	d	0.7
—	—	—	12.1	d	3.0

(1) WIERDA, Kremers. «Trans. Amer. El. Soc.», 48, VIII (1925).

**Fisiologia.** — *La curva glicemica adrenalinica nella fatica e il rapporto potassio calcio*<sup>(1)</sup>. Nota di F. V. MADON e di S. GOLDBERGER<sup>(2)</sup>, presentata<sup>(3)</sup> dal Socio A. HERLITZKA.

Molte ricerche sono state eseguite sulla capacità del lavoro muscolare sotto l'azione dell'adrenalina, con risultati concordi di un aumento della capacità di lavoro tanto dopo l'iniezione di adrenalina che dopo la stimolazione diretta dello splancnico, che, come si sa, aumenta la secrezione della surrenale; ma finora, per quanto ci risulta, non è stata studiata, l'azione dell'adrenalina sulla pressione del sangue e sulla glicemia dopo la fatica. Poichè inoltre, dalle ricerche di Kylin<sup>(4)</sup> e di altri, risulta che l'azione dell'adrenalina è influenzata dalla quantità di Ca e K esistente nel siero, nel senso che una diminuzione del rapporto K/Ca aumenta l'azione dell'adrenalina, abbiamo contemporaneamente eseguito il dosaggio di queste due sostanze nel siero di sangue. Abbiamo ritenuto necessarie queste ricerche, poichè già Azzi<sup>(5)</sup> e Schenk<sup>(6)</sup> avevano trovato un aumento del K del sangue totale nella fatica in alta montagna, ricerche però limitate ad un individuo solo, (con un massimo di aumento del 36 %), ed Embden e Lange<sup>(7)</sup> e Calhoun, Cullen e Harrison<sup>(8)</sup>, lavorando sui muscoli isolati, hanno potuto osservare una notevole diminuzione del K muscolare dopo il lavoro, mentre Ewig e Wiener<sup>(9)</sup>, Caccuri<sup>(10)</sup> e altri non trovarono, come del resto anche noi, nessuna variazione della quantità del Ca nel siero dopo la fatica.

Le ricerche sono state eseguite nel mese di agosto 1931, nell'Istituto Angelo Mosso sul Col d'Olen, su quattro individui. L'esperimento venne eseguito nel seguente modo. L'individuo a digiuno faceva una marcia di tre ore circa, faticosa specialmente nell'ultimo tratto per la forte salita appositamente scelta per le varie prove, e dopo cinque minuti di riposo in posizione supina venivano determinate la pressione mx e mn, (secondo la vecchia

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Angelo Mosso al Col d'Olen.

(2) Il lavoro è stato eseguito in parti uguali.

(3) Nella seduta del 21 febbraio 1932.

(4) KYLIN, «D. Arch. f. klin. Med.» 149, p. 354 (1929).

(5) AZZI, «Arch. Sc. Med.», 46, p. 186 (1923).

(6) SCHENK, «Münch. med. Wochenschrift», 72, p. 2050 (1925).

(7) EMBDEN e LANGE, «Klin. Wochenschrift», 3, p. 129 (1924).

(8) CALHOUN, CULLEN e HARRISON, «J. clin. Invest.», 9, p. 405 (1930).

(9) EWIG e WIENER, «Z. exp. Med.», 61, p. 562 (1928).

(10) CACCURI, «Giorn. Batt.», 4, p. 314 (1929).

tecnica del Pachon, in cui i valori minimi corrispondono ai valori medi di Vacquez), la glicemia (micrometodo di Bang)<sup>(1)</sup> e contemporaneamente si prelevava il sangue per il dosaggio del Ca (Kramer e Tilsdalt)<sup>(2)</sup> e del K (Mazza e Rossi)<sup>(3)</sup>. Subito dopo veniva eseguita sotto cute l'iniezione di 1 mmg. di adreanalina Parke e Davis; si riprendevano poi i valori della pressione ed il sangue necessario per la determinazione della glicemia ogni 10', esami che si protraevano fino a che la pressione si manteneva pressochè invariata. Nelle stesse condizioni e alla stessa ora vennero eseguiti i controlli a riposo. A questi 4 esperimenti si aggiungono altri 4 eseguiti l'anno precedente senza i valori del Ca e K.

Come risulta dalla tabella, valori costanti sono stati ottenuti per quanto riguarda il Ca e il K dopo la fatica, nel senso di un notevole aumento della percentuale del K, (da un minimo di 15 a un massimo del 20 %), mentre i valori del Ca sono stati costanti; perciò il rapporto K/Ca resta notevolmente aumentato dopo la fatica.

Dalle tabelle riferite risulta poi evidente che la fatica non ha influenzato in modo concorde l'azione dell'adrenalina sulla pressione e le variazioni osservate sono irregolari ed individuali. La curva glicemica invece dopo il lavoro è risultata sempre notevolmente più bassa che non a riposo, cioè l'aumento della glicemia a riposo oscilla tra 0.12-1.04 per mille, mentre dopo la fatica è stato solo di 0.14-0.30 per mille.

Dalle nostre ricerche abbiamo potuto vedere nettamente un aumento costante del rapporto K/Ca dopo la fatica, aumento attribuibile all'uscita del K dai tessuti, che lo eliminano per effetto dell'aumentata concentrazione degli idrogenioni, come verrà pubblicato prossimamente da uno di noi (Goldberger).

Poichè dal su citato aumento del rapporto K/Ca ci si sarebbe aspettata una diminuzione evidente dell'azione adrenalina sulla curva della pressione dopo la fatica, mentre invece essa varia da caso a caso, dobbiamo pensare che esistano dopo la fatica altri fattori che influenzano l'andamento della curva della pressione, indipendentemente da detto rapporto.

L'osservato costante minor aumento della glicemia dopo la fatica, in seguito all'iniezione di adrenalina, è facilmente spiegabile con l'esaurimento delle riserve degli idrati di carbonio, che avviene già durante il lavoro muscolare prolungato. Questo fatto si rende già palese dalla minor quantità di glucosio contenuto nel sangue in queste condizioni, come pare evidente dall'inizio del più basso delle varie curve dopo la fatica.

(1) BANG, « Mikromethoden zur Blutuntersuchung », (1922).

(2) KRAMER e TISDALL, « J. Biol. Chem. », 47, p. 475 (1921).

(3) MAZZA e ROSSI, « Arch. Sc. Biol. », 19, p. 466 (1929).



	Caso I. (M)				Caso II. (L)			
	Glicemia		Pressione		Glicemia		Pressione	
	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.
Prima	1.32	1.30	110-70	130-90	1.28	1.28	140-70	135-85
10'	1.68	1.60	110-70	130-80			165-70	210-70
20'			110-70	135-80	1.50	1.44	175-70	200-70
30'	1.36	1.29	120-70	120-80	1.25		190-70	190-70
40'		1.27	120-70	120-80		1.42	180-70	180-80
50'	1.24		110-70	120-80	1.20	1.36	180-70	170-80
60'	1.30	1.24	110-70	120-80	1.26	1.40	160-70	160-80
70'						1.40	150-70	150-80
							140-70	140-80

	Caso III. (G)				Caso IV. (E)			
	Glicemia		Pressione		Glicemia		Pressione	
	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.
Prima	1.29	1.18	120-70	120-70	1.18	1.12	135-65	130-80
10'			155-70	140-70			140-65	150-90
20'	1.76	1.36	155-70	145-70	1.30	1.30	150-75	170-70
30'	1.23	1.28	155-70	130-65	1.38	1.19	150-75	170-70
40'	1.26	1.12	155-70	130-65			145-75	145-70
50'		1.20	145-70	130-65	1.33	1.12	145-65	135-75
60'	1.25		145-70		1.22	1.16	145-65	135-75
70'			135-70		1.16		140-65	135-80
			130-70					

	Caso V. (P)				Caso VI. (G)			
	Glicemia		Pressione		Glicemia		Pressione	
	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.
Prima	1.30	1.19	140-85	130-75	1.20	1.18	130-85	150-80
15'	2.05	1.33	200-100	190-95	2.24	1.38	185-115	190-110
30'	1.67	1.25	175-90	165-90	1.73	1.28	175-110	175-100
45'	1.40	1.22	150-90	140-70	1.38	1.20	145-95	160-85

	Caso VII. (G) $\frac{1}{2}$ mmg adr.				Caso VIII. (Ch)			
	Glicemia		Pressione		Glicemia		Pressione	
	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.
Prima	1.35	1.18	155-90	150-90	1.30	1.20	130-75	165-90
15'	1.61	1.35	175-100	185-100	2.15	1.38	180-95	195-90
30'	1.45	1.30	165-95	170-90	1.75	1.30	195-120	175-80
45'	1.30	1.20	155-90	160-90	1.40	1.20	140-85	160-80

	K mg %		Ca mg %		K/Ca	
	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.	a riposo	dopo fat.
Caso I. (M) . . .	22.3	27.3	11	10.6	2.03	2.57
Caso II. (L) . . .	23.2	26.9	11.6	10.9	2.00	2.47
Caso III. (G) . . .	24.8	28.2	10.5	10.2	2.36	2.76
Caso IV. (E) . . .	21.8	26.3	10.8	10.5	2.02	2.50

**Chimica.** — *Antimoniati minerali di calcio.* (Atotipe, romeite, ocre di antimonio calcifere). Nota di G. NATTA e M. BACCAREDDA, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Sull'esistenza dei cloruri politionici. Determinazione dell'indice di rifrazione delle soluzioni di zolfo nei cloruri di zolfo* <sup>(1)</sup>.  
Nota di A. BARONI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio G. BRUNI.

Dell'esistenza dei cloruri politionici nelle soluzioni di zolfo in cloruri di zolfo, ebbi ad occuparmi in merito alla formazione dei polisolfuri dietilici <sup>(3)</sup> da me caratterizzati mediante alcune costanti chimico fisiche (p. eb., densità, indice di rifrazione). Infatti per azione di una soluzione di un atomo di zolfo nel cloruro di zolfo  $S_2Cl_2$  sull'etilmercaptano si ottiene un penta-solfuro dietilico a p. eb.  $119^\circ$ , la cui formazione non si può spiegare che ammettendo la formazione di cloruri politionici. Le rese di preparazione di questo prodotto eseguite con miscele di zolfo e cloruro di zolfo  $S_2Cl_2$  riscaldate a diverse temperature, sono risultate in accordo con le misure crioscopiche di Bruni e Amadori <sup>(4)</sup>, con la solubilità dello zolfo in cloruro di zolfo di Hammick e Zvegintzov <sup>(5)</sup> e con la preparazione di politioderivati organici di Angeli e Magnani <sup>(6)</sup>.

Le proprietà dei cloruri di zolfo sono state oggetto di ricerche in questi ultimi anni da parte di parecchi sperimentatori <sup>(7)</sup> i quali basandosi su misure chimico fisiche hanno cercato di individuare i composti esistenti nel sistema S — Cl. Interessanti sono i lavori di Hammick e Zvegintzov i quali hanno determinato la solubilità dello zolfo nel cloruro di zolfo  $S_2Cl_2$  a temperature da  $100^\circ$  a  $235^\circ$ , solubilità che secondo essi raggiungerebbe un massimo a  $150^\circ$  per diminuire poi col crescere ulteriore della temperatura raggiungendo un valore minimo a  $230^\circ$ , e sopra tutto le ricerche di Lowry, Hatton e Jones che hanno studiato i punti di fusione dei cloruri di zolfo che contengono dal 16 al 70 % di cloro. La curva dei punti di fusione delle miscele di  $SCl_2$  e  $S_2Cl_2$  preparate di recente mostra un massimo alla composizione  $SCl_2$  e una piega alla composizione  $S_3Cl_4$ . I punti di fusione diminuiscono però

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) G. R. LEVI e A. BARONI, questi « Rendiconti », IX, 6<sup>a</sup>, 772, 1929.

(4) Questi « Rendiconti », 28, 217, 1919.

(5) « Journ. chem. Soc. », 133, 1785, 1928.

(6) « Gazzetta », 23, II, 415, 1893 e 24, I, 349, 1894.

(7) RUFF e GOLLA, « Z. anorg. Chemie », 138, 33, 1924; LOWRY, HATTON e JONES, « Journ. chem. Soc. », 131, 746, 1927; HAMMICK e ZVEGINTZOV, loc. cit.; LOWRY e JESSOP, « Journ. chem. Soc. », 1421, 1929; 782, 1930 e 1005, 1930; TRAUZ, « Ztschr. Elektrochem. », 35, 110-34, 1929; LOWRY, « Ztschr. Elektrochem. », 36, 733-34, 1930.

per invecchiamento in tubo chiuso a temperatura ambiente o per riscaldamento a  $100^\circ$  e perciò non corrispondono ad un vero equilibrio. La curva

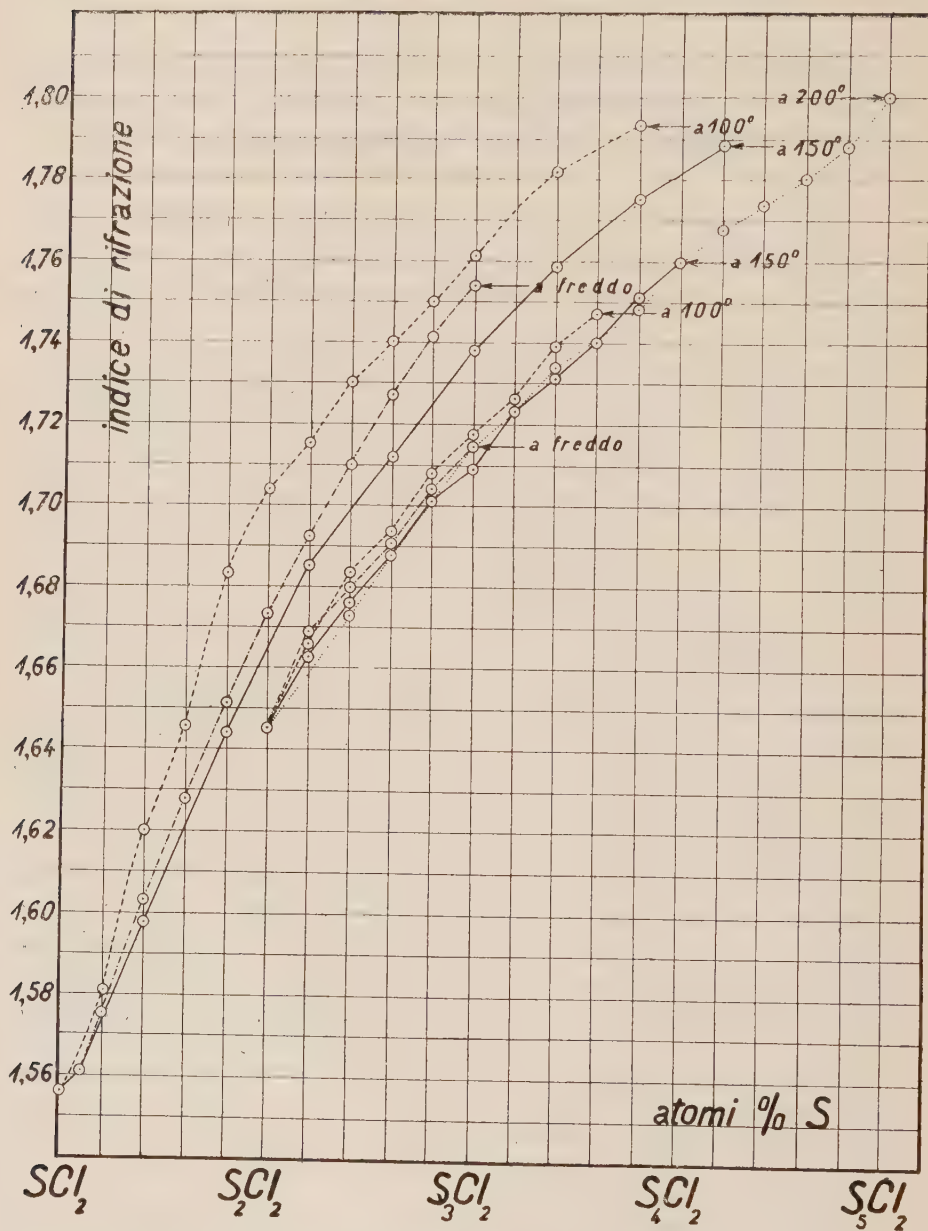


Fig. 1.

dei punti di fusione delle miscele dopo riscaldamento a  $100^\circ$  non presenta nessun massimo alla composizione di  $SCl_2$ ; secondo questi autori la scom-

parsa del massimo corrispondente a  $\text{SCl}_2$  dipende probabilmente dalla decomposizione di  $\text{SCl}_2$  in  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  e  $\text{Cl}_2$ .

Io ho ricercato l'esistenza dei cloruri politionici mediante misure di indice di rifrazione di miscele di zolfo nei cloruri di zolfo  $\text{SCl}_2$  e  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  in funzione della temperatura alla quale le miscele sono state riscaldate e in funzione dell'invecchiamento delle miscele stesse. Il riscaldamento è stato fatto in tubo chiuso e in bagno d'olio a temperature di  $100^\circ$ ,  $150^\circ$  e  $200^\circ$  per tre ore. Dopo raffreddamento ho determinato subito l'indice di rifrazione: i valori ottenuti sono riportati nella fig. 1. Nella fig. 2 sono riportati gli indici di rifrazione determinati sulle stesse miscele dopo averle lasciate in riposo per circa sei mesi.

L'indice di rifrazione è stato determinato col metodo del prisma usando un prisma di vetro con angolo di apertura di  $30^\circ$  e calcolando l'indice di rifrazione per mezzo della formula:

$$n = \frac{\text{sen } \frac{\delta_m + \alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\delta_m}{2}}$$

nella quale  $\delta_m$  è l'angolo rifrangente e  $\alpha$  è la deviazione minima. Per la facile attaccabilità dei prismi del rifrattometro di Pulfrich non mi è stato possibile usare questo strumento che, oltre a darmi risultati indubbiamente più esatti, mi avrebbe permesso di eseguire misure a temperature elevate.

Come si vede subito dai due grafici, mentre per il cloruro di zolfo  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  le curve per le miscele riscaldate a diverse temperature hanno un andamento regolare, per il cloruro di zolfo  $\text{SCl}_2$  scartano invece moltissimo. Infatti per la miscela  $\text{SCl}_2 + \text{S}$  corrispondente alla composizione  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  si dovrebbe avere verosimilmente lo stesso indice di rifrazione di questo ultimo e cioè 1.646; invece si ottiene un valore circa 1.69, quindi molto più elevato. Io ho determinato il valore dell'indice di rifrazione di  $\text{SCl}_2$  appena distillato, dopo 20 giorni e dopo riscaldamento in tubo chiuso e in bagno d'olio per tre ore a  $100^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $200^\circ$  ed ho trovato che il suo indice di rifrazione varia come è riportato nella tabella. Con questo composto quindi non si può trarre alcuna deduzione utile. Questa variazione dell'indice di rifrazione di  $\text{SCl}_2$  non è nemmeno spiegabile con la sua decomposizione in  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  e  $\text{Cl}_2$  data da Lowry, Hatton e Jones <sup>(1)</sup>. Infatti l'indice di rifrazione determinato da quelli dei componenti per una miscela di  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  e  $\text{Cl}_2$  corrispondente alla composizione  $\text{SCl}_2$  è 1.5634 ed è quindi dello stesso ordine di grandezza di  $\text{SCl}_2$  appena distillato.

(1) Loc. cit.



	$n^{16^{\circ}}$
$\text{SCl}_2$ appena distillato . . . .	1.555
$\text{SCl}_2$ dopo 20 giorni . . . .	1.574
$\text{SCl}_2$ scaldato a $100^{\circ}$ . . . .	1.577
$\text{SCl}_2$ scaldato a $150^{\circ}$ . . . .	1.579
$\text{SCl}_2$ scaldato a $200^{\circ}$ . . . .	1.580

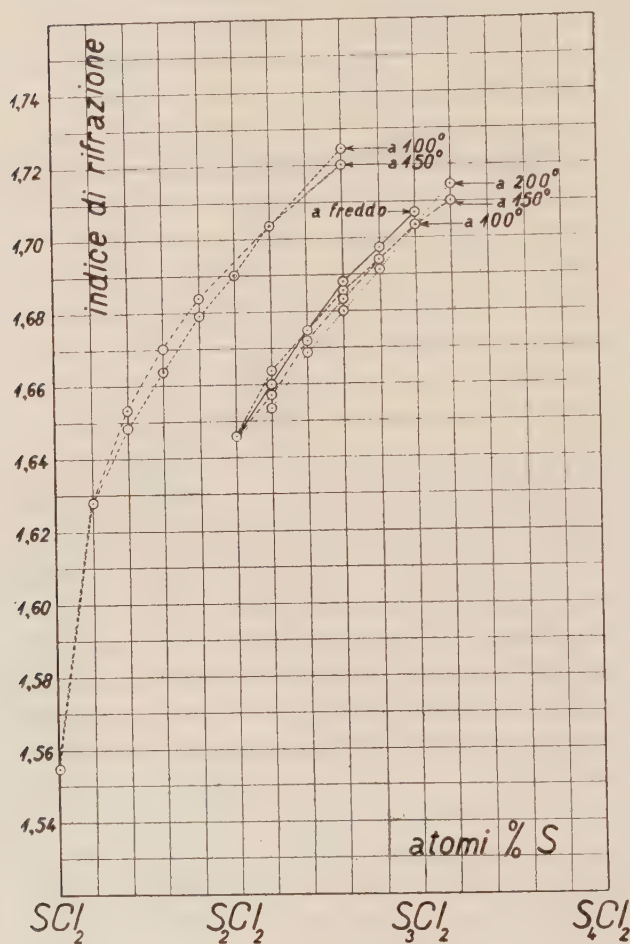


Fig. 2.

Per le miscele di zolfo nel cloruro di zolfo  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  le curve della fig. 2 (cioè per miscele invecchiate) tendono a riunirsi alla composizione del cloruro politionico  $\text{S}_3\text{Cl}_2$ . L'esistenza di questo composto si deve quindi ritenere, anche in base all'osservazione di precedenti autori, molto verosimile. Non mi sembra invece possibile l'esistenza di cloruri politionici a maggior numero di atomi di zolfo; infatti le miscele più ricche depositano facilmente

lo zolfo in eccesso, specialmente quelle invecchiate, e ciò per la capacità che ha lo zolfo di dare soluzioni fortemente soprasature dalle quali esso si separa poi solo molto lentamente. Infatti mentre per le miscele di  $S_2Cl_2 + S$  ho potuto eseguire le misure fino ad una percentuale di zolfo corrispondente al composto  $S_5Cl_2$ , le stesse miscele per invecchiamento hanno depositato zolfo; a conferma di ciò sta il fatto che filtrando lo zolfo che si è separato e determinando nuovamente l'indice di rifrazione di queste miscele, si ottengono valori che, entro gli errori di misura, coincidono con gli estremi delle curve segnate nella fig. 2.

*Riassumendo:*

Viene determinato l'indice di rifrazione delle miscele di zolfo e cloruri di zolfo  $SCl_2$  e  $S_2Cl_2$  riscaldate a  $100^\circ$ ,  $150^\circ$  e  $200^\circ$  e quello delle stesse miscele dopo invecchiamento per circa sei mesi. Dai risultati ottenuti appare verosimile l'esistenza di un cloruro politionico  $S_3Cl_2$  e sembra da escludere, in questo intervallo di temperatura, l'esistenza di composti più ricchi in zolfo, perchè le miscele a percentuali di zolfo maggiore, depositano col tempo lo zolfo in eccesso.

**Chimica.** — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica.* —  
III. *Sulla ricerca dell'Itrio* <sup>(1)</sup>. Nota di G. PICCARDI e A. SBERNA, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

La ricerca dell'Itrio si può condurre abbastanza facilmente in base agli spettri d'arco e di scintilla; lo spettro dell'Y non è infatti eccessivamente complicato, una parte di esso, riguardante l'ione  $Y^+$ , è già stata ordinata in serie ed a questo ione  $Y^+$  si debbono generalmente le righe più intense e persistenti che compaiono negli spettri d'arco e di scintilla <sup>(3)</sup>.

Servendosi dei metodi usuali dell'analisi spettroscopica si può riconoscere l'Y fino a concentrazioni prossime allo 0.01 %; le righe più intense e persistenti (che sono situate parte nel visibile, parte nell'ultravioletto) sono osservabili infatti allo 0.01 ma non allo 0.001 % <sup>(4)</sup>. La sensibilità di questi metodi nel caso dell'Y è dunque la stessa che nel caso del La. Metodi che utilizzino spettri d'assorbimento da cristalli e soluzioni non servono, poichè l'Y non presenta spettri di questo tipo nè nella regione visibile nè in quella ultravioletta; ciò rende necessario, per la ricerca di questo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) H. KAYSER, *Tabelle der Hauptlinien der Linienspektren aller Elemente*, Berlin, 1926.

(4) C. BALY, *Spectroscopy*, vol. II, p. 134 e sgg., London, 1927.

elemento, l'uso costante della scintilla, cosa assai scomoda quando si debbano fare osservazioni frequenti e continue, come avviene nelle operazioni di frazionamento delle terre rare.

Ora l'Y (come il La e molti altri elementi ad ossidi stabili) può dare a temperatura abbastanza alta un monossido YO, capace di emettere un brillantissimo spettro di bande. Questo monossido lo si può ottenere facilmente volatilizzando, ad alta temperatura, nell'aria e nell'ossigeno qualunque composto di Y.

Il monossido YO è molto stabile e può esistere anche nella fiamma dell'arco elettrico e talvolta anche in quella della scintilla, insieme all'Y atomico neutro ed ionizzato; nella fiamma ossidrica, a temperatura minore, esiste il solo YO in assenza assoluta di Y atomico, se le condizioni sono state scelte opportunamente; lo spettro che se ne ottiene è perciò unicamente formato dalle bande del monossido ed è esente da righe atomiche.

Anche l'Y, come il La, offre dunque un composto perfettamente adatto per una ricerca analitica, da condursi col metodo degli spettri molecolari e nel nostro Laboratorio da vari anni ci serviamo di questo metodo per la ricerca qualitativa dell'Y, con piena soddisfazione. Oggi abbiamo studiato le caratteristiche di questo metodo anche da un punto di vista quantitativo ed abbiamo precisato la sua sensibilità dal punto di vista qualitativo.

Lo spettro del monossido YO presenta, nella regione arancione e rossa dello spettro due sistemi di intensissime bande, strette, rapidamente sfumate verso le grandi lunghezze d'onda e non risolubili in righe neanche con i più potenti apparecchi, colle origini situate a  $\lambda\lambda$  5972 e 6132 I. A. e tutto un vasto sistema di bande larghe risolubili in righe con apparecchi adeguati, coll'origine a  $\lambda$  4817 circa <sup>(1)</sup>. Di quest'ultimo sistema sono ordinariamente visibili, in buone condizioni, oltre il gruppo a  $\lambda$  4817 ( $n' - n'' = 0$ ) anche i gruppi a  $\lambda$  4650 ( $n' - n'' = 1$ ),  $\lambda$  4495 ( $n' - n'' = 2$ ) e  $\lambda$  5022 ( $n' - n'' = -1$ ). Questo sistema a differenza di quelli rossi, che sono formati da un unico gruppo, è dunque abbastanza completo nei riguardi dell'oscillazione; la distribuzione delle intensità, quantunque non abbiamo eseguito particolari misure in proposito, sembra essere quella parabolica di Condon. Le bande di questo sistema sono meno intense e persistenti di quelle situate nel rosso e non compaiono si può dire mai negli spettri d'arco e di scintilla. Quelle situate nel rosso invece sono intensissime e persistentissime e compaiono negli spettri d'arco e di scintilla anche per concentrazioni relativamente piccole di Y; ne sono perciò affetti tutti gli spettri di terre rare che possono contenere l'Y come impurezza, riprodotti nelle tavole di Eder e Valenta <sup>(2)</sup> e di Hagenbach e Konen <sup>(3)</sup>. Si incontra cioè una

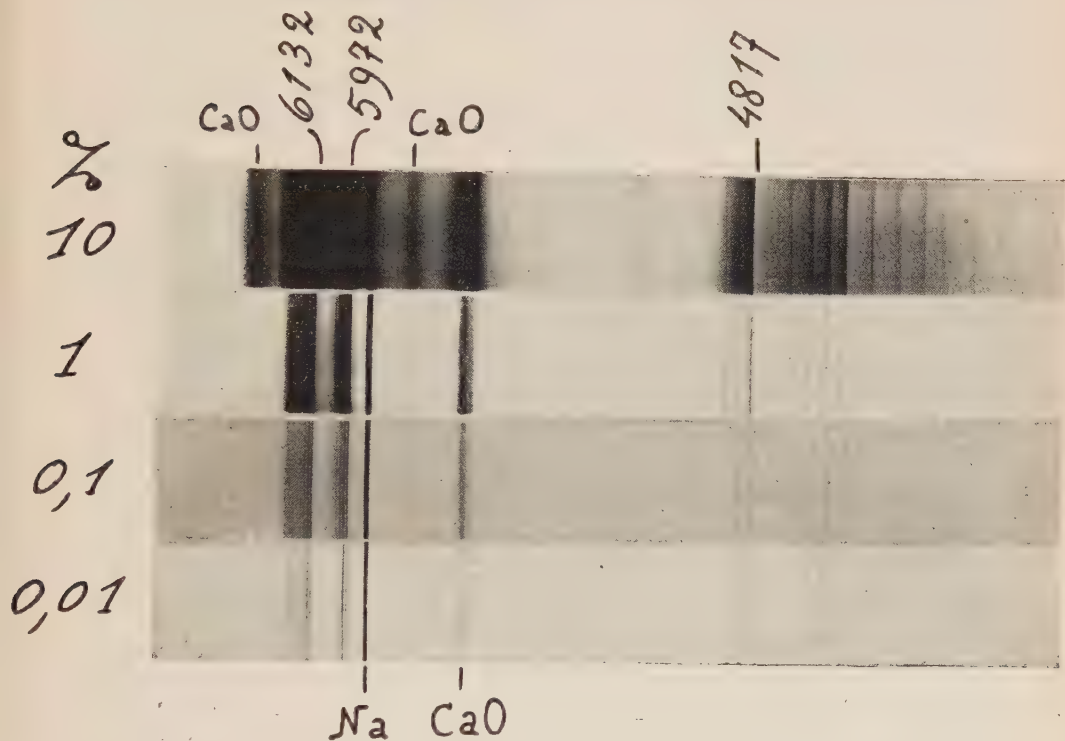
(1) I valori relativi alle lunghezze d'onda delle teste delle bande appartenenti a questo sistema, sono stati soltanto stimati. Sono in corso misure precise a riguardo.

(2) EDER e VALENTA, *Atlas Typischer Spektren*. Wien, 1928.

(3) HAGENBACH e KONEK, *Atlas der Emissionsspektren* ecc. Iena, 1905.

fortissima analogia di comportamento, oltre ad una perfetta somiglianza di aspetto esteriore, fra le bande strette e non risolubili in righe delle molecole YO e LaO e le bande larghe e risolubili delle stesse molecole.

Per ottenere lo spettro del monossido YO ci siamo serviti dello stesso dispositivo di fiamma, usato da gran tempo nel nostro Laboratorio e descritto in una precedente Nota <sup>(1)</sup>. Per caricare la fiamma di YO, abbiamo preparato delle soluzioni nitriche al 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0005 % con dell' Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> relativamente puro preparato nel nostro Laboratorio; soluzioni che abbiamo successivamente polverizzato nella fiamma, cominciando sempre



dalla più diluita, per evitare errori dovuti alla nebbia di ossido di Y, diffondentesi nell'ambiente. Anche in questo caso la volatilizzazione è completa, come dimostra l'assenza assoluta di fondo continuo.

Essendo le bande più intense e persistenti situate in una regione di grande sensibilità per l'occhio, la ricerca diviene più semplice e vantaggiosa che nel caso del La. Già alla concentrazione delle 0.0005 % si cominciano ad osservare sia pure con molta difficoltà i due sistemi di bande a  $\lambda$  5972

(1) G. PICCARDI e A. SBERNA, *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica*. II. Sulla ricerca del La. Questi « Rendiconti » in corso di stampa.



e  $\lambda 6132$ ; a quella dello 0.001 questi due sistemi si distinguono chiaramente; a quella dello 0.01 si cominciano ad osservare anche le bande del gruppo  $n' - n'' = 0$  a  $\lambda 4817$  e man mano che la concentrazione aumenta cresce il numero delle bande osservabili in ciascun gruppo ed il numero dei gruppi; alla concentrazione del 10 % tutto lo spettro è al completo.

Nei riguardi di una ricerca qualitativa, il metodo degli spettri molecolari è dunque almeno dieci volte più sensibile di quello degli spettri atomici ed è infinitamente più comodo e maneggevole essendo la ricerca dell'Y possibile anche visualmente; anzi, è preferibile, questa volta, l'osservazione visuale diretta alla registrazione fotografica, essendo situate le bande più intense in una regione di ottima sensibilità dell'occhio e di scarsa sensibilità della lastra fotografica.

Nei riguardi di una ricerca quantitativa abbiamo trovato, analogamente a quanto trovammo nel caso del LaO, che per ragioni fotometriche, le bande strette strette e persistenti a  $\lambda 5972$  e  $\lambda 6132$  servono bene alle piccole concentrazioni, mentre i vari gruppi del sistema a  $\lambda 4817$  sono meglio utilizzabili per grandi concentrazioni. Servendoci di fotogrammi eseguiti in condizioni standards, su soluzioni titolate, abbiamo potuto accertare, mediante la registrazione fotometrica delle intensità presentate da uno stesso gruppo di bande nei vari casi, che la precisione del metodo per l'Y è all'incirca la stessa che per il La; si può cioè stimare una variazione del 5 % sulla concentrazione totale e cioè entro larghissimi limiti nella concentrazione stessa, da 1 : 10 a 1 : 100.000.

Anche in questo caso dunque, il metodo degli spettri molecolari può sostituire molto vantaggiosamente per sensibilità, precisione e comodità i metodi consueti dell'analisi spettroscopica. Riportiamo qui le fotografie dello spettro del monossido YO ottenute a varie concentrazioni, 10, 1, 0.1, 0.01 %; non riportiamo quello ottenuto allo 0.001 % non essendo possibile la riproduzione di bande risultate fotograficamente troppo deboli a cagione della poca sensibilità della lastra. Lo spettro presenta oltre alle bande del YO anche quelle del CaO, le righe D del Na (e la riga  $\lambda 4227$  Ca·I qui non riprodotta) contenendo il campione Y usato circa l'1 % di Ca e piccole quantità di Na. Si noti la grande intensità che la banda verde del CaO presenta anche ad una concentrazione circa cento volte più piccola di quella dell'Y. Le fotografie sono state eseguite con un piccolo spettrografo Hilger D2.



**Paleontologia.** — “*Sanfilippaster*”, nuovo genere di Echinide del Cretaceo superiore<sup>(1)</sup>. Nota di G. CHECCHIA-RISPOLI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio A. MARTELLI.

Nel 1908 il Cottreau ha descritto col nome di *Proraster Geayi* un nuovo echinide del Senoniano superiore dei dintorni di Marohita nella provincia di Mananjary, sulla costa orientale dell'isola di Madagascar<sup>(3)</sup>. Questo echinide schizasteriforme ha, tra gli altri caratteri che lo distinguono, l'ambulacro impari ricettato « in un solco largo e profondo che intacca molto fortemente l'ambito; in questo punto le alte pareti del solco si avvicinano e non lasciano tra di esse che un piccolo spazio al di sopra del profondo intacco ben visibile se si guarda l'echinide dall'alto ».

Nel materiale echinologico raccolto dal comm. Ignazio Sanfilippo durante l'esplorazione mineralogica della bassa valle del Sofeggin (Tripolitania), ho rinvenuto un individuo inseparabile genericamente e specificamente dalla specie malgascia.

Lo stato di conservazione dell'unico esemplare contrariamente a quello di tutti gli altri echinidi della Tripolitania da me descritti, lascia molto a desiderare: manca quasi completamente la faccia inferiore ed inoltre il guscio è fortemente deformato nella parte posteriore. Ciò non pertanto è possibile riconoscere alcuni dei più importanti caratteri: così il lato sinistro della faccia abactinale essendo rimasto in posto, offre la possibilità di studiare la conformazione del solco anteriore; la superficie del guscio, risparmiata dall'erosione, permette di studiare l'ornamentazione ed il percorso dell'unica fasciola.

Il solco anteriore è lungo, largo, fortemente scavato sin dal suo inizio e concavo. La sua profondità e larghezza sono massime verso la metà della lunghezza; al di là il solco va restringendosi fino a quando un po' al di sopra della linea dell'ambito, i bordi superiori si avvicinano bruscamente e in modo da non lasciare che un ristretto spazio che li divide, in corrispondenza del tratto in cui la fasciola peripetala attraversa il guscio. Oltre la fasciola, i bordi tornano ad allontanarsi rapidamente l'uno dall'altro, descrivendo sulla faccia inferiore un semielissi, alla base del quale si apre il peristoma.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Paleontologia dell'Università di Roma.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) J. COTTREAU, *Echinides de Madagascar*, in « Annales de Paléontologie », t. III, p. 26, Pl. IV, figg. 5, 5a, 5b, 5c, 1908.

Le pareti del solco sono fortemente scavate, cosicchè una sezione trasversale del solco verso la metà della lunghezza ha forma subcircolare. Le escavazioni laterali si attenuano verso la parte superiore dell'ambito, mentre sono fortissime in quella inferiore sino al peristoma. L'intacco prodotto dal solco sul guscio raggiunge un centimetro di profondità ed è ben visibile, come ha scritto il Cottreau, se si guarda l'echinide dall'alto. Le creste che limitano il solco sono strette ed angolose. Le zone porifere sono fortemente allontanate fra di loro e quindi lo spazio interzonale è molto largo.

Gli ambulacri pari anteriori sono racchiusi in solchi lunghi, stretti, scavati, poco divergenti e diritti sino all'estremità distale. Le zone porifere sono costituite di coppie di pori molto avvicinate, in numero di 45 per ogni zona; i pori sono ovalari ed appuntiti verso l'interno e coniugati da un solchetto. Come ha osservato il Cottreau, le zone anteriori sono un po' più strette delle posteriori: lo spazio interzonale è poco più largo di una zona porifera.

Gli ambulacri posteriori sono lunghi un po' meno della metà di quelli anteriori, molto divergenti, scavati ed ogni zona porifera consta di 24 paia di pori.

La fasciola peripetala ha un percorso identico a quello di molti *Schizaster*: le due branche, dopo aver rasentato le estremità dei petali anteriori, si dirigono obliquamente verso il solco impari, che attraversano nel punto più stretto. Nessuna traccia di fasciola latero-sub-anale; la possibilità della sua esistenza è da escludersi, perchè la regione del guscio ove essa suole presentarsi in altri echinidi (*Schizaster* p. es.) è ben conservata.

La faccia superiore del guscio è ornata di tubercoli, a mammellone perforato, strettamente avvicinati e seriat, che sul contorno gradatamente s'ingrandiscono e si distanziano, raggiungendo la massima grandezza nella regione marginale della faccia inferiore, ove sono molto radi. Tutti i tubercoli sono impiantati su zoccoli obliqui caratteristici. Granulazione miliare finissima e più sviluppata sulla faccia inferiore.

Per causa dello stato di conservazione dell'unico esemplare studiato nulla posso dire dell'apparecchio apicale e del periprocto; del peristoma è rimasta solo una piccola parte, che ne indica la posizione alla base del largo e profondo solco.

Le dimensioni sono di c. 50 mm. per la lunghezza, che è corrispondente all'incirca a quella del più grande degli esemplari malgasci illustrati dal Cottreau.

In un successivo lavoro il Cottreau ha studiato altri cinque esemplari di questa specie pure del Madagascar, in tre dei quali i bordi anteriori del solco verso l'ambito vengono a contatto, come nell'esemplare libico. Inoltre l'autore conferma la mancanza della fasciola latero-sub-anale e la presenza di quattro pori genitali <sup>(1)</sup>.

(1) COTTREAU, *Paléontologie de Madagascar*. X, *Fossiles crétacés de la Côte orientale*, in « Ann. de Paléont. », Tom. XI, fasc. III-IV, p. 9, Pl. II, fig. 9, 1922.

Come ho detto in principio, gli esemplari malgasci sono riportati dal Cotteau al genere *Proraster*, istituito nel 1901 dal Lambert <sup>(1)</sup>, che ne ha perfezionato la diagnosi in successive pubblicazioni <sup>(2)</sup>; nella più recente è così definito: « *Test schizastèriforme, avec large et profond sillon antérieur; face supérieure acuminée en arrière; apex ethmophracté à quatre pores génitaux; pétales pairs flexueux, excavés; tubercules petits, scrobiculés; une seule fasciole peripétale* » <sup>(3)</sup>.

Il genere *Proraster* appartiene, secondo gli autori dell'*Essai*, agli *Hemiasterinae* Lamb., che formano una tribù della sottofamiglia *Periasteridae* Lamb., ed è posto accanto ad *Hemiaster*, di cui un tempo fu considerato solo come un sottogenere. La tribù degli *Hemiasterinae* è caratterizzata dalla presenza di una sola fasciola peripetala, che non discende avanti sulla faccia inferiore <sup>(4)</sup>.

Il tipo del genere è lo *Schizaster atavus* Arnaud (1883) del Senoniano, che il Lambert ha recentemente rifigurato tra gli echinidi fossili della Catalogna. Inoltre sono compresi nello stesso genere l'*Hemiaster Dalli* Clark del Cenomaniano di Bexar Couty, Tex <sup>(5)</sup>; tre specie del Senoniano della Persia (*Proraster centrosus* Cott. e Gauth., *Pror. Douvillei* Gauth., e *Pror. Morgani* Cott. e Gauth.), che per i loro autori sono tutti e tre degli *Opisaster* <sup>(6)</sup>, ed il *Pror. Geayi* Cottr. del Senoniano del Madagascar.

Quest'ultimo però paragonato con gli altri *Proraster* si distacca per vari importanti caratteri. In *Proraster atavus*, come in quelli persiani, il solco è largo e più o meno profondo, e l'intacco prodotto sull'ambito è debole; in *Pror. Dalli* il solco è più profondo e l'intacco è forte; ma la costituzione del solco in tutte queste specie non è paragonabile a quella degli esemplari malgasci e libici, ove la profondità interessa fortemente il guscio, le pareti sono fortissimamente scavate, gli alti bordi del solco vengono a contatto nel punto ove passa la fasciola, mentre il fondo di esso si piega in basso intaccando profondamente il guscio; sulla faccia inferiore le creste interambulacrali divergono di nuovo fortemente, ed il solco raggiunge avanti al peristoma la massima larghezza e profondità formando una specie di vestibolo davanti a questo.

In tutte le specie riferite a *Proraster* poi gli ambulacri anteriori sono molto flessuosi e s'incurvano indietro verso l'estremità distale; mentre negli

(1) LAMBERT, *Essai d'une monographie du genre Micraster* in de Grossouvre: *Stratigraphie de la Craie supérieure*, p. 177, 1901.

(2) LAMBERT, *Description des Échinides fossiles de la province de Barcelone*, p. 103, 1907; Id., *Étude sur quelques Échinides des couches à Hippurites de Gosau*, p. 93, 1907.

(3) LAMBERT, *Revision des Échinides fossiles de la Catalogne*, p. 50, 1927.

(4) LAMBERT et THIÉRY, *Essai de nomenclature raisonnée des Échinides*, p. 506, 1924.

(5) CLARK and TWITCHELL, *The mesozoic and cenozoic Echinodermata of the United States*, p. 90, 1915.

(6) COTTEAU et GAUTHIER, *Mission scientifique en Perse*, 1895; GAUTHIER, *Mission scientifique en Perse. Supplément aux Échinides*, 1902.

esemplari qui studiati sono diritti, accostati al solco impari, dal quale sono separati dalle strette creste interambulacrali.

Infine nei *Proraster*, i tubercoli sono radi e profondamente scrobicolati; negli esemplari malgasci e libici invece sono fitti ed impiantati su zoccoli obliqui caratteristici.

Questi caratteri, specialmente il primo e l'ultimo, distinguono talmente gli esemplari del Madagascar e della Libia, che un riferimento generico di essi a *Proraster*, non pare possibile. È bene rilevare che in un primo tempo, il Lambert ed il Thiéry compresero la specie del Cottreau fra i *Proraster* <sup>(1)</sup>; ma in seguito il Lambert non ne fa più parola tra quelle che riferisce al suo nuovo genere <sup>(2)</sup>.

Per tutte le ragioni su esposte, io sono del parere di separare gli esemplari malgasci e libici dai *Proraster* e propongo per essi la istituzione di un nuovo genere, che denomino *Sanfilippaster*, dal nome dell'esimio studioso della geologia tripolitana. La posizione nel sistema di questo nuovo genere è nella tribù degli *Hemiasterinae*, per la presenza della sola fasciola peripetala, che non discende avanti sulla faccia inferiore. Il genere proposto resta così caratterizzato: «Guscio schizasteriforme, di medie dimensioni, «con solco anteriore largo e profondissimo, a pareti fortemente scavate, «che si restringe nella parte anteriore del guscio, intaccandone profonda- «mente il bordo, e che riallarga di nuovo nella faccia inferiore sino al «peristoma, che si trova spostato indietro dal bordo. Fasciola peripetala «presente. Tubercoli fitti sulla faccia inferiore, più radi su quella inferiore «ed impiantati su zoccoli obliqui».

Il genere non comprende al presente che una specie, *S. Geayi* Cottreau, del Senoniano superiore del Madagascar e della Tripolitania.

**Biologia.** — *Le onde cosmiche e l'oscillazione cellulare.* Nota di G. LAKHOVSKY, presentata dal Socio P. R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Vedi *Essai*, p. 509.

(2) Vedi *Échin. foss. Catalogne*.



**Biologia.** — *Sul contenuto gassoso dei cenobii di “Rivularia polyotis (J. Ag.) Hauck”* <sup>(1)</sup>. Nota preliminare di ZIPPORÀ DANIN presentata <sup>(2)</sup> dal Socio A. HERLITZKA.

I.

*Rivularia polyotis* vive in cenobii sugli scogli o sulle pietre situate al limite tra l'alta e la bassa marea. I cenobii semisferici sono ripieni di gas, i quali, variando di volume durante la giornata, producono modificazioni visibili della cavità cenobiale.

Questa cavità, di forma irregolare, diviene in alcuni casi molto ampia e quasi semisferica durante le ore di maggiore illuminazione, e ciò per la proprietà che ha la gelatina che avvolge i filamenti dell'alga, di potersi distendere ed assottigliare sotto la pressione del gas, come sarà dimostrato in altro lavoro.

Questo fatto può trovare il suo parallelo nei ricettacoli di *Fucus Virsoides* J. Ag. Turn, i quali pure cambiano di forma e di volume sotto la spinta dei gas che si sviluppano nel loro interno.

I gas dei *Fucus* contengono dell'ossigeno, il quale varia di quantità nelle varie ore della giornata e che è dovuto alla funzione clorofilliana (Colla).

Era interessante continuare lo studio comparativo della formazione dei gas anche in queste alghe, per constatare se esse si comportavano nella stessa guisa che era stata riscontrata nelle cavità di alghe brune e verdi. Infatti la resistenza delle pareti delle cavità è, nelle varie alghe, molto diversa, come anche sono diverse le strutture morfologiche, del che sarà dato conto in ulteriori pubblicazioni.

Il metodo usato fu quello già descritto dal Colla nelle sue ricerche sui gas delle alghe; il gas cioè prelevato dalla vescica tenuta sott'acqua con una siringa di Pravaz fu analizzato col microrespirometro di Krogh. La scelta cadde su questo metodo, in quanto esso permette di eseguire le analisi con rapidità, sì che è possibile fare determinazioni in serie, come è richiesto dalla natura del problema preso in esame. L'anidride carbonica fu assorbita da una soluzione di idrossido di potassio al 10 % e l'ossigeno da una soluzione satura di idrosolfito in potassa caustica al 5 %.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia di Torino, Sezione marina di Trieste.

(2) Nella seduta del 21 febbraio 1932.



Si è pure cercato di constatare se sia presente anche ossido di carbonio, che era stato riscontrato da Langdon e Gaylei nelle cavità di *Nereocystis*, mentre Colla non poté rinvenirlo in quelle di *Fucus*, di *Sargassum* e di *Cystoseira*. Ho usato a questo scopo soluzioni di emoglobina, che fissa l'ossido di carbonio sotto forma di carbossemoglobina, e soluzioni di cloruro di palladio, che assorbe tutti i gas riducenti, compreso quindi l'ossido di carbonio. I risultati furono sempre negativi.

Il materiale usato furono i cenobii adulti: essi si distinguono per il loro colore verde scuro e contengono poche concrezioni di carbonato di calcio racchiusi in una sostanza gelatinosa. I cenobii più evoluti sono invece di colore giallognolo e sono cosparsi di abbondanti concrezioni calcaree; i cenobii giovani infine non hanno quasi cavità. Anche di queste particolarità morfologiche sarà data notizia ulteriore. Prima di misurare le variazioni giornaliere di  $O_2$ , ho voluto studiare quali ne sono le oscillazioni individuali nelle colonie adulte.

1) 15 agosto 1931.

Ore	Temp. $H_2O$	I Cenobio	II Cenobio
7,30	24°	27.7 %	32.9 %
13	24°5	69.8	65.9
21		28.9	35

2) 21 agosto 1931.

Ore 13	I Cenobio 63.7 %	II Cenobio 63.4 %
--------	------------------	-------------------

3) 22 agosto 1931. Giornata serena e limpida. Sole.

Ore	Temp. $H_2O$	I Cenobio	II Cenobio
6	24°	14 %	17.5 %
9	24°	40.2	43.9

4) 25 agosto 1931.

Ore	Temp. $H_2O$	Cenobi	I	II	III	IV	V
17,30	23°8	% $O_2$	41.6 %	46.6 %	40,1 %	47.3 %	46.7 %

5) 28 agosto 1931.

Ore	Temp. $H_2O$	I Cenobio	II Cenobio
17		54.8 %	54.7 %

Da questi dati si vede che la differenza del contenuto percentuale di  $O_2$  nell'intera massa gassosa, negli individui adulti posti nelle medesime condizioni sperimentali, può variare da 0.1 fino a 7.2.

Per quanto questi limiti siano abbastanza grandi, essi vengono superati e di gran lunga dalle oscillazioni del contenuto percentuale di  $O_2$  trovato nei gas estratti, durante le diverse ore della giornata, da individui scelti con cura, in modo da avere un materiale omogeneo quanto più è possibile.

Riporto qui i valori da cui risultano le variazioni giornaliere su accennate. Esse si riferiscono ad esemplari viventi su frammenti di roccia posti non in bacinelle, ma su un galleggiante appena affiorante in pieno mare. Le pietre venivano così coperte da un lieve strato d'acqua e si evitarono in tal modo gli sbalzi di temperatura, mentre le alghe continuavano a rimanere nelle loro condizioni naturali di vita.

6) 15 agosto 1931. Giornata serena. Sole. Temp. H<sub>2</sub>O 25°.

Ore	7.20	10	11	13	16	19	21
‰ O <sub>2</sub>	27.7	33.9	50	69.8	49.6	33.6	29

7) 16 agosto 1931. Cielo coperto. Dalle 10 in poi sole. T° acqua 24°.

Ore	7	10.40	13	19
‰ O <sub>2</sub>	13.4	42.8	57.9	46

8) 17 agosto 1931. Cielo sereno. Sole. Illuminazione forte.

Ore	7	8.30	10.20	13	16
Temp. H <sub>2</sub> O	22°6		25°	25°	
‰ O <sub>2</sub>	26.4	30.3	50.17	70.3	51.2

9) 20 agosto 1931.

Ore	7	9	11	13
‰ O <sub>2</sub>	14	44.6	52.6	60.6

10) 21 agosto 1931. Nuvole. Coperto.

Ore	8.45	13
‰ O <sub>2</sub>	34.4	63.7

11) 22 agosto 1931. Giornata radiosa.

Ore	6	8	9	10.40	13	16	19
‰ O <sub>2</sub>	14	26.5	40.2	57	68.5	53.8	29.5

12) 25 agosto 1931. Giornata piovosa. Coperto di mattina. Dalle 14 sole.

Ore	8	10	12	13.50	16	19
‰ O <sub>2</sub>	8.3	13.7	16.2	31.1	34.4	40.1

13) 27 agosto 1931. Coperto. Nuvole di mattina. Sereno dalle 17 in poi.

Ore	8	10	13	17	19
‰ O <sub>2</sub>	11	17	23	22.9	37.5

Questi protocolli ci dimostrano che, con l'aumentare della luminosità, si ha un aumento dell'O<sub>2</sub>, il quale, nelle giornate serene e durante le ore più luminose, sale fino al 70 ‰. (v. curve fig. 1).

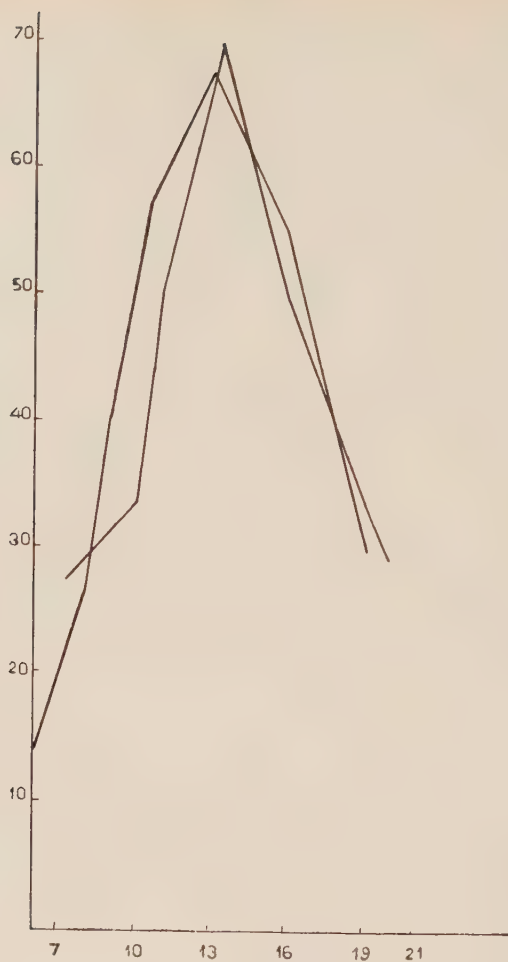


Fig. 1. — Curve di variazione della % di O<sub>2</sub> in giornate belle con illuminazione forte, corrispondenti ai protocolli N. 6 e 11.

Sull'ascissa sono segnate le ore.

Sull'ordinata sono segnate le % O<sub>2</sub>.

Nelle giornate coperte tale aumento non è così considerevole.

Dal punto di vista ecologico, sono interessanti i protocolli N° 12 e 13, in cui si vede un netto aumento della percentuale di O<sub>2</sub> quando il cielo si rasserenava (v. curva fig. 2).

Le Rivularie tenute all'oscurità per due giorni, presentavano praticamente i medesimi valori percentuali. Infatti i diversi campioni esaminati, diedero i seguenti valori:



Fig. 2. — Curva di variazione della % di O<sub>2</sub> in giornata piovosa, corrispondente al protocollo N. 12.

Sull'ascissa sono segnate le ore.

Sull'ordinata sono segnate le % O<sub>2</sub>.

14)

	I	II	III	IV
O <sub>2</sub> %	10	11	7.8	6.5

Per quanto si tratti di colonie, viventi al massimo alla profondità di un metro, ho voluto osservare quale influenza avesse lo spessore di un notevole strato di acqua sulla produzione del gas.

Ho appeso perciò alcuni frammenti di pietra, portanti le alghe, a una funicella, tenendoli così immersi nel mare a diverse profondità. Alla medesima ora prelevavo campioni di gas dagli esemplari sottoposti a queste condizioni.

15) 18 agosto 1931. Cielo sereno. Sole.

Ore 13.

Prof. cm.	5	110	270
% O <sub>2</sub>	65.4	64.4	51.2

16) 19 agosto 1931.

	Prof. cm.	5	110	270
Ore 11: % O <sub>2</sub>		52.6	52.2	51.2
» 13 » »		70.3	65.5	54.1

17) 20 agosto 1931.

	Prof. cm	5	100	220
Ore 8.40: % O <sub>2</sub>		44.6	42.1	39.6
» 13 »		63.2	60.6	45.8

18) 22 agosto 1931. Cielo sereno. Sole.

	Prof. cm	5	85	270
Ore 9: % O <sub>2</sub>		43.9	40.3	33.6
» 13 »		68.5	62.6	61.8
» 18 »		29.5	29.3	28.2

Da questi protocolli noi vediamo che la percentuale di O<sub>2</sub> nelle alghe tenute alla superficie e a circa 1 m. di profondità varia nei limiti delle variazioni individuali; durante le ore meno luminose parrebbe che l'azione dello strato di acqua si faccia sentire.

Queste alghe, durante la bassa marea, rimangono per lungo tempo all'aria, e finchè non seccano trasformandosi in masse crostose e perdendo fino all'86 % di acqua, contengono ancora gas nel loro interno.

Questo gas prelevato dalla cavità cenobiale dopo due ore di soggiorno del cenobio all'aria, ha date le seguenti percentuali di O<sub>2</sub>:

19)

Campioni a secca	41.3	40.5	47.6	40
» in condizioni normali	60.1	64	63.5	58

Se però i cenobii si mantengono umettati, si nota che i gas hanno la medesima composizione di quelli tenuti sott'acqua.

L'anidride carbonica subisce variazioni percentuali notevoli. Nelle prime ore del mattino si hanno valori che arrivano fino al 7 %. Queste percentuali diminuiscono fino al 2 % durante la maggior produzione di O<sub>2</sub>. Nei pomeriggi caldi si ha un secondo massimo (fino al 5 %).

Da tutti questi fatti, si può notare che i gas secreti nelle cavità cenobiali di *Rivularia polyotis* si comportano come quelli che vengono formati nelle cavità corrispondenti, sia nelle alghe brune che in quelle verdi.

Ringrazio vivamente la prof. Silvia Colla per l'interesse con il quale mi ha diretta e seguita in queste ricerche.



PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE  
PRESSO LA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO REALE PER LA *MATEMATICA*

(Scadenza: 31 dicembre 1931 — Premio L. 10.000.)

1. ANDRETTA ALFONSO. — « Ideometro, ideametria, geometria » (st.).

2. COMESSATTI ANNIBALE. — 1. « Saggi di una teoria geometrica delle forme binarie. (I. Idee direttive e loro prima conseguenza. II. Teorema di Bruno-Covarianti conici. III. Sistema dei covarianti di dato grado e teorema di Sylvester. IV. Rappresentazione tipica dei covarianti » (st.). — 2. « Osservazioni di geometria della retta in un  $S_r$  » (st.). — 3. « Intorno alle superficie algebriche irregolari con  $p_g \geq 2$  ( $p_a + 2$ ) e ad un problema analitico ad esse collegato » (st.). — 4. « Nuovi contributi geometrici alla teoria delle forme binarie » (st.). — 5. « Sur la classification des courbes algébriques et sur le théorème d'existence de Riemann » (st.). — 6. « La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi » (st.). — 7. « Introduzione alla geometria delle forme binarie » (st.). — 8. « Sopra certe trasformazioni dei periodi normali » (st.). — 9. « Sulle varietà abeliane reali ». Memoria I (st.). — 10. « Sulle varietà abeliane reali ». Memoria II (st.). — 11. « Complementi al problema dei gruppi semicanonici reali » (st.). — 12. « Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche » (st.). — 13. « Sulle curve ellittiche reali » (st.). — 14. « Osservazioni sulle curve iperellittiche reali » (st.). — 15. « Considerazioni intorno ai metodi generali di rappresentazione della Geometria descrittiva ed al teorema di Pohlke » (st.). — 16. « Sulla connessione delle superficie algebriche reali » (st.). — 17. « Sulle riemanniane algebriche » (st.). — 18. « Sulle curve di Galois » (st.). — 19. « Curve algebriche e funzioni fuchsiane » (st.). — 20. « Le involuzioni sulle curve algebriche ed il teorema generale di diramazione per le funzioni fuchsiane » (st.). — 21. « Studi sulle equazioni differenziali fuchsiane di genere zero » (st.). — 22. « Geometria non staadtiana » (st.). — 23. « Sulle trasformazioni birazionali delle curve algebriche interpretate come rotazioni del piano iperbolico » (st.). — 24. « Sulle superficie multiple cicliche » (st.). — 25. « Note critiche sui postulati della Geometria proiettiva » (st.). — 26. « Reelle Fragen in der algebraischen Geometrie » (st.). — 27. Recensione delle « Vorlesungen über algebraische Geometrie » di F. Severi. (st.). — 28. Recensione delle « Conferenze di geometria algebrica » di F. Severi. (st.). — 29. « Lezioni di Geometria descrittiva » (st.). — 30. « Lezioni di Geometria analitica e proiettiva » (st.). — 31. « Geometria descrittiva ed applicazioni » (ms.).

3. DISPENSA ILLUMINATO. — « Sopra la impossibilità di sviluppare  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$  nelle serie delle potenze di  $\alpha$  » (ms.).

4. FANTAPPIÈ LUIGI. — 1. « I funzionali analitici » (st.). — 2. « I funzionali delle funzioni di due variabili » (st.). — 3. « La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali » (st.). — 4. « Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti » (st.). — 5. « Cenni riassuntivi su la teoria dei funzionali analitici » (st.). — 6. « Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso » (st.). — 7. « I massimi e minimi dei funzionali analitici reali » (st.). — 8. « Sull'espressione generale dei funzionali analitici lineari » (st.). — 9. « Le calcul des matrices » (st.). — 10. « Les singularités d'une fonctionnelle analytique linéaire d'une fonction de plusieurs variables » (st.). — 11. « Sur l'extension aux séries de puissances multiples d'un théorème de M. Hadamard » (st.).

5. VITALI GIUSEPPE. — 1. « Geometria nello spazio hilbertiano » (st.). — 2. « Rapporti inattesi fra alcuni rami della Matematica » (st.). — 3. « Un trentennio di pensiero matematico » (st.). — 4. « Sulle definizioni di aggregati misurabili e di funzioni sommabili » (st.). — 5. « Sulla condizione della integrabilità riemanniana lungo un dato intervallo delle funzioni limitate di una variabile reale » (st.). — 6. « Sulla definizione di integrale delle funzioni di una variabile » (st.). — 7. « Sulle funzioni continue » (st.). — 8. « Sulla misura dei gruppi di punti di una retta » (st.). — 9. « Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali » (st.). — 10. « Sulle equazioni secolari » (st.). — 11. « Calcolo indiretto di alcuni determinanti » (st.). — 12. « Sulle sostituzioni lineari ortogonali » (st.). — 13. « « Sopra alcune questioni algebriche » che si presentano in un lavoro del prof. Tonolo » (st.). — 14. « Una derivazione covariante formata coll'ausilio di  $n$  covarianti del I° ordine » — 15. « Intorno ad una derivazione nel Calcolo Assoluto » (st.). — 16. « Sopra alcune operazioni di Calcolo Assoluto » (st.). — 17. « I fondamenti del Calcolo Assoluto Generalizzato » (st.). — 18. « Sopra una derivazione covariante nel Calcolo Assoluto Generalizzato » (st.). — 19. « Sulle derivazioni covarianti nel Calcolo Assoluto Generalizzato » (st.). — 20. « Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante » (st.). — 21. « Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel Calcolo Assoluto Generalizzato » (st.). — 22. « Geometria nello spazio hilbertiano » (st.). — 23. « Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie » (st.). — 24. « Sulla curvatura delle varietà » (st.). — 25. « Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie » (st.). — 26. « Saggio di ricerche geometrico-differenziali » (st.). — 27. « Forme differenziali a carattere proiettivo associate a certe varietà » (st.). — 28. « Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà » (st.). — 29. « Evoluta (?) di una qualsiasi varietà dello spazio hilbertiano » (st.). — 30. « Sopra i problemi di massimo o di minimo riguardanti le varietà nello spazio hilbertiano » (st.). — 31. « Determinazione delle superficie ad area minima nello spazio hilbertiano » (st.). — 32. « Sul principio di Hamilton » (st.). — 33. « Alcuni elementi di meccanica negli spazi curvi » (st.).

#### ELENCO DEI CONCORRENTI AI PREMI MINISTERIALI PER LE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

(Scadenza 31 dicembre 1931 — Premi due da 5000 lire).

1. APRILE GIORGIO ANTONIO. — 1. « Sulle involuzioni di coppie di punti dello spazio ordinario » (ms.). — 2. « Su gli  $(r-1)$  complessi di rette, dell' $S_r$ , d'ordine 1, e loro applicazione alle trasformazioni cremoniane dell'iperspazio » (ms.).

2. DA RIOS LUIGI SANTE. — 1. « Sui vortici piani indeformabili » (st.). — 2. « Anelli vorticosi ruotanti » (st.). — 3. « Vortici e fenomeni meteorici ed aerodinamici » (st.). — 4. « Linee fondamentali per un nuovo tipo di elicottero » (st.). — 5. « Sulla trazione dei galleggianti mediante elica aerea con anello e tubo addizionale ricurvo e relativi esperimenti » (st.). — 6. « Rivendicazione di priorità circa lo sfruttamento della scia delle eliche » (ms.). — 7. « Eliche ed anelli di risucchio » (st.).

3. DEVOTO GIOVANNI. — 1. « La serie di spostamento dei metalli nei sali fusi » (st.). — 2. « Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi - Nota I. Un nuovo apparecchio di misura » (st.). — 3. « Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi - Nota II. Il coefficiente di temperatura della costante dielettrica dell'acqua » (st.). — 4. « Sulle amalgame di stronzio » (st.). — 5. « Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi - Nota III. Soluzioni acquose di alcuni composti organici » (st.). — 6. « Energie libere di formazione nei sali fusi - Nota IV. Alogenuri alcalino-terrosi » (st.). — 7. « Ricerche sulla co-

stante dielettrica dei liquidi — Nota IV. Soluzioni acquose di cloruro potassico » (st.). — 8. « Id. id. — Nota V. Soluzioni acquose di sostanze organiche ». — 9. « Id. id. — Nota VI. Soluzioni acquose di solfammide » (ms.).

4. LO VOI ANTONINO. — 1. « Intorno alla costruzione delle matrici di Riemann e alle loro moltiplicazioni complesse » (st.). — 2. « Complementi alla memoria “ Intorno alla costruzione delle matrici di Riemann e alle loro moltiplicazioni complesse ” » (st.).

5. NEGRO TITO. — « Sulla teoria dei massimi e minimi vincolati » (ms.).

6. PIATTI VINCENZO. — 1. « Le radiocomunicazioni. Cenni storico-scientifici. Loro importanza ». — 2. « Talassografia (Nozioni elementari) » (st.). — 3. « Che cos'è l'elettricità ? » (st.).

7. POLIDORI CIRO. — 1. « Il postulato dell'equivalenza finanziaria nei problemi fondamentali della matematica della previdenza » (st.). — 2. « Matematica finanziaria — Parte prima — Matematica del credito » (st.). — 3. « Matematica finanziaria — Parte seconda — Matematica della previdenza » (st.).

## ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE NATURALI

(Scadenza: 31 dicembre 1931. — Premio L. 5000).

1. BAMBACIONI VALERIA. — 1. « Sullo sviluppo del gametofito femminile in *Tulipa Gesneriana* L. » (st., in collab.). — 2. « Sullo sviluppo dell'embrione in *Tulipa Gesneriana* L. ». — 3. « Nuove ricerche sull'embriologia delle Gigliacee » (st.). — 4. « Sulla rigenerazione delle radici in rapporto coll'azione antagonistica di alcuni sali nutritizi » (st.). — 5. « La natura e i suoi fenomeni — parte I » (st.).

2. DULZETTO FILIPPO. — 1. « Il glutatione nelle ova fecondate e non fecondate di “*Paracentrotus lividus*” » (st.). — 2. « Gli effetti della lecitina sul rapporto sessuale nella coniglia e nel ratto albino » (st.). — 3. « Inchiesta antropometrica e costituzionalistica sui genitori che hanno avuto almeno 7 figli, eseguita nel Comune di Catania » (st.). — 4. « Struttura e funzione delle ghiandole del gozzo di “*Columba livia*” » (st.). — 5. « La funzione delle ghiandole del gozzo del colombo studiata mediante la fistola temporanea » (st.). — 6. « L'accoppiamento in *Gambusia Holbrookii* (Grd.) » (st.). — 7. « Osservazioni sui caratteri sistematici del sottogenere *Schizophallus* Hubbs » (st.). — 8. « Sviluppo e struttura del gonopodio di *Gambusia Holbrookii* (Grd.) » (st.). — 9. « Sui costituenti morfologici del cosiddetto latte del gozzo dei colombi » (ms.). — 10. « Sulla composizione chimica del cosiddetto latte del gozzo dei colombi » (ms., in collab.). — 11. « Il glutatione nella ibernazione e nel risveglio » (ms.). — 12. « Sugli organi sessuali di *Gambusia Holbrookii* (Grd.) 1. Il testicolo » (ms.).

3. MACCHIA OSVALDO. — 1. « Sulla determinazione dei rendimenti catodici nei bagni di cromatura » (st.). — 2. « La determinazione dei  $\text{SO}_4$  nei bagni di cromatura » (st.). — 3. « Sulla determinazione dei limiti di cromatura splendente con catodi nichelati » (ms.). — 4. « Ricerche sulla teoria della elettrodeposizione del cromo » (st.). — 5. « Cromatura elettrolitica » (st.). — 6. « Sulla determinazione dello spessore dei depositi elettrolitici di cromo » (ms.).

4. MARTELLI VALENTINO. — « Lezioni di Storia naturale per le scuole medie Vol. I — Botanica » (st.). — 2. « Lezioni id. id. Vol. II — Zoologia » (st.). — 3. « Mineralogia per le scuole medie » (st.). — 4. « Gli elementi della Storia naturali per le scuole medie inferiori » (st.). — 5. « Geografia e geologia per le scuole medie » (st.).

5. MOLA PASQUALE. — « Synopsis rotatoria et gastrotricha Italica » (ms. con tavole).

6. NEGODI GIORGIO. — 1. « Contributo alla conoscenza di un gruppo di specie del genere "Plantago" appartenenti alla sez. "Biconvexae" Boiss » (st.). — 2. « Tipi di struttura degli organi ghiandolari del Licopoli delle Plumbaginaceae » (st.). — 3. « Sporofilli e gametofiti in *Urtica caudata* Vahl » (st.). — 4. « Fondamenti dell'organizzazione florale in *Petunia hybrida hort* » (st.). — 5. « La costituzione sistematica di *Silene Conica* L. » (st.). — 6. « Formazioni teratologiche in fiori di *Caltha palustris* L. » (st.). — 7. « Ulteriori osservazioni su distribuzioni sessuali in spighe normali ed anomale di *Urtica caudata* Vahl. » (st.). — 8. « *Potentilla Norvegica* L., specie nuova per la Venezia Giulia » (st.). — 9. « Considerazioni sull'assetto cromosomico del *Ranunculus ficaria* L. e la sua frequente sterilità » (st.). — 10. « Ricerche sperimentali sull'azione esercitata da estratti della ghiandola tiroide di mammiferi sulle piante superiori » (st.). — 11. « Ricerche sulla distribuzione e trasmissione dei sessi in *Urtica cannabina* L. » (st.). — 12. « Contributo alla flora della Sardegna ed osservazioni sull'indigenato dell'*Alyssum Minutum* Schlecht. in Italia » (st.). — 13. « Lineamenti sulla distribuzione dei sessi (genodianomea) nelle piante superiori e sulle cause genetiche determinanti » (st.). — 14. « Breve analisi genetica e morfologica di una stirpe "fimbriata" Neg. di *Calendula arvensis* L. » (st.).

7. STEFANELLI AUGUSTO. — 1. « Il rimboschimento e suoi effetti sulla agricoltura e le industrie nazionali » (st.). — 2. « Chiarimenti alle osservazioni del prof. Boeke sulle mie ricerche intorno alla doppia innervazione dei muscoli striati » (st.). — 3. « Di una particolare disposizione dei nervi intorno ai peli dei pipistrelli » (st.). — 4. « Ulteriori considerazioni sulla minuta struttura del tessuto nervoso alla periferia » (st.). — 5. « Le espansioni nervose a grappolo dei muscoli striati » (st.). — 6. « Di alcune espansioni sensitive non terminali » (st.). — 7. « Sulla struttura istologica del cervelletto con osservazioni nella serie dei vertebrati ed allo stato embrionale » (st.).

8. VIALLI MAFFO. — 1. « I grassi e i lipoidi dei plessi coroidei nella serie dei vertebrati » (st.). — 2. « Ricerche morfologiche e istologiche sui plessi coroidei dei rettili » (st.). — 3. « Istologia comparata e istofisiologia dei plessi coroidei nella serie dei vertebrati » (st.). — 4. « Ricerche morfologiche sulle formazioni coroidee dei Teleostei » (st.). — 5. « Comportamento e significato del connettivo reticolare negli organi branchiali accessori dei pesci » (st.). — 6. « Gravidanza anomala in una *Salamandra maculosa* » (st.). — 7. « Nota sinonimica sui Botriocefali dei Ricci » (st.). — 8. « Ricerche morfologiche sulle formazioni coroidee dei pesci » (st.). — 9. « Ricerche morfologiche sui plessi coroidei » (ms.). — 10. « L'organo linfomieloide mielencefalico dei ganoidi » (ms.). — 11. « Morfologia dei plessi coroidei nella serie dei vertebrati » (ms.). — 12. « Gravidanza endoaddominale in una *Salamandra Atra* » (ms.). — 13. « Ricerche sulla metamorfosi degli anfibì (1°. Innessi di tiroide di *Triton Alpestris* neotenic e di *Proteus anguineus*) » (ms.). — 14. « Id. (2°. Innessi di epifisi in urodeli neotenic) » (ms.). — 15. « Id. (3°. Lo stato di ossificazione di *Triton alpestris* neotenic e non neotenic) » (ms.). — 16. « Id. (4°. Sul non passaggio dell'ormone tiroideo dalla madre alle larve in *Salamandra maculosa*) » (ms.).

9. ZANONI GIUSEPPINA. — 1. « Auto - ed Etero - impollinazione e fenomeni biochimici a cui possono ricondursi » (st.). — 2. « Antagonismo pollinico » (st.). — 3. « Individualità morfologica e biochimica nelle specie eterostiliche » (st.). — 4. « Su alcuni fenomeni di correlazione nelle piante » (st.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO  
DEL MINISTERO DELL'EDUCAZIONE NAZIONALE (ISTRUZIONE NAUTICA)  
PER LE SCIENZE MECCANICHE E COSTRUTTIVE NAVALI

(Scadenza: 31 dicembre 1931 — Premio L. 5.000).

SCONZO GIOVANNI. — 1. « Teoria meccanica del propulsore navale ad elica funzionante sotto qualsiasi regresso » (st.). — 2. « Teoria meccanica dei propulsori navali a ruote » (st.).



## ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO LORENZO BIGOTTI

(Scadenza: 31 dicembre 1931 — Premio L. 10.000 circa)

1. «PATRIAE DEFENSIO SUPREMA LEX». — «Memoriale circa un progetto di canale navigabile fra il porto della Spezia e il Po» (ms. con carta e profilo).
2. VITALE ANTONINO. — «La navigazione interna in Italia» (ms.).

## ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DELLA FONDAZIONE SENSEALES

(Scadenza: 31 dicembre 1931 — Premio L. 23.000 circa)

1. RANZI IVO. — «Propagazione delle radio-onde e struttura della ionosfera» (ms.).
2. ROSTAGNI ANTONIO. — «Onde elettromagnetiche ultracorte generate con triodi a griglia positiva» (ms.).
3. SENSINI IVO — «Ricerche teorico-sperimentali sulle onde elettromagnetiche» (ms.).

## ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO G. RAGNOLI DELL'ISTITUTO ITALIANO D'IGIENE, PREVIDENZA E ASSISTENZA SOCIALE

(Scadenza: 30 settembre 1931 — Premio medaglia d'oro del valore di L. 5.000)

VIDONI GIUSEPPE. — 1. «La selezione degli apprendisti nella scuola industriale G. Galilei» (st.). — 2. «Il laboratorio di psicotecnica dell'Istituto Biotipologico della R. Università di Genova» (st.). — 3. «La 'sensibilità' indice di 'educabilità' nelle valutazioni tecniche» (st.).

## ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO BATTISTA GRASSI

(Scadenza: 31 dicembre 1931 — Premio L. 6.000 circa)

I. BABUDIERI BRENNIO. — 1. «I sarcosporidi e le sarcosporidiosi» (st.). — 2. «*Chondrostagon haematicum* n. g., n. sp. Nuovo enigmatico emoparassita di *Spelerpes fuscus*» (st.). — 3. «Su di un parassita degli eritrociti dello *Spelerpes*» (st.). — 4. «Emoprotozoi parassiti di vertebrati italiani» (st.). — 5. «Emoparassiti di vertebrati eterotermi italiani» (st.). — 6. «Studi di ematologia comparata» (st.). — 7. «Variazioni stagionali della formula ematica di *Lacerta muralis*».

2. GAROFALI FILIBERTO. — 1. «La splenomegalia malarica» (st.). — 2. «Osservazioni cliniche sul malarico» (st.). — 3. «L'azione del glucosio e della insulina nei malarici» (st.). — 4. «Direttive di profilassi» (st.). — 5. «La malaria non è infortunio» (st.). — 6. «Infezione malarica ed insufficienza epato-renale» (st.). — 7. «Palude Pontina e Valle dell'Amaseno» (st.). — 8. Lettera polemica sul giornale *Risanamento Medico* (st.). — 9. «Il fattore terapeutico della malarizzazione nella paralisi progressiva» (ms.).



3. MOLA PASQUALE. — «Nuova classifica del gruppo *Vermes (Acoelomata)*».
4. PALOMBI ARTURO. — 1. «Il ciclo biologico di *Diphterostomum brusinae* Stossich» (st., tre estratti da diverse riviste). — 2. «La copulazione nei Trematodi. Ricerche su significato fisiologico del canale di Laurer» (st.). — 3. «Rapporti genetici tra *Lepocreadium album* Stossich e *Cercaria setifera* Monticelli (non Joh. Müller)» (st.). — 4. «*Stylochus inimicus* sp. nov. Policlade acotileo commensale di *Ostrea virginica* Gmelin delle Coste della Florida» (st.). — 5. «*Polycladida. Trematoda*» Tre tavole (st.). — 6. «Il polimorfismo nei Trematodi» (st.). — 7. «Per una migliore conoscenza dei Trematodi endoparassiti dei pesci del Golfo di Napoli» (st.). — 8. «Turbellari della Nuova Guinea» (st.).»
5. PENSO GIUSEPPE. — 1. «*Giardia intestinalis* Lambl e Giardiasi» (st.). — 2. «Sopra un'Ameba parassita della vescica urinaria» (st.). — 3. «Sopra una anomalia di un *Ankylostoma duodenale*» (st.). — 4. «Sopra un caso di pseudoparassitismo da *Anguillula aceti*» (st.). — 5. «Osservazioni ed esperienze sull'*Anguillula aceti*» (st.). — 6. «Sulla patogenicità del *Balanitidium coli*» (st.). — 7. «Impressioni mediche dopo un viaggio intorno all'Africa» (st.). — 8. «Sulla possibilità della trasmissione di Elminti dalla madre al feto» (st.). — 9. «Sulla patogenicità dell'*Entamoeba coli*» (st.). — 10. «Sull'azione patogena della *Giardia intestinalis*» (st.). — 11. «Sugli Sclerostomi del cavallo» (st.). — 12. «Sulla patogenesi dell'anemia nelle teniasi» (st.). — 13. «Sopra un nuovo meccanismo di infestazione degli Sclerostomidi» (st.). — 14. «Sull'uso del tetracloruro di carbonio e dell'olio cloroformico nella terapia dell'Anchilostomiasi» (st.). — 15. «La diffusione dell'Anchilostomiasi in Italia e mezzi per combatterla» (st.). — 16. «Sur la présence des oeufs d'Oxyures en pleine muqueuse intestinale et sur la biologie des Oxyures» (ms.). — 17. «Sui Protozoi coltivati dalle feci umane normali» (ms.).
6. RAFFAELE GIULIO. — 1. «Una nuova specie di *Anopheles*» (st.). — 2. «Su di un microrganismo di dubbia natura» (st.). — 3. «Osservazioni sui plasmodidi degli uccelli» (st.). — 4. «Osservazioni sulla biologia dei parassiti del genere *Haemoproteus*» (ms.). — 5. «Sul comportamento nel sangue dei parassiti della malaria aviaria» (st.). — 6. «Traduzione dell'opera: EDWARDS. Una revisione delle zanzare delle regioni paleartiche. (st.).

N. P.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

**Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali**

---

*Seduta del 6 marzo 1932 (anno X)*

*Presidenza del Socio anziano prof. sen. E. MARCHIAFAVA*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Chimica.** — *Sul comportamento magnetico dei complessi. — V. Di-butyl-ditiocarbammati ferrici*<sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> del Corrisp. L. CAMBI, di L. SZEGÖ e di A. CAGNASSO.

Nella Nota precedente<sup>(3)</sup> abbiamo esposto le ricerche riguardanti i di-propil-ditiocarbammati ferrici: riferiamo ora quelle sui sali di-butilici, che pure manifestano comportamento magnetico di notevole interesse.

Del di-n-butyl-e del di-isobutyl-ditiocarbammato ferrico, di cui determinammo le suscettibilità a 15°C°, ci siamo già occupati<sup>(4)</sup>; abbiamo ora esteso l'indagine a tutti i sei sali dibutilici isomeri riportati nelle tabelle che seguono.

Le determinazioni vennero eseguite, come per i sali di-propilici, alle temperature di + 77° (350°K); + 18° (291°K); — 79° (194°K); — 189° (84°K).

È risultato anzitutto da questa serie di misure un'ampia conferma della dipendenza della suscettibilità dalla struttura dei radicali alchilici isomeri del residuo R'R''N — dei ditiocarbammati ferrici.

(1) V. Comunicazione dell'Istituto di Chimica Ind. della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 6 marzo 1932.

(3) Questi « Rendiconti », 6ª serie, XV, pp. 266-271, 1932.

(4) L. CAMBI e L. SZEGÖ, « Berichte », 64, 2541, 1931.

La sostituzione di uno o di entrambi i gruppi alchilici con radicali isomeri può provocare una notevole variazione delle suscettibilità, infatti a 18°C°:

Ditiocarbammati		$\chi \cdot 10^6$	$\chi_A \cdot 10^6$	p
N, N-n-Di-butil	$[(n-C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . . . .	18.40	12732	27.1
N, N-Di-isobutil	$[iso-C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . . . .	4.87	3682	14.6
N, N-n-butil-isobutil	$[n-C_4H_9(iso-C_4H_9)N \cdot CS_2]_3Fe$ .	18.80	12982	27.4
N, N-Di-sec.-butil	$[(sec.-C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . . . .	3.42	2720	12.5
N, N-n-butil-sec.-butil	$[n-C_4H_9(sec.-C_4H_9)N \cdot CS_2]_3Fe$ .	10.12	7194	20.3
N, N-isobutil-sec.-butil	$[iso-C_4H_9(sec.-C_4H_9)N \cdot CS_2]_3Fe$	4.80	3637	14.3

Inoltre, come risulta dai dati che riportiamo più oltre, i diversi isomeri si distinguono fra loro per possedere una funzione propria caratteristica della suscettibilità rispetto alla temperatura.

Nell'insieme dei dati finora da noi acquisiti si delineano ormai alcune regolarità di comportamento:

a) I sali recanti due residui alchilici secondari presentano alla temperatura ambiente valori della suscettibilità fra loro vicini e notevolmente inferiori a quelli dei sali aventi radicali isomeri primari e normali:

Ditiocarbammati		$\chi \cdot 10^6_{(18^\circ)}$	$\chi_A \cdot 10^6$	p
<i>Alchili secondari:</i>				
N, N-Di-isopropil	$[(iso-C_3H_7)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . . . .	4.27	2710	12.5
N, N-Di-sec.-butil	$[(sec.-C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . . . .	3.42	2720	12.5
<i>Alchili normali primari:</i>				
N, N-Di-n-propil	$[(n-C_3H_7)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . . . .	14.40	8776	22.5
N, N-Di-n-butil	$[(n-C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Fe$ . . . .	12.40	12730	27.1

b) I sali recanti radicali alchilici a catena ramificata posseggono in generale alla temperatura ambiente suscettibilità più bassa di quelli a radicali normali primari, e l'azione deprimente del carbonio secondario si attenua a grado che quest'atomo si allontana da quello d'azoto;

Ditiocarbammati	$\chi \cdot 10^6_{(180)}$	$\chi_A \cdot 10^6$	p
N, N-Di-isopropil [(iso-C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> ) <sub>2</sub> N·CS <sub>2</sub> ] <sub>3</sub> Fe . . . . .	4.27	2710	12.5
N, N-Di-isobutil [(iso-C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> ) <sub>2</sub> N·CS <sub>2</sub> ] <sub>3</sub> Fe . . . . .	4.87	3682	14.6
N, N-Di-isoamil [(iso-C <sub>5</sub> H <sub>11</sub> ) <sub>2</sub> N·CS <sub>2</sub> ] <sub>3</sub> Fe . . . . .	9.32	7078	20.3

La suscettibilità assume cioè valori crescenti con la serie dei noti radicali contenuti nei sali predetti:



Le variazioni della suscettibilità dei nostri sali con la temperatura presentano un interesse ancora più spiccato.

Risultano nei di-butil-derivati fatti analoghi a quelli da noi verificati nei di-propilici: eccettuato il sale N,N-n-butilico-isobutilico, nessuno dei sali esaminati segue la legge di Weiss-Curie, ma una funzione propria assai più complessa.

Questo comportamento anomalo appare ormai generale nei dialchil-ditiocarbammati e, come esporremo in seguito, venne da noi anche riscontrato negli xantogenati ferrici.

I nostri sali si differenziano cioè nettamente, e in modo inatteso, da quei complessi ferrici studiati da Welo, che pure manifestano suscettibilità  $\chi_A$  più bassa di quella spettante all'ione ferrico, ma che seguono la legge lineare predetta,  $\chi_A(T - \theta) = \text{cost.}$ , con elevati valori negativi di  $\theta$ .

Per confronto, abbiamo appunto indagato, fra + 77° e — 189°C° uno dei tipici sali di Weinland,  $[\text{Fe}_3(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_6(\text{OH})_2]\text{Cl} \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ , e ne riportiamo i dati che confermano quelli di Welo: nel diagramma  $\frac{1}{\chi_A}/T$  la retta che li rappresenta decorre parallela a quella dell'allume ferrico.

Dall'inclinazione della retta stessa, per il cloruro della tri-ferri-acetato base, come per i sali analoghi, risultano appunto, applicando l'equazione Weiss-Curie, i 29.5 magnetoni dell'ione ferrico. Welo ha considerato l'elevato coefficiente  $\theta$  negativo come risultante del campo molecolare interno, dovuto al tipo polinucleare dei sali predetti, riconoscendo al ferro in essi contenuto la struttura elettronica dell'ione ferrico.

(1) Abbiamo anche misurata la suscettibilità di alcuni dei sali indicati in soluzione di solfuro di carbonio ed abbiamo osservato un notevole abbassamento della suscettibilità stessa. Questo fatto indurrebbe ad ammettere una possibile associazione col solvente, tale da portare ad una variazione dello stato magnetico del complesso.

Il comportamento caratteristico della suscettibilità si presenta per contro nei ditiosali insieme ad altri caratteri distintivi rispetto al tipo degli acetati complessi ed analoghi, quali: il colore, la solubilità in solventi a bassa costante dielettrica, il peso molecolare semplice, la stessa dipendenza della suscettibilità dalla struttura dei radicali amminici.

Tutto induce cioè ad attribuire il comportamento di questi sali ad una loro particolare struttura elettronica. L'ipotesi più semplice e seducente, per spiegare le anomalie predette della suscettibilità rispetto alla temperatura, appare ancora quella che ciascuno dei nostri sali sia una miscela di magnetoisomeri in equilibrio fra loro, tendente alle più basse temperature alla struttura ferrico-complessa (con 1 magnetone Bohr) ed alle alte a quella dell'ione ferrico (con 5 magnetoni Bohr), analogamente a quanto accennammo a proposito dei di-propil-ditiocarbammati.

Alle più basse temperature si presenta però, in alcuni dei sali da noi esaminati, una notevole diminuzione della suscettibilità col diminuire della temperatura, e quindi una netta tendenza verso il diamagnetismo<sup>(1)</sup>.

È ovvio che ogni tentativo di costruzione teorica debba considerare anche quest'ultimo aspetto del comportamento dei complessi del ferro. Necessita quindi adeguata estensione delle ricerche, particolarmente nel campo delle più basse temperature.

#### PARTE SPERIMENTALE (*in collaborazione con G. Jacini*).

*Ammine di-butiliche.* — Delle sei dibutilamine impiegate non erano conosciute le tre diammine miste, a radicali isomeri diversi fra loro.

Delle ammine note impiegammo di-n-butilammina e di-isobutilammina del commercio pure ed adeguatamente rettificate. La ammina di-secondaria venne da noi preparata dalla monoammina e dall'ioduro secondario<sup>(2)</sup>. L'ottenimento di questa ammina ad elevata purezza ha offerto qualche difficoltà.

Le ammine miste vennero prodotte dalle monoammine n-butilica ed isobutilica, con gli ioduri isobutilico e butilico secondario.

Descriveremo in seguito queste nuove ammine, di cui riportiamo ora soltanto le temperature d'ebollizione, in confronto con quelle delle ammine già note:

(1) Anche per i sali più semplici del rame bivalente (DE HAAS e GORTER, «Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam», 34, 1931, 317), (KLEMM, «Z. allg. anorg. Ch.», 203, 1931, 104) e quelli del nichel è stato osservato un analogo comportamento alle basse temperature.

(2) La monoammina butilsecondaria venne preparata col metodo Sabatier e Sendrens dall'ossima del metil-etilchetone.



$(n-C_4H_9)_2NH$	P. E. 760	160° C°
$(iso-C_4H_9)_2NH$	»	140° C°
$(sec.-C_4H_9)_2NH$	»	132° C°
$n-C_4H_9(iso-C_4H_9)NH$	»	150° C°
$n-C_4H_9(sec.-C_4H_9)NH$	»	147° C°
$iso-C_4H_9(sec.-C_4H_9)NH$	»	137° C°

Le diverse diammine, impiegate per la sintesi dei sali ferrici vennero anche nettamente caratterizzate con le corrispondenti N,N-di-butil-feniluree, su cui pure riferimmo in altra Nota.

*N,N-di-butil-ditiocarbammati ferrici.* — Seguimmo lo stesso metodo di preparazione descritto per i di-propil-derivati, e cioè quello della reazione fra idrato ferrico, diammina, solfuro di carbonio. La reazione è praticamente quantitativa dopo 12 ore.

I derivati ferrici dibutilici vennero pure estratti con cloroformio dalla miscela contenente eccesso di idrato ferrico. I sali grezzi, residuati dall'evaporazione del cloroformio a freddo e nel vuoto, vennero purificati per cristallizzazione nei solventi che indichiamo.

1.  $[(n-C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Fe$  — Solubilissimo in tutti i solventi a bassa costante dielettrica, poco solubile in alcool a 96° a freddo. Le soluzioni hanno colore nero-rossastro. Venne purificato dall'alcool a 96° a caldo: cristallizza in aghi neri lucenti.

Analisi:

	Fe %	N(Dumas) %	S %
calcolato	8.36	6.28	28.78
trovato	8.31	6.33	28.92

2.  $[(iso-C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Fe^{(1)}$  — Analogo al precedente. Venne cristallizzato da miscela di cloroformio ed etere di petrolio. Si presenta in aghetti neri lucenti.

Analisi:

	Fe %	N(Dumas) %	S %
calcolato	8.36	6.28	28.78
trovato	8.30	6.34	28.97

3.  $[n-C_4H_9(iso-C_4H_9)N \cdot CS_2]_3Fe$  — Presenta, in soluzione, caratteri e colore analogo al sale di-isobutilico. Si purifica da soluzioni in cloroformio ed etere di petrolio. Si separa in forma di polvere nero-rossastra cristallina.

(1) Questo sale era l'unico noto dei ditiocarbammati ferrici, descritto allo stato non puro da M. Délépine.

Analisi:

	Fe %	N(Dumas) %	S %
calcolato	8.36	6.28	28.78
trovato	8.32	6.35	28.82

4.  $[(\text{sec.}-\text{C}_4\text{H}_9)_2\text{N}\cdot\text{CS}_2]_3\text{Fe}$  — Possiede caratteri analoghi al derivato di-isopropilico. Le soluzioni di questo sale hanno colore più spiccato verso il rosso-arancio rispetto a quello degli altri derivati della serie. Il sale è solubilissimo in tutti i solventi a bassa costante dielettrica. È sostanza difficile a purificarsi. Si separa da soluzioni alcooliche bollenti in aghi rossastri minutissimi.

Bagnato di alcool, all'aria, si ossida rapidamente ad ossido ferrico e prodotti di demolizione del residuo ditiocarbammico.

Analisi:

	Fe %	N(Dumas) %	S %
calcolato	8.36	6.28	28.78
trovato	8.54	6.38	28.92

5.  $[\text{n}-\text{C}_4\text{H}_9(\text{sec.}-\text{C}_4\text{H}_9)\text{N}\cdot\text{CS}_2]_3\text{Fe}$  — Ha comportamento che ricorda il precedente. Il colore delle soluzioni volge al rossastro. Si purifica dall'alcool a 96°, da cui si separa in polvere cristallina nera.

Analisi:

	Fe %	N(Dumas) %	S %
calcolato	8.36	6.28	28.78
trovato	8.55	6.42	28.75

6.  $[\text{iso}-\text{C}_4\text{H}_9(\text{sec.}-\text{C}_4\text{H}_9)\text{N}\cdot\text{CS}_2]_3\text{Fe}$  — È analogo al precedente e cristallizza dallo stesso solvente in cristalli minutissimi neri lucenti.

Analisi:

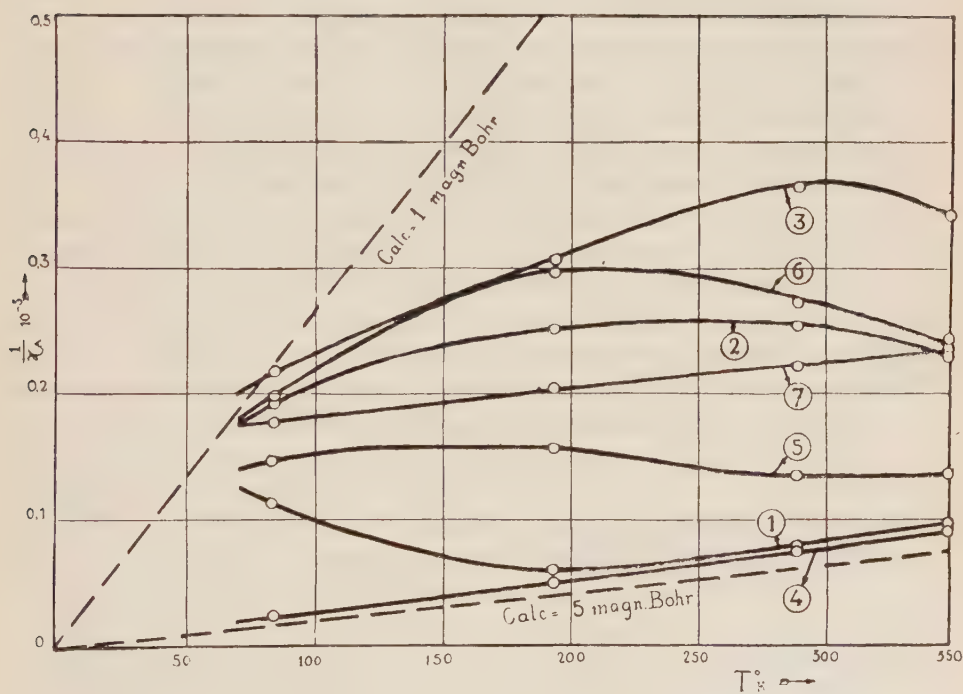
	Fe %	N(Dumas) %	S %
calcolato	8.36	6.28	28.78
trovato	8.46	6.34	28.78

Le analisi in tutti i casi si riferiscono ai campioni impiegati per le misure della suscettibilità.

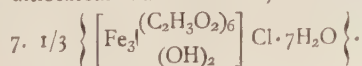
Per quanto riguarda la misura della suscettibilità magnetica rimandiamo alla Nota precedente. Aggiungiamo però che le misure vennero eseguite anche con campi magnetici di diversa intensità senza che i valori della suscettibilità subissero variazioni.

Le misure vengono riportate nella tabella e nel diagramma seguenti:

Ditiocarbammati ferrici	$T_K^{\circ} = 350$	291	194	84
N, N-Di-n-butil . . . . .	$\chi \cdot 10^6$ 15.06	18.40	24.01	12.86
	$\chi_A \cdot 10^6$ 10490	12732	16480	9020
N, N-Di-isobutil . . . . .	$\chi \cdot 10^6$ 5.62	4.87	4.95	6.64
	$\chi_A \cdot 10^6$ 4180	3682	3740	4870
N, N-Di-sec.-butil . . . . .	$\chi \cdot 10^6$ 3.69	3.42	4.20	6.15
	$\chi_A \cdot 10^6$ 2897	2720	3237	4542
N, N-n-butil-isobutil . . . . .	$\chi \cdot 10^6$ 15.25	18.80	27.5	53.9
	$\chi_A \cdot 10^6$ 10600	12982	18770	36400
N, N-n-butil-sec.-butil . . . . .	$\chi \cdot 10^6$ 10.72	10.12	9.46	10.00
	$\chi_A \cdot 10^6$ 7170	7194	6320	6680
N, N-isobutil-sec.-butil . . . . .	$\chi \cdot 10^6$ 6.06	4.80	5.19	7.47
	$\chi_A \cdot 10^6$ 4042	3637	3467	4992
$\frac{1}{3} \left\{ \left[ \text{Fe}_3 \begin{matrix} (\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_6 \\ (\text{OH})_2 \end{matrix} \right] \text{Cl} \cdot 7\text{H}_2\text{O} \right\} .$	$\chi \cdot 10^6$ 16.85	17.54	19.16	22.19
	$\chi_A \cdot 10^6$ 4120	4290	4687	5406



1. N, N-Di-n-butil-ditiocarbammato.
2. N, N-Di-isobutil-ditiocarbammato.
3. N, N-Di-sec.-butil-ditiocarbammato.
4. N, N-n-butil-isobutil-ditiocarbammato.
5. N, N-n-butil-sec.-butil-ditiocarbammato.
6. N, N-isobutil-sec.-butil-ditiocarbammato.



**Mineralogia.** — *Su un interessante ammasso ferro-titanifero dell'Alto Egitto nel Deserto Arabico.* Nota <sup>(1)</sup> di A. STELLA.

Questa mia comunicazione trae materia dai risultati di una missione di studi che io ebbi occasione di compiere nella primavera scorsa nell'Alto Egitto nei monti del Deserto Arabico, visitando numerosi giacimenti minerarii di quella desolata ma interessantissima regione, già teatro di una vetusta attività mineraria. Quella zona montagnosa compresa fra il Nilo e il Mar Rosso, si presenta nuda rocciosa con carattere tipicamente desertico, ed è solcata da numerose valli ampie, completamente asciutte (Uadi) che scendono al Mar Rosso da un lato e al Nilo dall'altro. Queste uadi di erosione schiettamente fluviale, riempite di grossolane alluvioni, facilitano l'accesso fin nel cuore di quella immensa pietraia, che dal mare rapidamente si eleva a 1000 e 2000 m. di altitudine.

Geologicamente la regione si può dire divisa longitudinalmente in due parti quasi uguali da una linea subparallela alla costa, in modo che la zona occidentale compresa fra essa linea e il Nilo è occupata completamente da terreni sedimentari che vanno dal pliocene al cretaceo, mentre la zona orientale compresa fra quella linea e il Mar Rosso è occupata da terreni molto più antichi (argilloscisti, quarziti, anageniti e scisti cristallini vari), riferiti al paleozoico e prepaleozoico; e interrotti da grandi isole di rocce eruttive. Però un orlo strettissimo lungo la costa del mare presenta nuovamente la coperta dei terreni stratificati cretaceo-terziarii. È in questa zona costiera che il cretaceo superiore contiene giacimenti fosfatici; e fra essi importanti quelli ben noti di Kosseir messi in valore da iniziativa italiana. Invece la zona dei terreni antichi è quella che racchiude i giacimenti metalliferi; e parecchi di questi, come appunto il nostro, sono geneticamente legati dalle masse eruttive.

Queste masse sono prevalentemente di natura granito-dioritica e subordinatamente rocce più basiche, eufotidi e serpentine, e anche intrusioni di porfiriti e melafiri. Le osservazioni geologiche sul terreno, astrazione fatta dalla difficoltà di soggiorno, sono grandemente facilitate dalla continuità ed evidenza degli affioramenti rocciosi nudi, i quali, ammantati al piede dalle distese di sfacelo detritito, danno luogo ad un paesaggio geologico di deserto montagnoso veramente unico e suggestivo, e permettono un rapido orientamento nello studio dei giacimenti minerarii.

Fra essi è interessante il giacimento di ferro-titanato detto « Abu Galga » una vera montagna di minerale che si incontra risalendo per una ventina

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.



di Km. la valle Uadi Ranga, la quale sbocca al Mar Rosso fra la rada di Ras Un El Abbas e quella di Ras Benas (Berenice).

Questa valle incide ampiamente una delle maggiori aree eruttive del Deserto Arabico, area molto complessa perchè costituita non solo da rocce granito-dioritiche, ma anche da eufotidi e serpentine. Il grande ammasso metallifero viene appunto a trovarsi racchiuso in una massa di rocce gabbriche, la quale è sbrecciata da due vallette secondarie in destra del Uadi Ranga in modo che il modellamento dell'erosione ha messo in magnifica evidenza l'imponente ammasso metallifero. Esso viene ad emergere a giorno nel contrafforte divisorio delle due vallette, il quale ne è tutto costituito per più centinaia di metri di lunghezza. Si osservano in diversi punti con evidenza i contatti del minerale colla roccia eruttiva sul contrafforte medesimo, mentre le due vallette segnano esse stesse la linea di contatto, ivi mascherato parzialmente dalla coperta detritica alluvionale del fondo. Coordinando le osservazioni fatte ai contatti visibili e lateralmente ad essi risulta, che la massa eruttiva gabbrica, racchiudente l'ammasso di minerale, si presenta come una « eufotide » a grossa grana a *facies* ora leucocratica ora più melanocratica, presentandosi inoltre alcuni filoni aplitici chiari che attraversano sia la roccia eruttiva che l'ammasso metallifero in essa racchiuso. La roccia gabbrica macroscopicamente appare come una tipica eufotide dal feldispato chiaro porcellanico e dal diallaggio submetallico; l'esame microscopico rivela una avanzata saussuritizzazione del feldispato plagioclasico e quasi completa uralitizzazione del diallaggio, con formazione anche di epidoto e clorite, e mostra granulazioni di ferro-titanato per lo più interstiziale. Quanto ai filoni aplitici chiari essi sono a fina grana, costituiti dalla associazione quarzo, ortose e plagioclasio più o meno alterato e biotide cloritizzata; presentano al M. fenomeni cataclastici evidenti, e visibilmente sono accompagnati da vene e zonature di epidoto. Il contatto naturalmente irregolare fra la roccia eruttiva e l'ammasso metallifero si presenta in generale molto netto, cioè senza transizione litologica graduale. Invece vi ho osservato zone di miscela per reciproco intreccio e implicazione dalla roccia gabbrica e di minerale.

Quanto all'ammasso del minerale esso, astrazione fatta ai filoni aplitici, mostra una notevole omogeneità: ci si trova innanzi a una massa di minerale massiccio che solo presenta una certa divisibilità talora colonnare subprismatica, più spesso tabulare.

La struttura del minerale è generalmente granulare minuta fino a diventare compatta; ha lucentezza metallica o submetallica con tono grigio ferro; talora più opaca tendente al bruno rossiccio; in generale non vi si nota ganga visibile, all'infuori di punteggiature e mosche grigio chiare molto subordinate. Il minerale non è sensibilmente magnetico; lo diventa soltanto arroventato alla fiamma riducente. Ai saggi qualitativi si è subito rivelato oltre che ferriifero notevolmente titanifero. I saggi quantitativi del titanio



fatti su polvere di minerale accuratamente sceverato dalla ganga ha dato un tenore prossimo al 40 % di  $\text{TiO}_2$  <sup>(1)</sup>.

Interessante riesce la diagnosi microscopica del minerale che ho eseguito sui diversi tipi di esso sia in sezione sottile col solito metodo per trasparenza, sia in sezione lucida col così detto esame calcografico per riflessione. In sezione sottile già alla lente si rileva evidente la struttura del minerale come un aggregato di granuli opachi metallici non tutti perfettamente contigui, in modo che ne traspare un fino reticolato interstiziale: questo è spesso discontinuo, spesso ridotto anche a punteggiature isolate; talora invece le maglie del reticolato si allargano riunendosi in plaghe trasparenti nelle quali si vedono immersi i granuli metallici isolati. A M. le maglie e plaghe trasparenti si rivelano costituite essenzialmente di anfibolo fibroso, debolmente pleocroitico fra il verdolino e il grigio, a fibrille generalmente accostate e allineate, e isoorientate, specialmente nelle plaghe maggiori sopra accennate; mentre poi si presenta anche come un feltro di fibre irregolarmente incrociantesi, cosicchè in tal caso si ha una plaga di anfibolo fibroso crivellata dai granuli opachi. Rare sono invece plaghe feldspatiche torbide per saussuritizzazione più o meno avanzata.

I granuli metallici opachi e saminati A. M. per riflessione in sezione lucidata presentano la colorazione brillante chiara leggermente e irregolarmente rosata caratteristica dell'ilmenite, di cui si avverte bene l'azione sulla luce polarizzata; e cioè il pleocroismo di riflessione dal roseo al grigio chiaro quasi argenteo, e la spiccata anisotropia. Caratteristica è la microstruttura che si potrebbe chiamare « micropertitica » quale già notarono vari osservatori <sup>(2)</sup> nell'ilmenite di altri giacimenti; per cui la superficie rosata dell'ilmenite presenta fine interposizioni lamellari e aghiformi di oligisto dal riflesso brillante argenteo; e queste interposizioni ematitiche, generalmente allineate e isorientate talvolta in più direzioni, possono diventare così fitte da occupare una quota parte anche notevole (forse fino a un quarto) dell'area totale dell'ilmenite. Questa poi presenta anche una certa divisibilità messa in evidenza da striatura subparallela in cui si insinua la ganga silicatica interstiziale.

L'insieme di queste osservazioni ci porta a definire il minerale del nostro ammasso come un aggregato granulare di « ilmenite ematitica » a cui si associa intimamente, sebbene in via subordinata, una ganga silicatica di natura anfibolica con microimplicazione reciproca caratterizzata dal presentarsi generalmente l'anfibolo a maglie interstiziali fra i grani prevalenti di ilmenite, ma anche granuli di ilmenite immersi in plaghe anfiboliche, struttura che si può chiamare « eutectoide ».

(1) L'analisi eseguita dal dott. N. Collari nel Laboratorio di Metallurgia della nostra Scuola di Ingegneria Mineraria sulle due varietà del minerale grigio e bruno ha dato rispettivamente: 38,2, 39,7 di  $\text{TiO}_2$ .

(2) Studiata specialmente da J. Orcel, H. Schneiderhön, P. Ramdohr.

Questi caratteri del nostro minerale ilmenitico che costituisce un ammasso così importante di concentrazione ferrotitanifera, messi in relazione colla sua giacitura sopra indicata entro alla massa eruttiva gabbbrica e alla natura mineralogica di questa, mentre non lascia dubbio sulla interdipendenza fra giacimento metallifero e roccia includente, lascia alquanto perplessi nell'interpretazione di questa effettiva dipendenza. Non è qui così chiaro come in altri casi il fenomeno di schietta segregazione magmatica che si manifesta p. es. nei classici giacimenti Norvegesi studiati dal Vogt dove si hanno anche tipi litologici di transizione da rocce gabbbriche comuni a rocce fortemente mineralizzate, e indi al minerale ferrotitanifero (ilmenite o titanomagnetite).

Se cerchiamo le analogie e differenze del nostro giacimento rispetto ad altri noti giacimenti ferrotitaniferi, troviamo, che di essi pochi soltanto sono a base di ilmenite, mentre la maggior parte sono a base di titanomagnetite. Questi ultimi sono racchiusi in rocce gabbbriche (giacimenti della Norvegia, del Bushveld a N. del Transval), mentre i giacimenti a base di ilmenite (talora ematitica come la nostra) sono effettivamente in rocce anortositiche (Iron Mountain nel Joming, Adirondak Mountains N. Y., St. Urbain nel Canada) pure esse legate a masse gabbbriche. In essi giacimenti il minerale metallifero è accompagnato in varia misura dai silicati freschi della roccia incassante (pirosseno, olivina, plagioclasti) oltre ad alcuni minerali altamente alluminiferi (spinello, corindone, sillimanite). Invece il nostro giacimento a base di ilmenite ematitica si trova racchiuso in una eufotide saussuritizzata e uralitizzata, ed è essenzialmente una associazione di ilmenite con anfibolo fibroso, che presenta microstruttura così implicata (eutectoide) da far ritenere per certo questi minerali componenti di formazione contemporanea; mentre d'altra parte l'anfibolo uralitico della eufotide incassante appare posteriore al suo consolidamento. È un fenomeno analogo a quello da me già notato in altri giacimenti inclusi in rocce eruttive, come il grande ammasso di magnetite di Cogne, dove pure si ha il minerale di ferro costituito essenzialmente dalla associazione eutectoide magnetite-crisotilo, mentre il crisotilo costituente la peridotite serpentinizzata includente è di formazione posteriore al consolidamento dell'originaria peridotite. Si è allora condotti a ritenere probabile che la genesi del giacimento metallifero non coincida perfettamente colla fase di prima consolidazione della roccia madre originaria, ma sia legata a una fase anche di poco posteriore, che mentre ha metamorfosato la roccia eruttiva originaria, ha intruso forse da maggiore profondità in essa la massa metallifera che ha per ganga i minerali di nuova formazione della roccia eruttiva. È un concetto del resto che adombra il Lindgreen parlando di dicchi di ilmenite in rocce gabbbriche e anortositiche; e che recentemente ha cercato di applicare un giovane studioso a giacimenti ferrotitaniferi nord americani <sup>(1)</sup>.

(1) LINDGREEN, *Mineral deposits*, New York, 1928; OSBORN, *Certain magmatic titanium iron ores and their origin*, «Econ. Geol.», XXIII, 1928.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi.* - II. *Formazione e proprietà della coppia di varietà reciproche.* Nota di G. ANDREOLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

5. Nel nostro caso il problema geometrico è quanto mai semplice. Si tratta di costruire una catena-inviluppo di geodetiche, la quale, partendo da una geodetica assegnata, giunga ad un'altra anch'essa assegnata, in modo che sia estremata la somma degli angoli <sup>(2)</sup> tra le coppie di lati consecutivi (orientati) della catena stessa. Ed il problema è così perfettamente duale di quello della ricerca di una catena di archi aventi somme dei lati minima.

Del resto sulla sfera i due problemi sono, senz'altro, riducibili l'uno all'altro, attraverso la polarità che esiste.

Ma anche nel caso di una varietà qualunque, il problema variazionale di nuovo tipo (impostato, però, per le geodetiche) ammette una risposta semplice ed immediata: *tali inviluppi sono i punti.*

Nel caso del piano euclideo, e delle rette, semplici considerazioni sugli angoli esterni dei triangoli, mostrano che tale somma è indipendente dall'inviluppo percorso se questo è convesso, ed è uguale allora semplicemente all'angolo delle due rette estreme. Se invece la curva inviluppo non è convessa si ha, come somma dei valori assoluti un valore maggiore di quell'angolo, pur avendosi invece l'angolo stesso, se si considera anche il segno.

Quindi una semplice ragione di convenienza e di contiguità con quanto segue, ci farà scegliere il punto come inviluppo prestabilito nel piano euclideo e  $V_2$  sviluppabili.

Nel caso della sfera, invece, si vede facilmente che, con le stesse considerazioni di angoli esterni di un triangolo, l'angolo compreso fra due geodetiche è *sempre* minore della somma degli angoli esterni di una qualsiasi catena che commetta le due geodetiche: ciò che del resto è confermato considerando la figura polare, per la quale alle due geodetiche congiunte mediante un inviluppo corrispondono due punti congiunti da una curva luogo. E siccome agli archi di distanza corrispondono gli angoli tra dire-

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) Per quanto è detto prima, angoli da prendersi in modulo, come per l'elemento lineare.

zioni, resta confermato che il punto è l'inviluppo di minima deviazione angolare, perchè la sua curva reciproca, cioè il cerchio massimo, è la curva di minima distanza.

Nel caso infine, del piano lobaceskiano, la condizione sussiste ancora, come condizione di estremo, ma non più come condizione di minimo; bensì come questione di massimo; essendo l'angolo delle geodetiche sempre maggiore della somma di quelli di una qualsiasi catena inviluppo che le congiunga.

Naturalmente, il ragionamento fatto resta invariato per una varietà qualunque, purchè si considerino catene inviluppi di geodetiche che si muovano sempre nella stessa regione a curvatura positiva o negativa. In ogni caso però, possiamo affermare che:

*Il punto pensato come inviluppo rappresenta lo estremaie della tecnica metrica tangenziale:* cioè esso estremizza l'integrale dell'angolo fra due geodetiche infinitamente vicine, allorchè si parte da una geodetica per connetterla ad un'altra assegnata mediante un inviluppo.

Si osservi che noi parliamo di metrica tangenziale, per quanto si tratti effettivamente di metrica angolare, proprio per ricordare che deriva dalle coordinate di geodetiche (duali o tangenziali).

Da quanto precede risulta poi ovvio che se si interpreta la metrica tangenziale come metrica puntuale di una varietà, la metrica originaria della varietà dovrà diventare quella tangenziale: in quanto la metrica angolare e quella lineare si fissano reciprocamente. Dunque, sostanzialmente, risulta quanto segue:

*Data una varietà munita di una metrica lineare e le sue geodetiche, allora esisterà un'altra varietà munita di metrica lineare, la quale rappresenti la metrica tangenziale della prima e reciprocamente.*

Le due varietà formeranno coppia duale nel senso che, ai punti dell'una varietà corrispondono le geodetiche dell'altra, alla metrica lineare dell'una, la metrica tangenziale dell'altra.

Inoltre a coppie di archi eguali di geodetica dell'una varietà rispondono coppie di angoli eguali dell'altra.

Nel caso particolare della sfera di raggio unitario, essa forma coppia duale con sè stessa; il piano euclideo forma coppia duale con una varietà metrica riducibile; come si è detto, occorre qui, per la rappresentazione geometrica di tali varietà, considerare a fianco degli spazi euclidei quelli nei quali la distanza è data da una somma di quadrati diminuita da un'altra somma di quadrati.

Infine, resta chiaramente delineata la connessione fra metrismi e parallelismi già indicati dal Barba nel caso di partenza della sfera, cioè:

*In una coppia di varietà duali, a qualsivoglia legge di parallelismo dell'una varietà corrisponde una legge di metrismo e quindi fissato, su una, parallelismo e metrismo, resta definito anche per l'altra, il parallelismo ed il metrismo.*



6. Per completare lo schema analitico propostoci, dobbiamo infine caratterizzare, attraverso il problema variazionale, il parallelismo, e quindi, subordinatamente, il metrisimo.

Sia

$$\gamma \equiv \varphi(x, y; u, v) = 0$$

l'equazione puntuale di una geodetica e

$$\gamma_1 \equiv \varphi(x, y; u_1, v_1) = 0$$

quella di un'altra, passanti ambedue pel punto  $(x, y)$  ed in modo analogo; siano:

$$\gamma' \equiv \varphi(x', y'; u', v') = 0$$

$$\gamma'_1 \equiv \varphi(x', y'; u'_1, v'_1) = 0$$

le equazioni puntuali di altre due per  $(x', y')$ , l'angolo di queste due geodetiche risulterà funzione dei parametri.

Se però vogliamo riferire il connesso  $(x, y; u, v)$  al connesso  $(x', y'; u', v')$  ovvero sia la direzione  $(uv)$  spiccata da  $(xy)$  alla  $(u', v')$  spiccata da  $(x' y')$ , noi verremo in sostanza a stabilire il riferimento di parallelismo. Tenuto presente quanto abbiamo già esposto nelle due Memorie precitate, si riferiscono fra loro, attraverso un angolo, due elementi orientati, cioè (punto-geodetiche)  $(P, \gamma)$  a  $(P_1, \gamma_1)$ .

Si osservi che uno di tali elementi  $[P, \gamma]$  può essere, come è noto, caratterizzato in diversi modi: anzitutto mediante le coppie (non omogenee) duali  $(x, y)$   $(u, v)$  con la condizione di incidenza

$$\varphi(x, y; u, v) = 0$$

oppure con la coppia di punti

$$(x, y), (x_0, y_0)$$

ove sia simultaneamente

$$\varphi(x, y, u, v) = \varphi(x_0, y_0, u, v) = 0$$

oppure, infine, con il rapporto dei differenziali

$$x, y, \frac{dy}{dx}$$

ove

$$\varphi(x + dy, x + dx, u, v) = 0$$



e quindi semplicemente

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0.$$

Si può anche fare lo stesso ragionamento rispetto ad  $(u, v)$  e quindi avere  $(u, v) (u_0, v_0)$ ; oppure  $u, v, \frac{du}{dv}$ .

Resterà definita una funzione, **angolo**, di tali due elementi orientati, cioè

$$\alpha \equiv \Phi [P, \gamma; P_1, \gamma_1]$$

con la ben nota condizione che

$$\Phi [P, \gamma^*; P_1, \gamma_1^*] = \Phi [P, \gamma; P_1, \gamma_1]$$

sempre che l'angolo orientato  $[\gamma, \gamma^*]$  sia uguale all'angolo orientato  $[\gamma_1, \gamma_1^*]$ .

Il trasporto rigido di un fascio lungo una curva equivale, come abbiamo visto nel luogo precisato, ad eseguire un processo integrale di Stieltjes, mediante tali funzioni. E ciò come caso limite del trasporto lungo una qualunque poligonale, riferendone successivamente i vertici.

Il problema si può ridurre ad una variazionale, ove, sotto segno di integrale, comparisca una funzione dipendente anche dalle coordinate, oltrechè dai differenziali.

Quindi, sostanzialmente, le autoparallele sono le curve che estremizzano l'angolo di trasporto.

Se ora reciprocamente si fissa un'altra funzione di punti orientati

$$\lambda = \Psi (P, \gamma; P_1, \gamma_1)$$

osservando che  $P$  come atto a caratterizzare lo scorrimento dei punti di una geodetica  $t$ , rispetto all'altra  $t_1$ , con la condizione che

$$\Psi [P^*, \gamma; P_1^*, \gamma_1] = \Psi [P, \gamma; P_1, \gamma_1]$$

sempre che l'arco di geodetica  $t$  fra  $P$  e  $P^*$  sia eguale a quello di geodetica  $\gamma_1, P_1$  e  $P_1^*$ , noi avremo definito precisamente un metrisimo. E quindi si può anche qui definire un problema variazionale, per avere come estremali le curve di scorrimento nullo.

Ma se si osserva che per la corrispondenza intercedente fra coppie di varietà reciproche è precisamente tale che fa corrispondere lunghezze di geodetiche dell'uno ad archi angolari dell'altro, risulta subito che un metrisimo di una delle due varietà è un parallelismo per la sua reciproca. E

quindi che le due varietà reciproche si corrispondono altresì in modo da connettere parallelismi e metrismi.

Dunque sostanzialmente, si ha il seguente schema:

I. Esistono coppie di  $V_2$ , immerse negli spazi lorentziani, che si possono dire reciproche, in quanto alle geodetiche

II. Alle geodetiche dell'una corrispondono punti dell'altra; inoltre alla metrica lineare dell'una, è identica alla tangenziale dell'altra.

III. La geometria dei trasporti di parallelismo e di metrisimo su una di esse, determina, attraverso tale reciprocità, quella dei metrisimi e dei parallelismi dell'altra.

IV. Le curve autoparallele dell'una corrispondono alle curve di scorrimento nullo dell'altra.

V. Infine, una geometria dei trasporti, istituita su tale coppia di varietà, si riconnette allo studio di tutte le coppie di punti reciproci [scelti naturalmente, uno in una varietà e l'altro sull'altra].

Osserviamo, infine, che ad ogni curva, pensata come luogo ed involuppo in una metrica, corrisponde un'altra curva pensata come involuppo e luogo nell'altra.

Se per la prima, si chiamano  $da$  e  $ds$  l'elemento angolare e lineare in un suo punto generico sarà  $\frac{da}{ds} = g$  curvatura geodetica in quel punto della curva, e quindi  $\frac{da}{g} = ds$ .

E chiamando  $d\alpha$ ,  $d\sigma$  gli elementi corrispondenti nell'altra curva, a causa dello scambio di metrica tangenziale e lineare, dovrà essere:

$$da = d\sigma \quad ; \quad d\alpha = ds.$$

Pertanto, se  $g$  e  $\gamma$  sono rispettivamente le curvature geodetiche delle due curve in un punto-tangente corrispondente ad un punto-tangente, risulterà:

$$da = gds = d\sigma \quad ; \quad d\alpha = \gamma d\sigma = ds$$

cioè

$$g = \frac{d\sigma}{ds} \quad ; \quad \gamma = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Quindi

VI. Le due curvature reciproche, in punti-tangenziali reciproci, presenteranno curvature geodetiche inverse. La curvatura geodetica di una di esse, vale il rapporto fra l'elemento lineare dell'altra curva al proprio.

**Matematica.** — *Osservazioni sulle superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche.* Nota di PATRICK DU VAL, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

Faccio seguito alla Nota presentata nella precedente seduta con alcune osservazioni intorno alla superficie dei diversi tipi colà enumerate.

Benchè l'imposizione di un punto doppio ad una superficie di genere 1 sia una condizione unica, e benchè la superficie  $F_{10}$  di tipo *b*) abbia un nodo, e soddisfaccia solo ad una condizione, questo non è il solo caso in cui la superficie, le cui sezioni iperpiane sono curve canoniche di genere 6, ha un punto doppio.

Invero se una superficie  $F_{10}$  a curve sezioni canoniche di  $S_6$  possiede un punto doppio, proiettando da questo si otterrà una superficie  $F_8$  le cui sezioni iperpiane sono curve canoniche di genere 5, la quale — non essendo del tipo *a*) — sarà l'intersezione di tre quadriche, oppure una superficie di Veronese doppia con curva di diramazione di ordine 12; abbiamo già visto che la superficie del tipo *b*) dà origine al secondo caso, e abbiamo visto come la curva di diramazione sia speciale.

Ma il primo caso è anchè possibile; naturalmente la superficie  $F_8$  conterrà una conica che prende origine dall'intorno del punto proiettante. L'intersezione di tre quadriche, due delle quali abbiano un piano in comune, contiene una conica; aggiungendo questa conica alle sezioni iperpiane otteniamo un sistema lineare il cui modello proiettivo è una superficie che ha curve canoniche di genere 6 come sezioni iperpiane.

Questa superficie (intersezione di tre quadriche di  $S_5$  che hanno una conica in comune) si proietta dalla sua conica in un piano doppio che ha una curva di diramazione sestica, poichè l'intersezione residuale di tre quadriche di  $S_4$  che abbiano una conica in comune è una sestica di genere 2 che taglia la conica in quattro punti, così che proiettando dal piano della conica la sestica diventa una retta doppia con sei punti di diramazione. La conica stessa diventa una curva secante la retta generale del piano doppio in quattro punti, cioè una quartica razionale, che tocca la curva di diramazione in tutte le sue intersezioni (i tre punti doppi di essa sono quel che potremmo dire punti doppi apparenti, cioè punti in cui i due rami della curva sono su falde diverse della superficie). Ora una quartica di contatto ad una sestica potrà avere i suoi 12 punti di contatto su una cubica, o non. Se sono su una cubica, le sei inter-

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

sezioni rimanenti di tale cubica con la sestica sono punti di contatto di una conica, e il piano doppio è la proiezione di una superficie quartica di  $S_3$  con punto doppio, dallo stesso punto doppio. Le sezioni piane della superficie quartica entrano nel sistema di quartiche di contatto che contengono la quartica data, e se una qualunque delle quartiche del sistema possiede uno o più punti doppi, questi corrispondono a punti doppi della sezione piana della superficie quartica, e sono quindi punti doppi effettivi e non apparenti della curva sul piano doppio. Così i punti di contatto della quartica che prende origine dalla conica sulla superficie di  $S_5$ , e dal punto doppio della superficie di  $S_6$ , non giacciono sopra una cubica. Quindi appartengono a una serie lineare non speciale sulla sestica, la cui dimensione è di conseguenza due. Viene imposta così una condizione alla sestica: che esista un sistema di quartiche di contatto i cui punti di contatto non siano su una cubica, una di esse avendo tre nodi; poichè in un sistema di quartiche piane di dimensione due, dovremmo trovarne in via generale solo un numero finito con due nodi.

Dato che le superficie  $F_{10}$  di  $S_6$  possedenti un punto doppio che hanno per sezioni iperpiane curve canoniche di genere sei si dividono in due tipi distinti, dipendenti ciascuno da 18 moduli, può avere interesse il ricercare se le superficie generali che hanno sezioni iperpiane di questo genere, senza punto doppio (e dipendono quindi da 19 moduli) costituiscono un solo sistema continuo ovvero due. Si risponde che costituiscono una sola specie, poichè se la superficie  $F_{10}$  non è del tipo *b*), la sezione iperpiana generale è birazionalmente equivalente a una sestica piana con quattro punti doppi <sup>(1)</sup>, ed ha cinque sistemi di  $\infty^1$  piani quadrisecanti, da uno qualunque dei quali la curva si proietta in una sestica; si tratta naturalmente di piani quadrisecanti della superficie, e da un piano quadrisecante la superficie si proietta in una superficie sestica di  $S_3$  la cui curva doppia è una quartica, che (il genere  $p_9$  della superficie essendo l'unità), giace su di una sola quartica, e perciò è razionale. Ora il sistema lineare delle superficie cubiche per una quartica razionale rappresenta una varietà quintica  $V_3^5$ , sezione generale di  $S_6$  colla  $V_6^5$  di  $S_9$ , che rappresenta le rette di  $S_4$  <sup>(2)</sup>; si ha così che  $V_3^5$  rappresenta le rette comuni e tre complessi lineari di  $S_4$ , cioè il sistema delle triseccanti della proiezione della superficie di Veronese da un punto generale; la superficie sestica che passa due volte per la quartica rappresenta una sezione generale quadrica di  $V_3^5$ , che è così il tipo generale di superficie con curve — sezioni canoniche di genere sei.

In altre parole,

*il solo tipo generale di superficie che ha per sezioni iperpiane delle curve canoniche di genere 6 è la sezione quadrica della  $V_3^5$  che rappresenta le rette comuni*

(1) ENRIQUES-CHISINI, «Lezioni» III, p. 111.

(2) J. A. TODD, in «Proc. Lond. Math. Soc.» (Ser. 2<sup>a</sup>) XXX, p. 543, (1929).



a tre complessi lineari di  $S_4$ . Tale superficie può avere un punto doppio in due diversi modi, ciascuno dei quali impone una condizione unica; con uno di essi si ha la superficie di tipo b) di cui sopra, con l'altro si ha una superficie la cui proiezione dal suo punto doppio è l'intersezione di tre quadriche di  $S_3$ , che hanno una conica in comune. La prima superficie è equivalente birazionalmente a un piano doppio con sestica di diramazione che possiede una retta tritangente, la seconda ad un piano doppio con sestica di diramazione che è toccata in 12 punti non giacenti sopra una cubica da una quartica con tre punti doppi.

Possiamo prendere come un modello conveniente della seconda superficie di  $S_3$ , la superficie sestica che ha una quartica razionale come curva doppia, e che ha pure un punto doppio isolato.

Non si può dare una rappresentazione di questa forma della superficie b) poichè la curva canonica di genere 6 riducibile alla quintica piana (sezione generale iperpiana delle superfici b)) non ha piano quadrisecante, dato che giace sopra una superficie di Veronese. Tuttavia il prof. Enriques mi ha indicato che, rappresentando il cono Veronese sopra lo  $S_3$  per mezzo del sistema di quadriche tangenti a un piano in un punto fissato, la superficie b) ha come modello una superficie quintica con punto triplo a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima (con 6 punti cuspidali) ed una retta semplice. La rappresentazione è ottenuta proiettando il cono di Veronese dal piano di una sua conica, che incontra la superficie in cinque punti di una delle sue quintiche di genere due; questa curva dà luogo alla retta doppia nell'intorno del punto triplo, mentre la retta semplice nasce dall'intorno del punto doppio sulla superficie originaria. Proiettando tale superficie quintica di  $S_3$  dal suo punto doppio, otteniamo la rappresentazione sul piano doppio; la retta semplice infinitesima vicina al punto triplo dà la tritangente alla curva di diramazione.

Terminando, tengo ad esprimere al prof. Enriques la mia gratitudine per il cortese aiuto e per molti consigli prestatimi nel corso di questa ricerca.



**Matematica.** — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes.* Nota di M. KOURENSKY, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans la méthode de Darboux, pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec une fonction inconnue de 2 variables indépendantes

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

quand à l'équation donnée (1) on adjoint la 2<sup>me</sup> équation compatible

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const.},$$

pour chercher la fonction  $\Phi$ , on est conduit à l'intégration d'un système de 2 équations non linéaires du 1<sup>er</sup> ordre avec une fonction inconnue  $\Phi$ . Ces équations peuvent être réduites à un système de 2 équations linéaires, liées avec les racines de l'équation quadratique

$$\frac{\partial F}{\partial r} \lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial s} \lambda + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Dans la suite je veux montrer, que pour l'intégration du système de 2 équations aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec 2 fonctions  $\zeta_1, \zeta_2$  de 2 variables indépendantes

$$(2)' \quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2; \zeta_1, \zeta_2; p_1^1, p_2^1; p_1^2, p_2^2; p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1; p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = 0 \\ F_2(x_1, x_2; \zeta_1, \zeta_2; p_1^1, p_2^1; p_1^2, p_2^2; p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1; p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = 0, \end{cases}$$

où

$$p_i^k = \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \quad ; \quad p_{ij}^k = \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j, k = 1, 2),$$

quand au système donné (2) on adjoint la 3<sup>me</sup> équation compatible

$$(3) \quad \Phi(x_1, x_2; \zeta_1, \zeta_2; p_1^1, p_2^1; p_1^2, p_2^2; p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1; p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = \text{const.},$$

pour chercher la fonction  $\Phi$ , nous arrivons à l'intégration d'un système de 4 équations non linéaires du 1<sup>er</sup> ordre avec une fonction inconnue  $\Phi$ , et ces équations peuvent être réduites à un système de 4 équations linéaires, liées avec les racines d'une équation intéressante du 4<sup>me</sup> degré.

Dès qu'on suppose

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{11}^1, p_{11}^2}\right) \neq 0 \quad ; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1}\right) \neq 0,$$

(1) Nella seduta del 21 febbraio 1932.

en utilisant les notations de mon mémoire<sup>(1)</sup>:

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{i_1 i_2}^k, p_{j_1 j_2}^l}\right) = D_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{k l} ; \quad D\left[\frac{F_1, F_2}{p_{i_1 i_2}^k, x_j}\right] = D_{i_1 i_2 j}^{k 0}$$

$$D_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{k l} = -D_{j_1 j_2 i_1 i_2}^{l k} ; \quad D_{i_1 i_2 j}^{k 0} = -D_{j i_1 i_2}^{0 k}$$

$$(i_1, i_2; j_1, j_2; j, k, l = 1, 2)$$

et introduisant encore les positions nouvelles:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} D_{1112}^{11} = a & ; & D_{1222}^{11} = b & ; & D_{2211}^{11} = c \\ D_{1111}^{12} = a_1 & ; & D_{1112}^{12} = a_2 & ; & D_{1122}^{12} = a_3 \\ D_{1211}^{12} = b_1 & ; & D_{1212}^{12} = b_2 & ; & D_{1222}^{12} = b_3 \\ D_{2211}^{12} = c_1 & ; & D_{2212}^{12} = c_2 & ; & D_{2222}^{12} = c_3 \\ D_{1112}^{22} = \alpha & ; & D_{1222}^{22} = \beta & ; & D_{2211}^{22} = \gamma \\ D_{1111}^{10} = A & ; & D_{1112}^{10} = B & ; & D_{1222}^{10} = C & , & D_{2222}^{10} = D & ; & D_{1111}^{20} = E, \end{array} \right.$$

les 4 équations non linéaires, qui représentent les conditions de compatibilité de 3 équations (2)–(3) [formules (7) du mémoire cité] peuvent être remplacées par un système de 6 équations linéaires [(8) du travail susdit]. Ce système d'équations linéaires, à l'aide des positions (4), s'écrit:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (b - \mu c_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} + c \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + (a + \mu a_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1} + \mu c \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^2} = 0 \\ (b_1 - \lambda c_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} - a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + \lambda a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1} + (a + \lambda c) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^2} = 0 \\ c_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} - \lambda c_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + (\lambda b_3 - a_3) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1} - (c + \lambda b) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^2} = 0 \\ (c_1 - \mu \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} - \lambda c_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + (\lambda b_1 - a_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1} + \\ + (\mu a_2 - \lambda b - c) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^2} - \mu a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^2} = 0 \\ (c_2 + \mu \gamma) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} - \lambda c_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + (\lambda b_2 - a_2) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1} + \mu a_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^2} - \\ - \mu a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^2} - (c + \lambda b) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^2} = 0 \\ (D - \mu E) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} - \lambda D \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + (\lambda C - B) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1} + \mu A \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^2} - \\ - \mu a_1 \frac{d\Phi}{dx_1} - (c + \lambda b) \frac{d\Phi}{dx_2} = 0, \end{array} \right.$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des fonctions indéterminées des variables  $x, \zeta, p$ .

(1) M. KOURENSKY, « Annali di matematica pura ed applicata », série IV, t. VIII, pp. 293–300, 1930.

Il est aisé de voir, que les jacobiens (4) sont liés par les identités

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} ac_1 + ba_1 + cb_1 \equiv 0 \\ ac_2 + ba_2 + cb_2 \equiv 0 \\ ac_3 + ba_3 + cb_3 \equiv 0 \\ c\alpha \equiv \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \equiv a\alpha \\ \gamma c \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \equiv \gamma a \end{array} \right.$$

etc.

Vu la 1<sup>ère</sup> et la 3<sup>ème</sup> de ces identités, indiquées aussi dans mon article cité (1), les 2 premières équations du système (5) sont équivalentes à une seule équation, quand  $\lambda$  et  $\mu$  sont liées par l'équation algébrique (10) du même article. Cette équation d'après (4), s'écrit:

$$(7) \quad \lambda c^2 + \mu a_1 + a = 0.$$

La sixième équation du système (5) ne dépend pas des équations précédentes, puisque elle contient les dérivées  $\frac{d\Phi}{dx_1}$ ,  $\frac{d\Phi}{dx_2}$ , qui n'entrent pas dans aucune des autres équations du système (5). Il faut étudier la dépendance des 4 équations moyennes.

L'élimination de la dérivée  $\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}^2}$  des équations 2<sup>me</sup> et 4<sup>me</sup> et l'élimination des dérivées  $\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}^2}$ ,  $\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}^2}$  des équations 2<sup>me</sup>, 3<sup>me</sup>, 5<sup>me</sup>, conduit à deux équations linéaires par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}^1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}^1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}^1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}^2}.$$

Vu les identités (6) et l'équation (7), la 1<sup>ère</sup> équation s'écrit:

$$\begin{aligned} & [b(a_1 - \lambda b_1 + \lambda^2 c_1) + (a + \lambda c)(\lambda c_2 - b_2)] \frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}^1} + \\ & + [c(a_1 - \lambda b_1 + \lambda^2 c_1) + a_2(a + \lambda c)] \frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}^1} + \\ & + [a(a_1 - \lambda b_1 + \lambda^2 c_1) - (a + \lambda c)\lambda a_2] \frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}^1} - (a + \lambda c)^2 \frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}^2} = 0; \end{aligned}$$

(1) Loc. cit. Dans la page 298 est inséré: «... + D<sub>22 12</sub><sup>2 1</sup> D<sub>12 11</sub><sup>1 1</sup> ≡ 0», au lieu de «... + D<sub>22 22</sub><sup>2 1</sup> D<sub>12 11</sub><sup>1 1</sup> ≡ 0».

la 2<sup>ème</sup> équation est:

$$\begin{aligned} & [b(a_3 - \lambda b_3 + \lambda^2 c_3) - (c + \lambda b) c_2] \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} + \\ & + [c(a_3 - \lambda b_3 + \lambda^2 c_3) + (c + \lambda b) \lambda c_2] \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + \\ & + [a(a_3 - \lambda b_3 + \lambda^2 c_3) + (c + \lambda b)(a_2 - \lambda b_2)] \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1} + (c + \lambda b)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^2} = 0. \end{aligned}$$

Ces équations coïncident, quand

$$\begin{aligned} & \frac{b(a_1 - \lambda b_1 + \lambda^2 c_1) + (a + \lambda c)(\lambda c_2 - b_2)}{b(a_3 - \lambda b_3 + \lambda^2 c_3) - (c + \lambda b) c_2} = \\ & = \frac{c(a_1 - \lambda b_1 + \lambda^2 c_1) + (a + \lambda c) a_2}{c(a_3 - \lambda b_3 + \lambda^2 c_3) + (c + \lambda b) \lambda c_2} = \\ & = \frac{a(a_1 - \lambda b_1 + \lambda^2 c_1) - (a + \lambda c) \lambda a_2}{a(a_3 - \lambda b_3 + \lambda^2 c_3) + (c + \lambda b)(a_2 - \lambda b_2)} = \\ & = \frac{(a + \lambda c)^2}{(c + \lambda b)^2}. \end{aligned}$$

Ces 3 conditions, à cause des identités (6), sont équivalentes aux équations:

$$\begin{aligned} a(K\lambda^4 + L\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + P) &= 0 \\ b(K\lambda^4 + L\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + P) &= 0 \\ c(K\lambda^4 + L\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + P) &= 0. \end{aligned}$$

D'après cela, si une au moins des inégalités  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , est satisfaite, nous en sommes à la détermination de la fonction inconnue  $\lambda$  de l'équation:

$$K\lambda^4 + L\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + P = 0.$$

Cette équation, sous forme développée, est

$$\begin{aligned} & [b(bc_1 + cc_2) + c^2 c_3] \lambda^4 + \\ & + [b^2(a_2 - b_1) + 2(bcc_1 + abc_2 + acc_3) + c^2(c_2 - b_3)] \lambda^3 + \\ & + [a^2 c_3 + b(ba_1 + ab_2) - 2(bcb_1 + abb_2 + acb_3) + c^2(c_1 - 2b_2 + a_3)] \lambda^2 + \\ & + [c^2(a_2 - b_1) + 2(bca_1 + aba_2 + aca_3) + a^2(c_2 - b_3)] \lambda + \\ & + [a(aa_3 + ca_2) + c^2 a_1] = 0. \end{aligned}$$

Alors, indiquant par  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) une des racines de l'équation précédente et déterminant  $\mu$  de l'équation (7) par la formule

$$\mu_i = -\frac{a + \lambda_i c}{a_1},$$

nous arrivons à l'intégration d'un système de 4 équations linéaires et indépendantes aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre avec une seule fonction  $\Phi$

$$(a + \lambda_i c) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^2} = (\lambda_i c_1 - b_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} + a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} - \lambda_i a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1};$$

$$(c + \lambda_i b) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^2} = c_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} - \lambda_i c_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + (\lambda_i b_3 - a_3) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1};$$

$$(a + \lambda_i c)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^2} = [b(a_1 - \lambda_i b_1 + \lambda_i^2 c_1) + (a + \lambda_i c)(\lambda c_2 - b_2)] \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} +$$

$$+ [c(a_1 - \lambda_i b_1 + \lambda_i^2 c_1) + (a + \lambda_i c)a_2] \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} +$$

$$+ [a(a_1 - \lambda_i b_1 + \lambda_i^2 c_1) - (a + \lambda_i c)\lambda a_2] \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1},$$

$$- a_1(a + \lambda_i c) \frac{d\Phi}{dx_1} + a_1(c + \lambda_i b) \frac{d\Phi}{dx_2} + A(a + \lambda_i c) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^2} =$$

$$= [D\lambda_1 + E(a + \lambda_i c)] \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}^1} - \lambda_i D a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}^1} + (\lambda_i C - B) a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}^1},$$

où

$$\frac{d\Phi}{dx_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_1} p_i^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_2} p_i^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^1} p_{1i}^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} p_{1i}^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^1} p_{2i}^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} p_{2i}^2$$

$$(i = 1, 2).$$

Si un ou plusieurs de ces systèmes de 4 équations linéaires et homogènes, correspondant à une ou à plusieurs racines  $\lambda_i$ , sont complètement intégrables et si nous en trouvons 4 intégrales particulières  $\Phi_j = C_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) compatibles avec les équations (2), alors la détermination des fonctions inconnues  $\chi_1, \chi_2$  se réduit aux quadratures d'après les relations

$$dp_i^k = p_{i1}^k dx_1 + p_{i2}^k dx_2$$

$$d\chi_k = p_1^k dx_1 + p_2^k dx_2$$

$$(i, k = 1, 2).$$



Nous avons étudié le cas général, quand le système (2) contient les six dérivées  $p_{ij}^k$ . La combinaison d'inégalités

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{11}^1, p_{11}^2}\right) \neq 0 \quad ; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{12}^1, p_{12}^2}\right) \neq 0$$

représentent une des 756 combinaisons possibles, - c'est le nombre des déterminants du 5<sup>me</sup> ordre de la matrice avec les 6 horizontales et 9 colonnes. Pour l'équation du 2<sup>nd</sup> ordre avec une seule fonction de 2 variables indépendantes, nous avons les 40 combinaisons d'inégalités correspondantes, indiquées dans ma note dans ce journal, vol. X, fs. 3-4, 1929, pp. 153-154.

Pour les systèmes, qui contiennent 1, 2, 3, 4, 5 dérivées  $p_{ij}^k$ , nous obtiendrons les simplifications importantes, analogiquement aux systèmes avec une seule fonction inconnue, étudiés dans ma note dans ce journal, vol. XIV, fs. 10, 1931, pp. 408-414. La théorie complète d'intégration des systèmes mentionnés avec 2 fonctions inconnues aura la place dans un article spécial.

**Matematica.** — *Superficie ortobariche di un corpo.* Nota di L. SONA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il prof. T. Levi-Civita, in una sua Nota del 1930 <sup>(2)</sup>, ha messo in rilievo l'esistenza delle *direttrici ortobariche* per ogni corpo finito, cioè delle linee tali che il piano normale ad esse in ogni loro punto, taglia il corpo secondo una sezione ché, supposta omogenea, ha quel punto stesso per baricentro. Io mi propongo di rilevare, in questa piccola Nota, che le direttrici ortobariche costituiscono in generale una *congruenza normale* <sup>(3)</sup>. Esiste quindi una famiglia di superficie tagliate ortogonalmente dalle direttrici ortobariche e che perciò chiamerei *superficie ortobariche*. Esse godono della proprietà che il piano che le tocca in un generico punto taglia il corpo secondo una sezione avente il punto di contatto come baricentro.

In sostanza la esistenza delle superficie ortobariche segue immediatamente da una proposizione enunciata nel 1888 dal prof. Peano <sup>(4)</sup>. Essa

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Sezioni piane e direttrici ortobariche*. «Rend. Acc. Lincei», serie 6<sup>a</sup>, vol. XII, 1930, pp. 535-546. Il LEVI-CIVITA stesso ebbe occasione successivamente di applicare questi concetti a una importante trattazione d'idrodinamica: *Sui getti liquidi*. «Rend. Seminario Mat. e Fisico di Milano», vol. V, 1931.

(3) È bene avvertire che per ogni punto di S passa almeno una direttrice ortobarica ma non necessariamente una sola.

(4) G. PEANO, *Teoremi su massimi e minimi geometrici e su normali a curve e superficie*. «Rend. Circ. Mat. Palermo», 1888, II.

dice che se un piano mobile  $\pi$  taglia da un corpo  $\tau$  un volume costante, il punto di contatto di  $\pi$  col suo inviluppo è baricentro della sezione che  $\pi$  determina in  $\tau$ . Segue da ciò che questo inviluppo ha per traiettorie ortogonali proprio le direttrici ortobariche definite sopra. Dunque queste direttrici ortobariche costituiscono una congruenza normale. Anzi se indichiamo con  $V$  un volume non superiore a quello del corpo, l'equazione delle superficie stesse può essere scritta addirittura:

$$V = \text{cost.}$$

intendendo  $V$  come volume di una porzione staccata dal corpo con un piano. In particolare, se il corpo è convesso, la superficie stessa che lo limita è ortobarica <sup>(1)</sup>.

Mi sembra però non privo di interesse dare una breve dimostrazione analitica della esistenza delle superficie ortobariche. Accennerò infine al caso in cui il corpo considerato è un ellissoide.

1. Sia un corpo  $S$  semplicemente connesso, e

$$(1) \quad z = f(x, y)$$

l'equazione della superficie che lo limita. Sia  $\sigma$  l'intersezione di  $S$  col piano:

$$(2) \quad ux + vy + wz + 1 = 0,$$

e  $\sigma'$  la proiezione di  $\sigma$  sul piano  $xy$ . Il contorno di  $\sigma'$  avrà l'equazione sul piano  $xy$ :

$$(3) \quad f(x, y) + \frac{ux + vy + 1}{w} = 0.$$

Risolta la (3) rispetto ad  $y$  essa darà in generale due valori  $y_1$  e  $y_2$  per la  $y$ , funzioni di  $(u, v, w, x)$ .

Indicate con  $X, Y, Z$  le coordinate del centro di gravità  $G$  della sezione  $\sigma$ , detti  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente il minimo e il massimo valore dell'ascissa sulla  $\sigma'$ , si ricava con semplici considerazioni:

$$(4) \quad X = \frac{1}{\sigma'} \int_{x_1}^{x_2} x (y_2 - y_1) dx; \quad Y = \frac{1}{\sigma'} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (y_2^2 - y_1^2) dx;$$

$$Z = \frac{-uX - vY - 1}{w}.$$

(1) Ricordiamo anche che a questo proposito il prof. G. Ascoli ebbe recentemente a dimostrare che fra gli infiniti piani passanti per un punto  $P$  interno al corpo, quello che determina una sezione avente il baricentro nel punto  $P$ , divide il corpo in due parti una di volume minimo, l'altra di volume massimo. (G. ASCOLI, *Sui baricentri delle sezioni piane di un dominio spaziale connesso*. « Boll. Un. Mat. It. », Anno X, n. 3, giugno 1931).

dovè: . . . . .

$$\sigma' = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1) dx.$$

Si noti che essendo  $x_1$  e  $x_2$  funzioni di  $u, v, w$ , le XYZ risultano pure funzioni di  $u, v, w$ .

Indichiamo ora con  $V$  il volume della minore delle due parti in cui il corpo dato viene diviso dal piano (2). Supponiamo dapprima che il volume  $V$  sia tutto interno al cilindro di base  $\sigma'$  con generatrici parallele all'asse  $z$ .

Essendo il volume  $V$  compreso fra il piano (2) e la superficie (1) si avrà:

$$(5) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \left[ f(x, y) + \frac{ux + vy + 1}{w} \right] dy$$

che ci dà il volume  $V$  in funzione delle  $u, v, w$ .

Calcoliamo le derivate di  $V$  rispetto a  $u, v, w$ . Osservando che tanto nel primo come nel secondo integrale sono nulli i termini contenenti le derivate dei limiti per l'annullarsi delle funzioni integrande per i valori corrispondenti ai limiti stessi, si ottiene facilmente, tenendo conto delle (4):

$$(6) \quad \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\sigma'}{w} X; \quad \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\sigma'}{w} Y; \quad \frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\sigma'}{w} Z.$$

Consideriamo ora le equazioni differenziali delle direttrici ortobariche<sup>(1)</sup>:

$$(7) \quad \frac{dX}{u} = \frac{dY}{v} = \frac{dZ}{w}$$

[ $u, v, w$  sono proporzionali ai coseni direttori della normale al piano (2)].

La condizione caratteristica affinchè le direttrici ortobariche costituiscano una congruenza normale è che l'equazione:

$$(8) \quad u dX + v dY + w dZ = 0$$

ammetta un fattore integrante, cioè che a meno di un fattore integrante il primo membro sia un differenziale esatto.

Dalle (4) si potranno ottenere i valori di  $dX, dY, dZ$  mediante  $du, dv, dw$  e le derivate di  $X, Y, Z$  rispetto a  $u, v, w$ . Si constata allora con semplici considerazioni che la (8) si può mettere nella forma:

$$X du + Y dv + Z dw = 0$$

(1) LEVI-CIVITA, loc. cit.

e sostituendo a  $X, Y, Z$  i valori che si possono ottenere dalle (6), si ottiene infine come primo membro della (8), a meno di un fattore, il differenziale totale di  $V$ :

$$(9) \quad \frac{w}{\sigma'} dV = 0.$$

Esiste quindi un fattore integrante della (8) ed esiste quindi una famiglia di superficie tagliate normalmente dalle direttrici ortobariche.

Avendo escluso il caso  $w = 0$  colla condizione che il volume sia tutto compreso nel cilindro di base  $\sigma'$ , si avrà dalla (9):

$$(10) \quad V = \text{cost.}$$

È questa l'equazione della suddetta famiglia.  $V$  è espressa mediante la (5) in funzione delle  $(u, v, w)$ ; la (10) darebbe perciò le superficie ortobariche come involuppi di piani. L'equazione in coordinate cartesiane si avrebbe ricavando dalle (4) le  $u, v, w$  in funzione delle  $XYZ$  <sup>(1)</sup>.

È evidente che, avendo scelto un sistema di coordinate arbitrario, si può ritenere la (10) valevole anche per quei piani che segando il corpo determinano due parti nessuna delle quali è compresa interamente nel cilindro di base  $\sigma'$  e quindi anche per i piani paralleli all'asse  $z$  per i quali  $w = 0$ .

Considerando i piani tangenti al corpo si annullerebbe la  $\sigma'$  (quando il corpo è convesso), ma in tal caso  $V = 0$  e vale quindi ancora la (10).

2. Se ad esempio  $S$  è un ellissoide di semiassi  $a, b, c$ , con riferimento ai suoi assi è facile trovare che le direttrici ortobariche hanno le equazioni:

$$(11) \quad z = kx^m; \quad z = k'y^n \quad \text{con} \quad m = \frac{a^2}{c^2}; \quad n = \frac{b^2}{c^2} \quad \text{e } k, k' \text{ costanti}$$

e che le superficie ortobariche sono ellissoidi interni a quello dato, ad esso concentrici ed omotetici.

Fissando uno qualunque di tali ellissoidi di semiassi  $\lambda a, \lambda b, \lambda c$  con  $\lambda < 1$  e positivo, si verifica senza difficoltà che il piano tangente ad esso

(1) L'esistenza delle  $u, v, w$  come funzioni di  $X, Y, Z$ , cioè l'esistenza per ogni punto interno ad un corpo di un piano che tagli il corpo secondo una sezione avente tale punto come baricentro, risulta immediatamente dall'esistenza delle superficie ortobariche e quindi del piano tangente in ogni loro punto. Essa fu dimostrata direttamente dal prof. TRICOMI assieme ad altre proprietà dei baricentri delle sezioni piane in due recenti Note: *Sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo*. «Rend. Acc. Lincei», 1931, vol. XIII, p. 407 e vol. XIII, p. 478.

in un suo punto qualunque divide  $S$  in due parti di volume costante. Quello minore è espresso dalla formula:

$$(12) \quad V = \frac{\pi abc}{3} (2 - 3\lambda + \lambda^3).$$

Per  $\lambda = 1$  si ha evidentemente  $V = 0$ ; la corrispondente superficie ortobarica è l'ellissoide stesso che limita  $S$ ; per  $\lambda = 0$  il volume  $V$  diventa metà di quello di  $S$  e la superficie ortobarica degenera nel centro di  $S$ , punto comune a tutte le direttrici ortobariche.

**Matematica.** — *Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (Un problema del sig. Bruno de Finetti).* Nota di A. KOLMOGOROFF, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulla riduzione di rango dei sistemi canonici mediante integrali generici.* Nota di G. D. MATTIOLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sur les lignes de plus grande pente de la fonction de Green.* Nota di P. ROCHER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Su di una proprietà delle curve intuitive sghembe.* Nota di S. CHERUBINO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Quelques nouvelles notions infinitesimales directes.* Nota di J. MIRGUET, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.



**Geometria.** — *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine.* Nota di L. CAMPEDELLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

1. Dopo l'analisi dei piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine <sup>(2)</sup>, classifichiamo qui quelli con curva di diramazione  $C_{10}$  del decimo ordine (non riducibile ad ordine inferiore mediante trasformazioni quadratiche). Tali p. d. danno luogo a 28 tipi essenzialmente diversi, la maggior parte dei quali però porta soltanto a verifiche ovvie di teorie e risultati conosciuti. Ma accanto a quei p. d. che si realizzano assegnando ad arbitrio i punti singolari della  $C_{10}$ , se ne hanno altri per cui ciò non è possibile: questi offrono un certo interesse per le questioni di esistenza cui danno origine e per le notevoli superficie che loro corrispondono. Rileviamo in particolare i p. d. regolari con genere superficiale  $p_a = p_g = 0$ , di genere lineare  $p^{(1)} = 3$  o  $p^{(1)} = 2$ , e di bigenere  $P = p^{(1)} = 3$  o  $P = p^{(1)} = 2$ , che offrono esempi nuovi per la teoria delle superficie <sup>(3)</sup>.

È interessante osservare come dai soli p. d. con curva di diramazione d'ordine otto e dieci, si abbiano esempi di quasi tutte quelle superficie con certe notevoli caratteristiche (superficie di genere zero e bigenere  $P \geq 1$ ; superficie con sistema canonico dotato di punti base; superficie irregolari non rigate; ecc.), la cui esistenza, accertata attraverso casi particolari costruiti con vari mezzi da G. CASTELNUOVO ed F. ENRIQUES, è stata di tanto valido aiuto nei primi sviluppi della teoria delle superficie algebriche <sup>(4)</sup>.

2. Elenchiamo i p. d. con  $C_{10}$  di diramazione, scrivendo in corsivo quelli che offrono maggiore interesse [nn. 10), 26), 27), 28)]. Per lo studio di questi si rimanda ad altra Nota che farà seguito alla presente.

1)  $C_{10}$  priva di singolarità: p. d. regolare ( $p_a = p_g = p$ ) di genere superficiale  $p = 6$  con curve canoniche iperellittiche rappresentate (doppia-

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) Cfr. L. CAMPEDELLI, *Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine* (in questi « Rendiconti », 7 febbraio 1932).

(3) La circostanza nuova confermata da questi esempi, che esistono effettivamente delle superficie regolari di genere superficiale zero e genere lineare  $p^{(1)} > 1$ , riesce d'altra parte esemplificata anche da una interessante superficie costruita da L. GODEAUX, per la quale si ha  $p^{(1)} = 2$ : cfr. L. GODEAUX, *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (in questi « Rendiconti », ser. 6<sup>a</sup>, vol. XIV, p. 479, 6 dicembre 1931), e le parole del presentatore prof. F. ENRIQUES che annunciano il presente risultato (ivi, p. 537).

(4) Cfr. p. es., F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. CAMPEDELLI (Padova, « Cedam », 1932).

mente) dalle coniche, e *bigenere*  $P = 15$ , le curve bicanoniche essendo date dalle quartiche (doppie).

2)  $C_{10}$  con un punto di molteplicità 10: superficie rigata di genere 4 ( $p_d = -4$ ,  $p_g = 0$ ).

3)  $C_{10}$  con un punto di molteplicità 8 (o 9): p. d. razionale ( $p_* = p_g = P = 0$ ).

4)  $C_{10}$  con un punto sestuplo (o di molteplicità 7): poichè un punto sestuplo è doppio per le coniche che danno il sistema canonico, e quadruplo per le quartiche bicanoniche, si ha  $p = 3$ ;  $P = 5$ , ed è inoltre  $p^{(1)} = 1$ .

5)  $C_{10}$  con un punto sestuplo  $M^6$  e un punto quadruplo:  $p = 2$ ;  $p^{(1)} = 1$ ;  $P = 3$ . In questo caso rientra anche quello di un punto  $M^7$  con un punto triplo infinitamente vicino.

6)  $C_{10}$  con  $M^7$  con due punti tripli infinitamente vicini (distinti): noto tipo di p. d. con tutti i generi uguali ad uno, ( $p = P = 1$ )<sup>(1)</sup>. È questo l'unico caso in cui la  $C_{10}$  possiede una singolarità equivalente a quella costituita da un punto sestuplo e due punti quadrupli, senza che il suo ordine si possa abbassare con una trasformazione quadratica.

7)  $C_{10}$  con  $M^6$  e un punto  $[3, 3]$  (coppia di punti tripli infinitamente vicini) in  $(A, A')$ , essendo  $A$  e  $A'$  allineati con  $M$  (la retta  $AA'$  fa perciò parte della  $C_{10}$ ): si ha un fascio di curve canoniche ellittiche (rappresentate ciascuna da una retta per  $M$ , presa insieme alla retta fissa  $MAA'$ ), e il sistema bicanonico (dato dalle quartiche spezzate in tre rette per  $M$  e nella  $MAA'$ ) è composto con le curve di quel fascio prese tre a tre (salvo una componente eccezionale):  $p = 2$ ,  $p^{(1)} = 1$ ;  $P = 4$ .

8)  $C_{10}$  con  $M^6$  e due punti  $[3, 3]$  sopra due rette per  $M$  (che fanno parte della  $C_{10}$ ):  $p = 1$ ;  $p^{(1)} = 1$ ;  $P = 3$ .

9)  $C_{10}$  con  $M^6$  e tre punti  $[3, 3]$  su tre rette uscenti da  $M$  (le quali fanno quindi parte della  $C_{10}$ ): si ha  $p = 0$ , mentre esiste un fascio di curve canoniche iperellittiche,  $p^{(1)} = 1$ ,  $P = 2$ . CASTELNUOVO ha dato come esempio di superficie con questi caratteri la  $F_7$ , del settimo ordine, dotata di una conica doppia  $k$ , di una retta tripla  $r$  (non incidente a  $k$ ) e di tre tacodi i cui piani tacnodali passano per  $r$ <sup>(2)</sup>. Nel caso particolare in cui la conica doppia si spezzi in due rette, la  $F_7$  è rappresentabile sopra un p. d. (infatti in ogni sezione con un piano per la retta tripla, si ha una  $g_2^1$  determinata razionalmente) e porta al p. d. di cui trattiamo<sup>(3)</sup>.

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno* («Memorie della Soc. It. delle Scienze, detta dei XL», ser. 3<sup>a</sup>, t. X, 1896).

(2) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* («Memorie della Soc. It. delle Scienze, detta dei XL», ser. 3<sup>a</sup>, t. X, 1896).

(3) Questo p. d. rientra in uno più generale con curva di diramazione  $C_{2n}$  d'ordine  $2n$ , dotata di un punto  $M$  di molteplicità  $2n - 4$ , e  $n - 2$  punti  $[3, 3]$  sopra altrettante rette per  $M$ . Si ha  $p = 0$ ,  $p^{(1)} = 1$  e  $P = n - 3$ . Il computo delle costanti prova l'effettiva esistenza della  $C_{2n}$  suddetta, almeno per  $n \leq 16$ . Cfr. F. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare*  $p^{(1)} = 1$  («Rendiconti Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol VII, 1898, pp. 231 e 253).

10)  $C_{10}$  con  $M^6$  e quattro punti  $[3, 3]$  sopra altrettante rette uscenti da  $M$ . Questi p. d. rispondono a superficie irregolari (non rigate) per cui  $p_a = -1$ ;  $p_g = 0$ ;  $p^{(1)} = 1$  e  $P = 1$ .

I punti multipli della  $C_{10}$  non possono darsi ad arbitrio: si presenta così il problema della effettiva esistenza della  $C_{10}$ , il quale — come vedremo — si riconduce alla costruzione di un particolare fascio di HALPHEN, e porta a due tipi diversi di  $C_{10}$ .

11)  $C_{10}$  con un punto  $[5, 5]$  in  $(A, A')$ : si ha  $p = 2$ , le curve canoniche essendo rappresentate dalla  $AA'$  insieme ad una retta variabile per  $A$ , e  $P = 4$  poichè le quartiche bicanoniche sono costituite dalla retta  $AA'$  contata due volte, e da una conica variabile per  $A, A'$ . Il genere lineare è  $p^{(1)} = 2$ , e quindi il grado virtuale del sistema canonico risulta  $p^{(2)} = 1$ , mentre il suo grado effettivo è nullo. Questa differenza è dovuta al fatto che l'intorno del punto  $[5, 5]$  dà luogo sopra la superficie ad una curva eccezionale che è parte fissa del sistema canonico (*curva eccezionale singolare*), cioè ad un punto base del sistema canonico<sup>(1)</sup>. Questo p. d. si identifica con un cono quadrico doppio con curva di diramazione del decimo ordine, intersezione con una superficie del quinto ordine,  $F_5$ . Si tratta del cono le cui sezioni piane sono riferite proiettivamente alle coniche per  $A, A'$ . Però quando sopra il cono si estraiga la radice dalla  $F_5$ , alla  $F_5$  si aggiunge il piano all'infinito, e quindi la conica all'infinito del cono verrebbe a far parte della curva di diramazione. Per evitare questo si deve prendere il cono in modo che tocchi il piano all'infinito lungo una retta (cilindro parabolico). Un caso particolare si ha quando la  $F_5$  è tangente al cono nei punti di una generatrice: al cono doppio corrisponde allora un p. d. con  $C_8$  di diramazione avente un punto  $[3, 3]$ . Una  $C_8$  siffatta proviene con una trasformazione quadratica da una  $C_{10}$  dotata di un punto  $[5, 5]$  e un punto doppio.

Continuando nella classificazione dei nostri p. d., rimangono soltanto i casi in cui la  $C_{10}$  possiede esclusivamente delle singolarità elementari (punti quadrupli e punti  $[3, 3]$ ): li elencheremo secondo i valori decrescenti del loro genere numerico  $p_a$ .

12)  $C_{10}$  con un punto quadruplo:  $p_a = p_g = 5$ ;  $p^{(1)} = 7$ ;  $P = 12$ .

13)  $C_{10}$  con un punto  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 5$ ;  $p^{(1)} = 8$ <sup>(2)</sup>;  $P = 13$ .

14)  $C_{10}$  con due punti quadrupli:  $p_a = p_g = 4$ ;  $p^{(1)} = 5$ ;  $P = 9$ .

15)  $C_{10}$  con un punto quadruplo ed un punto  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 4$ ;  $p^{(1)} = 6$ ;  $P = 10$ .

16)  $C_{10}$  con due punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 4$ ;  $p^{(1)} = 7$ ;  $P = 11$ .

(1) Per l'analogia col caso del punto  $[3, 3]$  e le osservazioni in proposito, cfr. L. CAMPEDELLI, loc. cit.

(2) Qui e nei casi che seguono, si ricordi che il punto  $[3, 3]$  dà un punto base del sistema canonico. Cfr. la nota precedente.

17)  $C_{10}$  con tre punti quadrupli sopra una retta  $r$  (che fa parte di  $C_{10}$ ):  $p_a = p_g = 3$ ;  $p^{(1)} = 4$ ;  $P = 7$ . La retta  $r$  dà una curva eccezionale *singolare*, cioè facente parte della rete di curve canoniche. Ad un caso particolare di questo tipo ( $C_{10}$  dotata anche di un punto doppio) si riconduce, con una trasformazione quadratica, quello in cui la curva di diramazione del decimo ordine, possieda un punto  $[3, 3]$  e due punti quadrupli.

18)  $C_{10}$  con un punto quadruplo e due punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 3$ ;  $p^{(1)} = 5$ ;  $P = 8$ .

19)  $C_{10}$  con tre punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 3$ ;  $p^{(1)} = 6$ ;  $P = 9$ .

20)  $C_{10}$  con tre punti quadrupli sopra una stessa retta, e un punto  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 2$ ;  $p^{(1)} = 2$ ;  $P = 4$ . A questo tipo si riconduce, con una trasformazione quadratica, anche il caso della  $C_{10}$  con due punti quadrupli e due punti  $[3, 3]$ .

21)  $C_{10}$  con un punto quadruplo e tre punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 2$ ;  $p^{(1)} = 4$ ;  $P = 6$ .

22)  $C_{10}$  con quattro punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 2$ ;  $p^{(1)} = 5$ ;  $P = 7$ .

23)  $C_{10}$  con tre punti quadrupli sopra una stessa retta, e due punti  $[3, 3]$  (tipo a cui si riconduce anche quello della  $C_{10}$  con due punti quadrupli e tre punti  $[3, 3]$ ):  $p_a = p_g = 1$ ;  $p^{(1)} = 1$ ;  $P = 2$ .

24)  $C_{10}$  con un punto quadruplo e quattro punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 1$ ;  $p^{(1)} = 3$ ;  $P = 4$ .

25)  $C_{10}$  con cinque punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 1$ ;  $p^{(1)} = 4$ ;  $P = 5$ . Assegnando ad arbitrio i cinque punti  $[3, 3]$ , si ha un sistema lineare  $\infty^5$  di  $C_{10}$ , la cui curva generica è irriducibile. Infatti dati i dieci punti (raggruppati in cinque coppie di punti infinitamente vicini) che debbono essere tripli per la  $C_{10}$ , si consideri il fascio di cubiche individuato da otto di essi, e siano  $C_3$  e  $C'_3$  le due cubiche di tal fascio che passano ciascuna per uno dei due punti rimanenti. La quartica passante doppiamente per questi due punti, ed una sola volta per i primi otto, insieme a  $C_3$  e  $C'_3$ , costituisce una delle  $C_{10}$  richieste. In corrispondenza ad una diversa scelta, tra i dieci punti dati, degli otto punti base del fascio di cubiche, si ha un'altra  $C_{10}$  spezzata pure in due cubiche e in una quartica, ma senza componenti comuni con la precedente. Queste due particolari  $C_{10}$  individuano un fascio la cui curva generica è irriducibile ed ha le singolarità richieste.

Venendo infine ai p. d. con genere numerico  $p_a = 0$ , si hanno i seguenti:

26)  $C_{10}$  con tre punti quadrupli sopra una retta e tre punti  $[3, 3]$ . A questo caso si riduce anche quello in cui la  $C_{10}$  abbia due punti quadrupli e quattro punti  $[3, 3]$ . L'analisi delle condizioni di esistenza di questa famiglia di p. d., porterà alla effettiva determinazione di *vari suoi tipi*: per essi si ha  $p_a = 0$  mentre  $p_g = 0$  o  $p_g = 1$ .

27)  $C_{10}$  con sei punti  $[3, 3]$ :  $p_a = p_g = 0$ ;  $p^{(1)} = 3$ ;  $P = 3$ .

28)  $C_{10}$  con cinque punti  $[3, 3]$  e un punto quadruplo:  $p_a = p_g = 0$ ;  $p^{(1)} = 2$ ;  $P = 2$ .



Anche per le famiglie 27) e 28), mostreremo l'esistenza di diversi tipi di p. d. ad esse appartenenti.

Convieni ora osservare che non si possono avere altri p. d. cui risponda un valore  $p_a < 0$ . Infatti bisognerebbe per questo che esistesse una curva del decimo ordine con sette singolarità elementari (sette punti  $[3, 3]$ , o sei punti  $[3, 3]$  e un punto quadruplo): ma una siffatta  $C_{10}$  avrebbe il genere uguale a  $-6$ , e quindi sarebbe spezzata in sette parti almeno, delle quali quattro dovrebbero essere rette. Ora una  $C_{10}$  spezzata in tal modo non può avere le singolarità predette.

**Geometria.** — *Sulle congruenze di Ribaucour deformabili.*  
Nota II di M. CRENNNA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. FUBINI.

In una mia precedente Nota<sup>(2)</sup> mi sono occupato delle differenze delle prime due forme fondamentali delle due falde involuppo di una congruenza di Ribaucour deformabile; in modo perfettamente analogo prendo in considerazione, nella presente Nota, la differenza delle terze forme fondamentali delle due falde già riferite ed esamino poi una classe particolare di tali congruenze. Conformemente a quanto si è stabilito nella mia precedente Nota già citata, intendo riferirmi, per tutte le formole che verranno usate nel seguito, alla Memoria del Bianchi: *Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili*<sup>(3)</sup> che suppongo nota al lettore e della quale adotto le notazioni. Per lo scopo propostomi ricavo dalle generali formole del Bianchi, relative ad una qualunque congruenza di sfere, le espressioni di  $e, f, g$ <sup>(4)</sup> appartenenti a una congruenza di Ribaucour deformabile dalle quali risulta che la differenza degli elementi lineari della rappresentazione sferica (di Gauss) delle due falde dell'involuppo è data da:

$$(I) \quad (e - e_1) du^2 + 2(f - f_1) du dv + (g - g_1) dv^2 = \\ = \frac{2\sqrt{1 - \Delta_1 R}}{\varphi} [D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2]$$

dove con  $\varphi$  si è indicato il valore comune dei rapporti

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) Cfr. M. CRENNNA, *Sulle congruenze di Ribaucour deformabili*, in questi «Rendiconti», dicembre 1931.

(3) In «Memorie della R. Accademia dei Lincei», serie 5<sup>a</sup>, vol. XII, fasc. 10 (1918); questa Memoria verrà indicata costantemente, nel seguito, con M. c.

(4) Si indicano con  $e, f, g$  i coefficienti della terza forma fondamentale delle due falde dell'involuppo, distinguendo con l'indice 1 gli elementi di una falda.



$$(2) \quad \frac{E_o}{R_{11}} = \frac{F_o}{R_{12}} = \frac{G_o}{R_{22}} = \varphi$$

che caratterizzano una congruenza di Ribaucour deformabile<sup>(1)</sup>.

Dalla (1) segue immediatamente:

a) *Le asintotiche della superficie dei centri corrispondono, sulle due falde dell'involuppo, a linee le cui rappresentazioni sferiche di Gauss si corrispondono per archi uguali (e viceversa).*

b) *Se a un sistema coniugato (isotermo-coniugato) della superficie dei centri corrisponde, su una falda, un sistema a rappresentazione sferica ortogonale (isoterma), anche il sistema corrispondente dell'altra falda ha una rappresentazione sferica ortogonale (isoterma) e viceversa.*

Riprendendo le differenze delle prime due forme fondamentali, già stabilite nella mia Nota citata

$$(3) \quad (\bar{E} - \bar{E}_1) du^2 + 2(\bar{F} - \bar{F}_1) du dv + (\bar{G} - \bar{G}_1) dv^2 = \\ = \frac{2R\sqrt{1 - \Delta_1 R}}{\varphi} (\varphi - R) [D du^2 + 2D' du dv + D' dv^2]$$

$$(4) \quad (\Delta - \Delta_1) du^2 + 2(\Delta' - \Delta'_1) du dv + (\Delta'' - \Delta''_1) dv^2 = \\ = \frac{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}{\varphi} (\varphi - 2R) [D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2]$$

da (1), (3) e (4) risulta che le linee delle due falde dell'involuppo, che corrispondono alle asintotiche della superficie dei centri, si corrispondono per archi uguali, per uguaglianza d'archi delle loro immagini sferiche, per uguaglianza della prima curvatura delle sezioni normali tangenti ad esse<sup>(2)</sup>. Inoltre la deviazione subita dalle tangenti alle linee considerate, nella rispettiva immagine sferica, è identica (in punti corrispondenti) per le due falde: infatti, indicando con  $\theta$  l'angolo fra la direzione di una di tali linee e quella della sua immagine sferica, si ha evidentemente<sup>(3)</sup>:

$$\cos \theta = S \frac{d\xi}{ds} \cdot \frac{d\alpha}{ds'} = - \frac{\Delta du^2 + 2\Delta' du dv + \Delta'' dv^2}{ds ds'}$$

espressione che non muta, in virtù di (1), (3) e (4), per due di tali linee corrispondenti sulle due falde.

(1) Cfr. BIANCHI, M. c., p. 26.

(2) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª edizione, Pisa, Enrico Spoerri, vol. I, parte I, § 72.

(3) Cfr. BIANCHI, *Lezioni cit.*, vol. I, parte I, § 84; con  $\xi, \eta, \zeta$  si indicano le coordinate del punto generico dell'involuppo, con  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni di direzione della normale al medesimo, con  $ds, ds'$  gli elementi lineari dell'involuppo e dell'immagine sferica (cfr. BIANCHI, M. c., § 2).

\* \* \*

Nella precedente mia Nota, già citata, si sono studiate le particolari congruenze di Ribaucour deformabili, caratterizzate da  $\varphi = R$ ,  $\varphi = 2R$ . Voglio ora esaminare la classe, di tali congruenze, per cui sia  $\varphi = KR$  ( $K = \text{cost.}$ ).

Procedendo in modo perfettamente analogo ai casi già considerati, ai quali si rimanda il lettore, si dovrà avere:

$$(5) \quad E_0 = KR \cdot R_{11} \quad , \quad F_0 = KR \cdot R_{12} \quad , \quad G_0 = KR \cdot R_{22}.$$

Si tratta adunque di stabilire se esistono forme possibili da attribuire al  $ds^2$  di una superficie di rotazione

$$(6) \quad ds^2 = T^2 dr^2 + r^2 dv^2$$

per cui il sistema differenziale (5) ammetta soluzioni per  $R$ .

Assumendo le stesse notazioni dei casi già considerati, e riferendoci allo stesso sistema coordinato, il sistema (5) equivale al seguente:

$$(7) \quad \begin{cases} R'' - \frac{T'}{T} R' = \frac{T^2 - R'^2}{KR} \\ R' = \frac{T^2}{KR} r \end{cases}$$

che risoluto, con l'identico processo seguito nei due casi contemplati, fornisce le formole seguenti:

$$(8) \quad \begin{cases} R = \frac{\left(b^{\frac{2}{K}} r^2 + K^2 c\right)^{\frac{K}{2}}}{K^K} \\ T = b^{\frac{1}{K}} \frac{\left(b^{\frac{2}{K}} r^2 + K^2 c\right)^{\frac{K-1}{2}}}{K^{K-1}}. \end{cases}$$

Ci si può chiedere se, fra queste congruenze di Ribaucour deformabili, esistano alcune nelle quali tutte le sfere risultino tangenti a uno stesso piano, in una particolare configurazione della congruenza. Ciò equivale, com'è noto <sup>(1)</sup>, a verificare se il valore di  $R$ , fornito da (8), soddisfa alla prima

(1) Cfr. BIANCHI, M. c., § 5.

equazione dell'applicabilità. Eseguendo i calcoli, si trova la condizione seguente:

$$K^{2K} c = K^{2K} \cdot c (K - 1) \quad \text{ossia} \quad K = 2$$

che corrisponde al caso già studiato, in cui la superficie dei centri è un paraboloide rotondo. Anche la ricerca della possibile esistenza di congruenze, appartenenti alla classe in esame, nelle quali tutte le sfere vengano a passare per un punto fisso, conduce ai risultati già noti. Infatti, la seconda equazione dell'applicabilità <sup>(1)</sup> fornisce la condizione:  $K^2 - 3K + 2 = 0$  da cui  $K = 1$ ,  $K = 2$ .

Di una proprietà non trascurabile godono tutte le congruenze della classe in considerazione: *la curvatura della superficie dei centri è, in tutti i punti, proporzionale alla curvatura della sfera avente il centro in quel punto*. Infatti calcolando la curvatura della forma (6), tenendo presente l'espressione di T fornita da (8), si ricava subito:

$$K_0 = \frac{K - 1}{K^2} \frac{1}{R^2}$$

dove con  $K_0$  si è indicata la curvatura della superficie dei centri. La costante di proporzionalità  $\frac{K - 1}{K^2}$  deve essere (per la realtà di  $K$ ) non superiore a  $\frac{1}{4}$ ; tale valore massimo della costante è assunto per  $K = 2$ , cioè nel caso del paraboloide rotondo già considerato.

(1) Cfr. BIANCHI, M. c., § 6.

**Meccanica.** — *Sul problema di Clebsch.* Nota di GIULIO SUPINO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Si consideri una lastra piana soggetta a forze che agiscono soltanto sul suo contorno. Si può supporre che lo spessore della lastra sia tale da dover studiare il problema nello spazio e d'altra parte permetta — in analogia a quanto si fa nel problema di Saint-Venant per le travi — di considerare assegnate su ogni generatrice del contorno le sole forze e momenti risultanti senza preoccuparsi della distribuzione delle tensioni lungo la generatrice stessa. Può allora accadere che le risultanti assegnate giacciono tutte nel piano medio della lastra oppure che vi siano anche forze normali al piano medio e momenti su ogni generatrice. Per la sovrapposizione degli effetti i due casi possono essere trattati separatamente.

In questa Nota mi limito a considerare il primo caso, proponendomi di mostrare che quando le forze risultanti giacciono tutte nel piano medio della lastra, la soluzione cercata si può ottenere nell'ambito del problema di Clebsch, e più precisamente che la soluzione di questo problema esiste e si costruisce facilmente (cioè senza risolvere nuovi problemi a limiti) tutte le volte che si conosce la soluzione del problema elastico in due dimensioni.

2. Richiamiamo alcuni risultati noti di elasticità piana. Nel caso delle due dimensioni  $(x, y)$  le equazioni indefinite e le equazioni ai limiti divengono (in assenza di forze di massa e con le notazioni usuali):

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = P_x , \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = P_y . \end{cases}$$

Le (1) possono essere sostituite dalle condizioni

$$(3) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

mentre ricordando che

$$\cos(n, x) = \frac{\partial x}{\partial n} = - \frac{\partial y}{\partial s} \quad , \quad \cos(n, y) = \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial s}$$

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

si ricava dalle (2):

$$(4) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_i = - \int P_x ds \quad , \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_i = \int P_y ds .$$

Si vede senza difficoltà, tenendò conto delle condizioni di equilibrio, che le (4) equivalgono a dare, su  $s$ ,  $F$  e  $\frac{\partial F}{\partial n}$ ; d'altra parte è noto che, per la condizione di congruenza nel piano  $x, y$ , deve essere  $\Delta \Delta F = 0$ ; si conclude così che la soluzione del problema elastico in due dimensioni è determinata ed esiste, per forze arbitrarie (in equilibrio) date sul contorno di un campo, tutte le volte che per questo esiste la soluzione del problema di Dirichlet.

3. Consideriamo ora la soluzione del problema di Clebsch: cioè la soluzione generale corrispondente alla posizione  $\sigma_x = \tau_{xx} = \tau_{yx} = 0$  (si assume il piano  $x, y$  come piano medio della lastra). Come è noto <sup>(1)</sup> le componenti di tensione diverse da zero hanno in essa le espressioni:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \chi_0 - \frac{\zeta^2}{2(m+1)} K_0 \right) + \zeta \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \chi_0 - \frac{\zeta^2}{2(m+1)} K_0 \right) + \zeta \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \chi_0 - \frac{\zeta^2}{2(m+1)} K_0 \right) - \zeta \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

con  $\Delta \chi_0 = K_0 = \sigma_x + \sigma_y$ ,  $\Delta \chi_1 = \text{cost.}$ ,  $\Delta K_0 = 0$  e  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Anche qui si può scrivere:

$$(5') \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} ;$$

allora risulta

$$\chi = \chi_0 + \zeta \chi_1 - \frac{m}{2(m+1)} \zeta^2 \chi_0 .$$

Le (5) provocano in ogni generatrice del contorno delle tensioni che contengono anche un momento risultante se  $\chi_1 \neq 0$ ; se  $\chi_1 = 0$  le (5) rappresentano una soluzione piana, cioè le risultanti delle forze agenti sul contorno della lastra giacciono nel suo piano medio.

(1) Cfr. LOVE, cap. IX, n. 145.



4. Indichiamo ora con  $2a$  lo spessore della lastra e poniamo:

$$t_1 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \sigma_x d\zeta, \quad t_2 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \sigma_y d\zeta, \quad t_{12} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \tau_{xy} d\zeta.$$

Dalle (5) (ricordando che  $\chi_1 = 0$ ) si ricava:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \chi_0 - \frac{a^2}{6(m+1)} K_0 \right) \\ t_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \chi_0 - \frac{a^2}{6(m+1)} K_0 \right) \\ t_{12} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \chi_0 - \frac{a^2}{6(m+1)} K_0 \right). \end{array} \right.$$

La funzione  $\chi_0 - \frac{a^2}{6(m+1)} K_0$  è una funzione biarmonica delle sole  $x, y$  e le  $t_1, t_2, t_{12}$  dipendono da essa nello stesso modo con cui le  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  dipendono da  $F$  nella soluzione piana: dunque la soluzione di un problema di Clebsch porta a determinare anche una soluzione elastica in due dimensioni che rappresenta in ogni punto del piano  $x, y$  la media dei valori assunti dalla data soluzione di Clebsch sulla retta uscente da quel punto e perpendicolare al piano medio<sup>(1)</sup>.

5. Supponiamo, inversamente, data ad arbitrio una soluzione elastica in due dimensioni e mostriamo che si può trovare una soluzione del Clebsch che ammetta su ogni generatrice risultanti uguali alla distribuzione assegnata. Essendo note le condizioni di esistenza per la soluzione elastica in due dimensioni il risultato servirà contemporaneamente a dimostrare che data ad arbitrio una distribuzione di forze in equilibrio giacente nel piano medio della lastra, la soluzione (con l'approssimazione indicata al n. 1) *esiste sempre* e può essere ottenuta nei limiti del problema di Clebsch.

Ed infatti *data* una funzione  $F(x, y)$  da cui dipendono le componenti di tensione nel modo indicato dalle (3), si cerchi di eguagliare le (3) stesse alle (6): basterà trovare due funzioni  $\chi_0$  e  $K_0$  tali che

$$\chi_0 - \frac{a^2}{6(m+1)} K_0 = F(x, y)$$

essendo

$$\Delta \chi_0 = K_0, \quad \Delta K_0 = 0.$$

(1) Questo fatto è stato osservato fino dal 1903 dal FILON. Cfr. «London Phil. Trans. Royal Society», serie A, vol. 201, pp. 63-155 (1903). La osservazione si trova a p. 66. Naturalmente essa non implica che *ogni* soluzione piana sia soluzione media di un problema di Clebsch. Questo sarà provato al n. 5.

Se poniamo

$$\chi_0 = F(x, y) + \frac{a^2}{6(m+1)} K_0$$

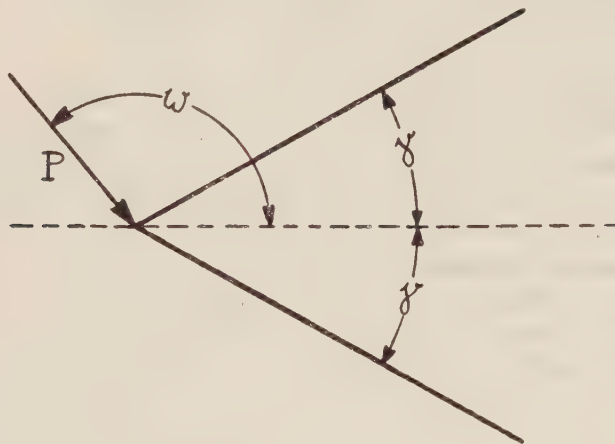
e

$$K_0 = \Delta F(x, y)$$

le condizioni precedenti sono soddisfatte (perchè  $\Delta\Delta F = 0$ ); abbiamo cioè trovato le due funzioni da scrivere nelle (6). E da queste si risale subito alle (5) o alle equivalenti (5'): in queste  $\chi$  avrà la forma

$$\chi = F(x, y) + \frac{a^2}{6(m+1)} \Delta F(x, y) - \frac{1}{2(m+1)} \nabla^2 \Delta F(x, y).$$

6. ESEMPIO. — Si consideri una trave cuneiforme soggetta in sommità ad un carico  $P$ .



Con le notazioni della figura, la funzione di Airy si scrive<sup>(1)</sup>:

$$F = Ar \varphi \sin \varphi + Br \varphi \cos \varphi$$

con

$$A = \frac{P_y}{2\gamma - \sin 2\gamma}, \quad B = \frac{P_x}{2\gamma + \sin 2\gamma}.$$

Segue:

$$\sigma_r = \frac{2p}{r} \left( \frac{\cos \omega \cos \varphi}{2\gamma + \sin 2\gamma} + \frac{\sin \omega \sin \varphi}{2\gamma - \sin 2\gamma} \right),$$

$$\sigma_t = 0, \quad \tau = 0$$

e quindi

$$\Delta F = \sigma_r.$$

(1) Si veda: MIURA, *Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern*, Berlino, 1928; FILLINGER, « *Zeitschr. für Math. u. Phys.* », vol. 59, p. 44 (1910).

Di qui per passare al problema nello spazio basta porre (essendo  $2a$  la larghezza della mensola)

$$\chi = F(x, y) + \left( \frac{a^2}{3} - \chi^2 \right) \frac{\Delta F(x, y)}{2(m+1)}$$

da cui segue che le tensioni nello spazio sono date dalle formule:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2P}{r} \left( \frac{\cos \omega \cos \varphi}{2\gamma + \sin 2\gamma} + \frac{\sin \omega \sin \varphi}{2\gamma - \sin 2\gamma} \right) \left( 1 + \frac{\tilde{\chi}^2}{(m+1)r^2} - \frac{a^2}{3(m+1)r^2} \right) \\ \sigma_t &= \frac{2P}{(m+1)r^3} \left( \frac{a^2}{3} - \chi^2 \right) \left( \frac{\cos \omega \cos \varphi}{2\gamma + \sin 2\gamma} + \frac{\sin \omega \sin \varphi}{2\gamma - \sin 2\gamma} \right) \\ \tau &= \frac{2P}{(m+1)r^3} \left( \frac{a^2}{3} - \chi^2 \right) \left( \frac{\sin \omega \cos \varphi}{2\gamma - \sin 2\gamma} - \frac{\cos \omega \sin \varphi}{2\gamma + \sin 2\gamma} \right). \end{aligned}$$

Questo esempio mostra la naturale estensione delle cose dette nel numero precedente al caso delle coordinate cilindriche <sup>(1)</sup>.

7. Il risultato ottenuto permette di costruire in modo semplice — come mostra l'esempio precedente <sup>(2)</sup> — una soluzione del problema del Clebsch nota la corrispondente soluzione elastica in due dimensioni: questa soluzione rappresenta in ogni punto del piano  $x, y$  la media dei valori assunti da una soluzione tipo Clebsch sulla retta uscente da quel punto e perpendicolare al piano medio. Questa interpretazione è possibile, in quanto si prescinde dalla distribuzione delle forze esterne su una generatrice del contorno: se si vuole che le condizioni ai limiti siano soddisfatte *esattamente* allora in generale non è possibile interpretare la soluzione piana come soluzione media: in un lavoro <sup>(3)</sup> (del 1925) in cui ho svolto questa osservazione, ho indi-

(1) Desidero richiamare su questo esempio l'attenzione del lettore: per quanto la soluzione che si ricava nello spazio soddisfa solo «in media» alle condizioni ai limiti, tuttavia essa rappresenta quanto di meglio si sappia fare finora. Una ricerca più generale è stata svolta dall'ing. R. ZOIA («Rend. Lincei», 1° sem. 1931), ma la soluzione ottenuta da questo autore non soddisfa alle equazioni di Beltrami (la dilatazione cubica *non* è una funzione armonica) e quindi non ha valore nel campo elastico. Si veda in proposito anche la recensione del PRAGER nel «Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete», dicembre 1931.

(2) Un altro esempio si può ottenere, estendendo allo spazio la soluzione del Mesnager per la trave. V. in proposito una mia Nota: *La teoria della resistenza dei materiali in confronto con alcuni risultati della statica elastica*, «Annali dei Lavori Pubblici», 1926.

(3) Cfr. SUPINO, *I sistemi elastici in due dimensioni e le loro relazioni con la deformazione spaziale*, «Rend. Lincei», serie 6<sup>a</sup>, vol. I, pp. 116-119 (1° sem. 1925). La richiesta che le condizioni ai limiti siano soddisfatte *esattamente* si presenta spontanea in alcuni casi tra cui quello dell'esempio precedente; sembra infatti che la presenza sui lati della mensola (che nei casi pratici sono liberi di forze) di componenti diverse da zero (se anche con risultanti e momenti nulli) debba avere una certa importanza, che del resto è provata dal fatto che le sollecitazioni restano le stesse se si limita la larghezza della mensola (invece che tra  $\pm a$ ) tra  $a$  e 0: mentre in questo ultimo caso le risultanti danno luogo a momenti su ogni generatrice.

cato anche un altro modo di estendere la soluzione piana allo spazio. Riasumendo qui anche quel risultato, si può affermare che una soluzione piana può essere interpretata:

a) come soluzione « *media* » di una soluzione tipo Clebsch, alla quale, se si vuole, si può risalire facilmente nel modo indicato nel presente lavoro;

b) come soluzione « *effettiva* » in un cilindro con condizioni ai limiti indipendenti da  $z$ : pur di applicare sulle basi del cilindro stesso un sistema di forze

$$P_z = \frac{1}{m} \Delta F$$

ed eventualmente termini corrispondenti alla soluzione del Saint-Venant nei cilindri.

In una prossima Nota darò la estensione allo spazio della soluzione elastica in due dimensioni corrispondente alle lastre inflesse sottili.

**Meccanica.** — *Intorno agli effetti asintotici delle maree sul moto dei corpi celesti.* — II. *Problema dei 3 corpi.* Nota di G. KRALL, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

## § 1. PREMESSE.

In una Nota precedente, collegando al periodico rinnovarsi delle maree una lenta ma incessante azione dissipativa dell'energia totale  $\dot{H} = \dot{E}$  d'un sistema planetario, abbiamo postulato per la condizione finale (a lunga scadenza) del moto, un valore minimo per la medesima, minimo subordinato però al sussistere dell'integrale vettoriale dei momenti

$$(1) \quad \mathbf{\dot{K}} = \mathbf{\dot{K}_0} = \text{cost.}$$

Dalla relazione simbolica cui dà luogo un postulato siffatto<sup>(2)</sup>, precisamente

$$\delta(\dot{H} - \omega \dot{K}) = 0,$$

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) In questa condizione di estremo si sfrutta evidentemente la sola costanza del valore assoluto  $\dot{K}$  di  $\mathbf{\dot{K}}$  (dove l'introduzione d'un solo moltiplicatore  $\omega$ ). L'estremo cui si perviene, trattandosi di un minimo, non può certo esser inferiore a quello che si otterrebbe tenendo conto di condizioni ulteriori. E si dà del resto la circostanza, immediata-

siamo giunti a caratterizzare, in linea del tutto generale, indipendentemente da considerazioni su uno specifico sistema, come tipicamente *stazionari*, o *alla Routh*, gli atteggiamenti finali del moto.

Pel *problema dei due corpi* gravitanti e dotati di moto precessionale abbiamo desunto da quelle relazioni risultati semplici ed interessanti.

Si tratta di affrontare ora il caso più difficile offerto dal movimento di *tre corpi celesti*, rotanti e pure essi frenati da maree.

## § 2. MOTO PIANO DEI TRE CORPI.

Supponiamo per intanto che il moto dei tre corpi, che indicheremo con  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  avvenga in un piano fisso  $\xi\eta$ .

Ponendo eguali a zero le terze coordinate e le corrispondenti quantità di moto, avremo per la funzione caratteristica  $H$ , sfruttando la forma del Poincaré<sup>(1)</sup>

$$H = \frac{I}{2m_1}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{I}{2m_2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{I}{2m_0}\{(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2\} - U = E$$

con

$$U = f\left\{\frac{m_0 m_1}{r_1} + \frac{m_0 m_2}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r}\right\}$$

designando:  $r_1, r_2, r$  le distanze  $\overline{P_0 P_1}, \overline{P_0 P_2}, \overline{P_1 P_2}$ ;  $p_1, q_1; p_2, q_2$  i momenti dei punti  $P_1$  e  $P_2$ .

Per il vettore momento delle quantità di moto, spettante ai moti orbitali, si ha infine, designando con  $x_1, y_1; x_2, y_2$  le coordinate relative di  $P_1$  e  $P_2$ , rispetto a  $P_0$ ,  $\mathbf{n}$  designando il versore normale a  $\xi\eta$ ,

$$\mathbf{K} = \mathbf{n}K = \mathbf{n} \sum_i^2 (x_i q_i - y_i p_i).$$

Se i corpi sono dotati di moto libero rispetto ai baricentri, cioè così detto di *precessione regolare*, si avrà, come s'è visto nella Nota precedente, un'energia cinetica addittiva per ognuno, data da

$$\Delta_i = \frac{k_i^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \Theta_i}{A_i} + \frac{\cos^2 \Theta_i}{C_i} \right), \quad (i = 1, 2, 0)$$

mente constatabile a risultato raggiunto, che le soluzioni per cui l'estremo ha luogo (soluzioni stazionarie) sono compatibili con una direzione *a priori* stabilita, di cui, com'è nella natura delle cose, rimane arbitraria l'orientazione nello spazio.

(1) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte II, Pp. 386-389, Bologna. Zanichelli, 1927.



$k_i$  designando i moduli dei corrispondenti momenti vettoriali  $\mathbf{k}_i$  delle quantità di moto,  $\Theta_i$  gli angoli di precessione.

La funzione caratteristica spettante al nostro sistema diviene dunque

$$\dot{H} = H - \sum_0^2 \Delta_i = E.$$

Ove si indichino con  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) e  $\beta$  gli angoli che  $\mathbf{k}_i$  ed  $\mathbf{n}$  fanno con  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$  avremo

$$\dot{K} = K \cos \beta + \sum_0^2 k_i \cos \alpha_i.$$

Esplicitando senz'altro le relazioni

$$\frac{\partial (\dot{H} - \omega \dot{K})}{\partial a} = 0$$

cui dà luogo l'equazione simbolica (I) con siffatte specificazioni di  $\dot{H}$  e  $\dot{K}$  caratterizzante una generica delle variabili  $p_i, q_i; x_i, y_i; k_i; \alpha_i; \beta$ , otteniamo, convenendo di scrivere  $\dot{H} - \omega \dot{K} = \mathcal{H}$  i seguenti gruppi di equazioni

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial p_i} + \omega y_i \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial q_i} - \omega x_i \cos \beta = 0 \end{array} \right. \quad (II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial x_i} - \omega q_i \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y_i} + \omega p_i \cos \beta = 0 \end{array} \right.$$

$$(III) \quad \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_i} = k_i \left\{ \frac{\sin^2 \Theta_i}{A_i} + \frac{\cos^2 \Theta_i}{C_i} \right\} - \omega \cos \alpha_i = 0 \right.$$

$$(IV) \quad \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_i} = \omega k_i \sin \alpha_i = 0, \right.$$

$$(V) \quad \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Theta_i} = k_i^2 \left( \frac{\sin \Theta_i \cos \Theta_i}{A_i} - \frac{\sin \Theta_i \cos \Theta_i}{C_i} \right) = 0 \right.$$

$$VI \quad \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} = \omega K \sin \beta = 0. \right.$$

Escluso che sia  $k_i = 0$  ( $i = 0, 1, 2$ ) ed ancora  $K = 0$ , deduciamo dal IV, VI gruppo (a meno di multipli interi di  $\pi$ ),

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad ; \quad \beta = 0,$$

da che si desume l'orientamento del piano del moto e degli assi di precessione normale rispettivamente parallelo a  $\mathbf{K}$ .

Per siffatte relazioni il gruppo I diviene

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\omega y_i \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \omega x_i \end{array} \right.$$

e rilevando che nella espressione di  $H$ , le  $x_i, y_i$  compaiono soltanto nel potenziale  $U$ , il gruppo II porge

$$(II') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \omega q_i = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} - \omega p_i = 0. \end{array} \right.$$

Or si dà la circostanza che siffatte equazioni coincidono proprio con quelle ritrovate e discusse da Levi-Civita quando applicò, a titolo d'esempio, le considerazioni generali sull'invarianza delle Condizioni di stazionarietà al problema classico ordinario del moto piano dei tre corpi<sup>(1)</sup>.

Senza far inutili ripetizioni, richiamandoci senz'altro alle «LEZIONI» citate, possiamo affermare che, a lunga scadenza, il movimento si atteggia ad una soluzione lagrangiana; precisamente i tre corpi, ove non siano allineati, vanno a disporsi sui vertici di un triangolo equilatero, rotante con velocità uniforme  $\omega$  attorno al baricentro delle masse.

Ma il triangolo può anche degenerare, cioè i punti possono disporsi su una retta, pur essa rotante, ancora con velocità angolare definita dal moltiplicatore  $\omega$ .

Dal gruppo V si desume infine, a meno di multipli di  $\pi$ ,  $\dot{\Theta}_i = 0$ , ( $i = 0, 1, 2$ ) e rilevando che, per la rotazione pura,  $\frac{k_i}{C_i} = \mu_i$ , con  $\mu_i$  velocità angolare, il gruppo III porge

$$\mu_i = \omega, \quad (i = 0, 1, 2).$$

*Le precessioni degenerano dunque in rotazioni di cui le velocità angolari  $\mu$  coincidono con  $\omega$ .*

Al limite, naturalmente, gli assi di precessione coincideranno con quelli di rotazione, talchè le (IV) esprimono nient'altro che il parallelismo degli assi suddetti con  $\mathbf{K}$ .

(1) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, op. cit., pp. 404-408.

### § 3. PROBLEMA GENERALE DEI 3 CORPI.

Passiamo ora al caso generale in cui il piano del moto non sia fisso.

All'uopo cominciamo col richiamare una forma perspicua e quanto mai semplice per la  $H$  spettante al problema generale, dovuta a Levi-Civita<sup>(1)</sup>.

Prendendo ancora in considerazione il riferimento nel piano del moto  $\xi\eta$  come nel paragrafo precedente è chiaro che la posizione assoluta dei 3 corpi  $P_0, P_1, P_2$  risulterà pienamente determinata ove si introducano due ulteriori parametri atti ad individuare l'orientamento del piano stesso. Con riferimento al vettore  $\mathbf{K}$  momento delle quantità di moto (solo *orbitale* si intende) indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo acuto che il versore  $\mathbf{n}$  (normale a  $\xi\eta$ ) forma con  $\mathbf{K}$ , con  $\psi$  l'anomalia che la retta intersezione del piano mobile  $\xi\eta$  fa con un piano fisso normale a  $\mathbf{K}$ , caratterizzante una *direzione assegnata ed immutabile*.

Si dimostra allora che, ritenuto  $\vartheta$  acuto e  $\neq 0$ , la  $H$  del problema generale differisce da quella del problema piano d'una funzione  $h$  di  $\vartheta$  e della velocità  $\dot{\psi}$  data da

$$h = \frac{1}{2} K \dot{\psi} \sin^2 \vartheta.$$

La lunghezza del vettore momento delle quantità di moto infine, vale

$$K = \frac{\sum_0^2 (x_i q_i - y_i p_i)}{\cos \vartheta}.$$

Per tali osservazioni la  $\dot{E}$  totale diviene

$$\dot{H} = H + h + \sum_0^2 \Delta_i,$$

e la lunghezza  $\dot{K}$  di  $\mathbf{K}$

$$\dot{K} = \frac{\sum_0^2 (x_i q_i - y_i p_i)}{\cos \vartheta} \cos \beta + \sum_0^2 k_i \cos \alpha_i$$

con le solite significazioni di  $\beta$  ed  $\alpha_i$ .

(1) T. LEVI-CIVITA, *Sulla riduzione del problema dei 3 corpi*, «Atti del R. Istituto Veneto di Scienze», tomo LXXIV, parte seconda (1914-15).

Delle condizioni di stazionarietà cui dà luogo l'equazione simbolica (1a) scritta con le specificazioni testé assegnate per la  $\dot{H} = \dot{E}$  e  $\dot{K}$  consideriamo unicamente quella che si ottiene identificando il parametro generico « a » con  $\dot{\psi}$ .

Otteniamo,

$$\frac{\partial (\dot{H} - \omega \dot{K})}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{2} K \sin^2 \vartheta = 0,$$

dal che, poichè è escluso che sia  $K = 0$ , si desume  $\vartheta = 0$ . Con ciò si è riportati al caso di prima.

Concludendo possiamo quindi affermare che, dato il moto più generale di tre corpi giroscopici, dotati ognuno di moto precessionale, le maree, attraverso un'azione dissipativa, rendono minima (condizionata) l'energia totale.

Caratteristica di quel minimo è l'atteggiarsi definitivo del moto secondo una soluzione stazionaria (triangolare lagrangiana) implicante tra l'altro il fissarsi del piano del moto.

Normalmente a questo piano si dispongono gli assi delle rotazioni, estremi degeneri delle precessioni.

Velocità angolari di rivoluzione e di rotazione infine tendono ad eguagliarsi.

#### § 4. UN RILIEVO A TITOLO CONCLUSIVO.

Concludendo rileveremo che, recentemente, ci è stato possibile estendere codeste considerazioni ad un sistema planetario qualunque (problema degli  $n$  corpi).

Siamo giunti così a dimostrare la tendenza asintotica del moto degli  $n$  corpi che lo costituiscono a fissarsi su orbite tutte circolari, stese su un piano unico e fisso, ferme restando, si intende, le solite tendenze degeneranti delle precessioni a rotazioni, degli assi di queste al parallelismo.

Di questi suggestivi sviluppi cosmogonici della nozione di invarianza delle condizioni di stazionarietà secondo Levi-Civita ci sarà concesso dar notizia in una prossima Nota.

**Meccanica.** — *Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare. - II. Casi particolari notevoli.* Nota di N. MOISSEIEV, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Facciamo qualche applicazione delle conclusioni generali, cui siamo pervenuti nella nostra Nota precedente, recante il medesimo titolo<sup>(2)</sup>.

§ 2. *Caso in cui il corpo mobile si riduce ad un punto materiale.*

Se il raggio del corpo centrale è eguale a zero, la seconda parte della reazione si annulla e la forza di resistenza si esprime allora colla formola (5) in cui è d'uopo porre  $\alpha(D) = 0$ . A questo modo avremo:

$$(12) \quad R = -n\mu \frac{2\pi\rho}{(r^2\rho - 2)} \left[ \frac{(r^2\rho - 1)^2}{r^2\rho(r^2\rho - 2)} \ln(r^2\rho - 1) - 1 \right].$$

Diamo una breve tabella dei valori di  $R$  e della sua derivata:

$r$	0	$\sqrt{\frac{1}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{3}{2\rho}}$	$\sqrt{\frac{2}{\rho}}$	$\infty$
$R$	0	$-n\mu 2\pi\rho$	$-1.08 \cdot n\mu 2\pi\rho$	$-n\mu 2\pi\rho$	0
$\frac{\partial R}{\partial r}$	0	$-n\mu 4\pi\rho^{3/2}$	$+0.13 n\mu 4\pi\rho^{3/2}$	$+0.08 n\mu 4\pi\rho^{3/2}$	0

La curva dei valori assoluti della forza di resistenza ha un massimo unico vicino a  $r = \sqrt{\frac{1.3}{\rho}}$ .

Nel caso di velocità minime la legge di resistenza può esser espressa dalla formola

$$(13) \quad R = -n\mu 2\pi\rho \cdot r^2\rho.$$

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) Cfr. pp. 135-139, di questo stesso volume dei « Rendiconti ».



Nel caso di velocità molto grande la dipendenza della resistenza dalla velocità prende la forma di

$$(14) \quad \mathfrak{R} = -n\mu \cdot 4\pi\rho \frac{\ln(r^2\rho)}{r^2\rho}.$$

§ 3. *Caso in cui le dimensioni del corpo non sono grandi in confronto alle dimensioni della sfera d'azione.*

È questo il caso che, in generale, presenta il massimo interesse dal punto di vista astronomico.

Ammettiamo, dunque, che  $x$  sia un qualsiasi numero piccolo (per es. di ordine 0.00001). Allora la legge di resistenza sarà rappresentata col seguente sistema di formole approssimative:

1. Per velocità  $r$  contenute nell'intervallo

$$0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2x}{\rho(1+x)}} = d(D).$$

(Cfr. *Ueber einige Grundfragen*<sup>(1)</sup>..., II, Theil, p. 50. Form. (4)) tutta la resistenza si esprime col termine  $\mathfrak{R}_2$ . Introducendo per un istante la variabile ausiliaria

$$y = \sin^2 \alpha,$$

trascriviamo la nostra formola (10) nel modo seguente:

$$(10.1) \quad \mathfrak{R}_2 = -\mu n \pi r^2 \rho r_D \int_{y=0}^1 \frac{\sqrt{2(1-x)x + r^2 \rho x^2 - r^2 \rho y} \sqrt{1-y}}{1 - (2 - r^2 \rho) r^2 \rho y} dy.$$

Sviluppando la funzione sotto il segno integrale in serie di potenze della piccola quantità  $r^2 \rho$  e limitandoci al secondo ordine, troveremo, con calcoli elementari, come espressione approssimata della legge di resistenza  $\mathfrak{R}$ , per l'intervallo in questione:

$$(15) \quad \mathfrak{R} = -\mu n 2\pi\rho \sqrt{1-x} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} (1-x) \sqrt{x} \sqrt{r^2 \rho} - \sqrt{1-x} (1-2x) r^2 \rho + \right. \\ \left. - \frac{11x^2 - 16x + 2}{15\sqrt{2x}} \sqrt{r^6 \rho^3} + \dots \right].$$

(1) «Publications de l'Institut Astrophysique de Russie», vol. V, fasc. 1.

2. Per velocità maggiori di  $d(D)$ , *ma sempre non troppo grandi* (p. es. non maggiori di 5, 10... volte le velocità paraboliche), l'espressione per la legge di resistenza potrà essere ricavata coll'aiuto delle considerazioni seguenti:

Tenendo conto della piccolezza di  $x$ ,  $\sin^2 \alpha(D)$  può essere sostituito dal suo valore approssimativo:

$$\sin^2 \alpha(D) = \frac{2x}{r^2 \rho}.$$

Introducendo ciò nella formola (5) avremo, per la prima parte della reazione, la seguente espressione approssimata:

$$(16) \quad \mathfrak{R}_1 = -\mu n \frac{2\pi\rho}{(r^2\rho - 2)} \left[ \frac{(1 - r^2\rho)^2}{r^2\rho(r^2\rho - 2)} \ln \frac{(1 - r^2\rho)^2}{1 + 2x(r^2\rho - 2)} - 1 + \frac{2x}{r^2\rho} \right].$$

In quanto alla seconda parte della reazione, date le velocità contenute nell'intervallo in considerazione, sarà d'uopo sostituire alle traiettorie dei punti urtanti il corpo-parabole con lo stesso parametro, della traiettoria del mobile, e con l'asse coincidente coll'asse del flusso. Essendo piccoli gli angoli  $\alpha$ , invece le velocità non troppo piccole, l'angolo limite  $\alpha(D)$  sarà piccolo, le direzioni degli assi delle traiettorie divergeranno poco, e si farà egualmente poco sentire la sostituzione all'orbita vera ellittica od iperbolica di una parabola dello stesso parametro. Quest'ultima sostituzione può sensibilmente svisare il risultato solo nel caso di velocità assai grandi, allorchè la traiettoria della particella cadente sarà più vicina ad una retta parallela all'asse del flusso che alla suddetta parabola (vedi sotto).

E così l'equazione della traiettoria della particella cadente sul corpo sarà sostituita con la seguente

$$(2.1) \quad r^2 \rho \sin^2 \alpha - x + x \cos N = 0$$

e la formola (6.1) si trascriverà a questo modo:

$$(6.2) \quad \cos(N - \omega_D) = \frac{1}{\sqrt{2x^3}} \left[ x - r^2 \rho \sin^2 \alpha + \sqrt{r^6 \rho^3} \sin^2 \alpha \right] \sqrt{2x - r^2 \rho \sin^2 \alpha}.$$

Eseguendo i calcoli nella formola (10) perveniamo alla seguente espressione approssimata per la seconda parte della reazione

$$(17) \quad \mathfrak{R}_2 = -\mu n \cdot \frac{4}{15} \pi \rho \sqrt{x} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 \rho}} + 4 \right) \sqrt{2(1 - x) + r^2 \rho x}.$$

Dunque, per velocità contenute nell'intervallo in considerazione, la reazione completa sarà approssimativamente eguale alla somma delle espressioni (16) e (17).

È facile vedere che nel caso qui contemplato di  $x$  piccole, l'influenza del termine  $\mathfrak{Y}_2$  si farà sentire solamente per velocità sensibilmente minori di quella spettante ad un'orbita circolare a distanza  $\rho$ ; nel caso di velocità vicine alla circolare suddetta o maggiori di essa (purchè non uscenti dal limite di validità delle semplificazioni del n. 2), il termine  $\mathfrak{Y}_1$  (16) — 0, ciò che è quasi lo stesso, quello che figura nella formola (12) — verrà ad essere la parte essenziale della legge di resistenza. In altre parole: date velocità moderate — d'ordine circolare o parabolico — il comportamento complessivo della legge di resistenza sarà con esattezza sufficiente rappresentato dallo schema di un punto materiale circondato da una sfera d'azione (vedi § 2).

3. Nel caso di velocità sensibilmente maggiori della parabolica, le precedenti considerazioni approssimate (n. 2) non servono più per la deduzione della reazione di particelle urtanti. Le loro traiettorie si scosteranno già sensibilmente dalla parabola introdotta nel n. 2, avvicinandosi piuttosto ad una retta parallela all'asse del flusso, che costituisce la continuazione della velocità relativa alla particella.

Ammettiamo che sia così. Allora l'equazione della traiettoria della particella prenderà l'aspetto:

$$(2.2) \quad \sin \alpha - x \sin N = 0,$$

e quindi l'espressione (6.2) sarà semplicemente sostituita da

$$(6.3) \quad \cos(N - \omega_D) = 1.$$

In conseguenza di ciò la formola (10) darà per il caso considerato di velocità grandi:

$$(18) \quad \mathfrak{Y}_2 = -\mu n \pi \rho \sqrt{x^3 r^2 \rho} \sqrt{2(1-x) + x r^2 \rho}.$$

In quanto alla resistenza di particelle non urtanti il corpo, rimane valida la formola (16). La reazione completa  $\mathfrak{Y}$  si scriverà come somma delle espressioni (16) e (18).

Pertanto, come si è già detto sopra, l'azione delle particelle urtanti si farà sensibile solo nel caso di velocità molto grandi, e allora, giusto il § 2 [formola (14)], il termine  $\mathfrak{Y}_1$  assumerà l'espressione:

$$(19) \quad \mathfrak{Y}_1 = -\mu n 4 \pi \rho \frac{\ln(r^2 \rho)}{r^2 \rho}.$$

In conseguenza di ciò, la legge di resistenza, essendo date velocità molto grandi, si esprimerà approssimativamente colla formola seguente:

$$(20) \quad R = -\mu n \pi \rho \left[ 4 \frac{\ln(r^2 \rho)}{r^2 \rho} + \sqrt{x^3 r^2 \rho} \sqrt{2(1-x) + x r^2 \rho} \right].$$

Per velocità tendenti all'infinito, la resistenza tende pure all'infinito (come  $r^2$ ); e ciò appunto per effetto del termine, in cui si tiene conto anche dell'urto.

In una terza (ed ultima) Nota tratteremo anche il caso in cui i corpuscoli posseggono velocità propria rispetto al flusso.

**Meccanica.** — *Sur les mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles.* Nota di A. ROSENBLATT, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sopra la deformazione delle lastre.* Nota di G. SUPINO, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sul calcolo della circuitazione nei moti dell'atmosfera.* Nota di M. LOMBARDINI, pres. dal Corresp. P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geodesia.** — *Contributo allo studio della variazione della latitudine.* Nota di G. CONTI, pres. dal Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica** (Fisica terrestre). — *Pendolo orizzontale ultrapotente a registrazione meccanica*. Nota di G. AGAMENNONE, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio L. PALAZZO.

In una Nota presentata a quest'Accademia il 18 febbraio 1900 <sup>(2)</sup> accennai all'utilità dei pendoli orizzontali nella sismometria, e dopo aver ricordato che nel 1899 avevo reso più sensibili quelli installati nel 1897 dal Cancani nel R. Osservatorio Geodinamico di Rocca di Papa, esposi la mia intenzione di rimpiazzarli con altri più potenti e, cioè, con massa di almeno 500 kg., periodo di 10 secondi e amplificazione fino a 50. Ma la mia buona volontà s'infranse sempre con la scarsezza dei mezzi finanziari, fino a che nel 1916 mi decisi a costruire, in via provvisoria e di esperimento, un pendolo orizzontale con massa di 3000 kg., periodo di 15 secondi e ingrandimento di 110, sul quale ebbi a riferire in altra Nota presentata all'Accademia nella tornata del 5 maggio 1918 <sup>(3)</sup>. La massa pendolare, composta di pezzi di lava accatastati sopra una rozza piattaforma di ferro, ruotava attorno ad una robusta punta di acciaio ed era sospesa a due lamine di ferro, che in alto si riunivano in una sola, ad una distanza di circa 4 m. al di sopra della punta. Sebbene questo pendolo fosse costruito nel modo più economico, pure si mostrò assai sensibile e registrò numerosissimi terremoti, soprattutto i telesismi i quali nella fase a onde lente non sempre riuscivano a influenzare un sismografo delicatissimo a pendolo verticale dotato d'un ingrandimento quadruplo! Ma purtroppo i pregi del nuovo apparato erano menomati anzitutto dalla grande instabilità della posizione di riposo — dovuta alle variazioni termiche d'un muro esterno, al quale si trovava sospeso, specialmente quando era battuto dal sole — e poi dall'azione perturbatrice del vento, già accertata dal Cancani e dall'Oddone, assistenti dell'Osservatorio sotto il direttore De Rossi, mio predecessore, e da me stesso più volte lamentata e segnatamente in altra mia Nota <sup>(4)</sup>. Nonostante queste cause di gravi disturbi, mantenni in

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) *Il pendolo orizzontale nella sismometria*. («Rend. d. R. Acc. dei Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. IX, 1<sup>o</sup> sem. 1900, p. 107).

(3) *Contributo alla teoria del pendolo orizzontale*. («Rend. d. R. Acc. dei Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXVII, 1<sup>o</sup> sem. 1918, p. 326).

(4) *I terremoti mondiali del 1916 e l'Osservatorio di Rocca di Papa* («Rend. d. R. Acc. dei Lincei»), ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXX, 2<sup>o</sup> sem., 1921, p. 60 e 362. A questa Nota si aggiunsero



azione il predetto pendolo per 14 anni, cioè, fino a quando col 31 dicembre 1930 cessarono tutte le osservazioni sismografiche a Rocca di Papa con il consenso del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica, il quale finalmente si era convinto dell'opportunità di farle proseguire in Roma al Collegio Romano, dove fin dal 1889 hanno funzionato, sia pure con interruzioni, vari sismografi e talora con migliori risultati in confronto dell'Osservatorio di Rocca di Papa.

Accarezzai allora l'idea di far costruire un ben più potente pendolo orizzontale nei sotterranei del Collegio Romano, dove era da attendersi una minore influenza del vento e soprattutto delle variazioni di temperatura; e anche il prof. Palazzo, direttore di detto Ufficio, finì per convincersi dell'opportunità di siffatto tentativo, il quale se avesse sortito il buon esito che se ne sperava, avrebbe fatto disporre d'un apparato a registrazione meccanica e d'una sensibilità uguale se non superiore a quella del sismografo « Galitzine » a registrazione fotografica, ma di più difficile maneggio e di costo ben maggiore sia per l'acquisto che per la spesa giornaliera. Fu quindi decisa la costruzione di un pendolo orizzontale, con un peso di 20 tonnellate, corrispondente a quello d'un cubo di piombo di circa m. 1.20 di lato. Ma l'eccessivo prezzo (circa L. 40.000) della quantità richiesta di siffatto metallo, fuso in pani regolari, mi fece decidere a rimpiazzarlo con mattoni di terra cotta, ciò che aumentava le dimensioni di cubo fino a m. 2 di lato <sup>(1)</sup>. L'armatura di forma cubica, destinata a contenere i mattoni, è costruita in grossi tubi e travi di acciaio da 16 cm. e sospesa ad un castello di ferro, composto di 4 travi da 25 cm.: due in piano verticale e dell'altezza di m. 3 e due orizzontali, lunghi m. 3.5, collegati all'estremità superiore dei primi attraverso un cilindro di ferro di 10 cm. al quale si attacca la massa mediante due lamine di acciaio accoppiate, ciascuna lunga 70 cm., larga 10 cm. e dello spessore di 5 mm. I due travi in piano verticale poggiano su solido pavimento in calcestruzzo, rasente ad un grosso muro esterno addossato a un terrapieno, a una distanza di m. 2 tra loro e convergenti in alto, mentre gli altri due orizzontali, a partire dal loro punto di collegamento ai predetti, divergono fino ad una distanza pure di m. 2 l'uno dall'altro al loro punto di appoggio e con lieve penetrazione in un altro muro interno parallelo al primo. La massa pendolare ruota in basso attorno ad un coltello di acciaio a filo verticale lungo 15 cm., e snodato, affinché la notevole pressione si eserciti su tutti i suoi punti. Posto verticalmente a m. 2 al di sotto delle lamine di sospensione può essere spostato lateralmente e dall'avanti

opportune considerazioni del Socio V. Cerulli il quale propugnò, anche lui, il trasferimento dell'Osservatorio, troppo esposto ai venti per la sua speciale ubicazione e notevole altitudine.

(1) Adoperando la ghisa, la cui densità è quasi tripla di quella della terracotta, il lato del cubo si sarebbe ridotto a circa m. 1.40, ma il prezzo si sarebbe elevato a quasi 20.000 lire, ossia 20 volte più dei mattoni.

all'indietro per rispetto al centro di gravità della massa pendolare, per dare alla medesima la voluta posizione di riposo e il desiderato periodo oscillatorio. Quando l'armatura fu riempita a metà di mattoni — e con ciò si ottenne un peso complessivo di 10 tonnellate ed un periodo oscillatorio di 26 secondi — fu constatata una sensibile flessione del trave di ferro costituente lo spigolo superiore dell'armatura, al punto di mezzo del quale si trova l'attacco delle molle di acciaio alla medesima, ciò che consigliò di arrestarsi al peso già raggiunto. Siffatta ragguardevole massa, distante per prudenza per pochi millimetri dal pavimento, si trova nel mezzo di uno stanzino quadrato di circa m. 3.20 di lato, sicchè resta circondata per tre lati da un corridoio di circa 60 cm. Lo stanzino che è seminterrato, a volta piena e senza finestre, cui si accede per una porticina, fa da custodia allo strumento, l'installazione del quale è di grande stabilità, in quanto che parte del peso è sostenuto dal coltello situato a piè del muro esterno anzidetto, e l'altra parte è sostenuta dal castello mediante i due travi in piano verticale prementi sul pavimento e gli altri due poggianti sul muro interno dello spessore di ben m. 1.80. Mia intenzione era di forare questo muro, in modo da ottenere la registrazione nella camera adiacente mediante un adatto e robusto prolungamento della massa pendolare all'altezza del suo centro di gravità; con ciò si sarebbe impedita qualsiasi perturbazione nel pendolo, una volta chiusa ermeticamente, la porticina di accesso allo stanzino, e si sarebbe così ottenuta senza attriti una prima amplificazione all'estremità di detto prolungamento, sicchè ponendo ivi una leva amplificatrice si sarebbe raggiunto un notevole ingrandimento complessivo. Ma il mio collocamento a riposo impedì di eseguire tale progetto, talchè mi decisi a intraprendere alla meglio qualche esperienza, mediante un registratore posto nell'interno stesso dello stanzino tra il muro da forare e la massa pendolare, i cui movimenti furono dapprima quintuplicati con l'aiuto d'una prima leva metallica e poi ingranditi complessivamente fino a 500 volte mediante una seconda leva, una cannula di paglia scrivente sopra carta affumicata.

Come era da aspettarsi, la pennina cominciò a tracciare onde rapide e fino ad un millimetro d'ampiezza, indicando per tal modo che il colossale edificio del Collegio Romano si trovava in continuo tremolio, provocato in parte dal vento e in parte dal moto cittadino, sebbene fossero assai distanti le linee ferroviarie e tramviarie e di secondaria importanza le strade adiacenti. Naturalmente siffatta perturbazione era minore nel cuore della notte. Quando si ha da fare con sismografi sensibilissimi, è raro che i loro tracciati siano rettilinei, perchè il suolo, al contrario di quanto comunemente si crede, non si trova mai in perfetta quiete, al pari delle acque del mare e dei laghi sempre increspate da onde più o meno visibili; e la verità di quanto asserisco m'è stata confermata dall'esame dei tracciati di delicatissimi apparati installati nei sotterranei dei migliori osservatori del mondo, situati anche

fuori delle città<sup>(1)</sup>. Le poche esperienze, da me eseguite sul nuovo pendolo, hanno inoltre mostrato che il medesimo non risente più le variazioni diurne della temperatura e non ha mancato di registrare alcuni terremoti nei pochi giorni del suo funzionamento provvisorio.

Voglio sperare che il mio successore prosegua ad occuparsi di questo nuovo sismografo che con massa anche limitata a 10.000 kg. sorpassa per potenza, a quanto io sappia, tutti i pendoli orizzontali a registrazione meccanica attualmente in azione sulla Terra.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Spettro Raman della chinolina e manifestazioni del legame carbonio-azoto*<sup>(2)</sup>. Nota di G. B. BONINO e P. CELLA, presentata<sup>(3)</sup> dal Corrisp. M. BETTI.

Mentre la bibliografia dell'effetto Raman registra qualche centinaio di composti organici studiati della serie alifatica ed aromatica nota, solo una diecina di derivati eterociclici studiati sotto questo punto di vista<sup>(4)</sup>.

Alcuni di questi, come la piridina, vennero studiati da vari autori, per altri abbiamo dati ricavati da un solo autore, dati che non vennero ulteriormente ripresi in considerazione. Uno di questi composti è la chinolina per la quale si hanno i dati relativi alle ricerche di Ganesan e Wenkatesvaran<sup>(5)</sup>. Qualche differenza difficilmente spiegabile tra lo spettro Raman della piridina e quello della chinolina pubblicato da questi autori ci ha indotto a riprenderne lo studio onde vedere se caso mai qualche riga Raman fosse sfuggita ai precedenti ricercatori forse per poca luminosità dei mezzi sperimentali dato che si tratta di ricerche effettuate già da diverso tempo.

Nella tabella seguente vengono riassunti i risultati delle nostre osservazioni eseguite su campioni di chinolina di particolare purezza, appena distillata e perfettamente incolora. Gli spettri Raman vennero eseguiti con filtro di solfato di chinino dato che le eccitazioni senza filtro portavano ad una rapida colorazione del prodotto e rendevano difficile e mal sicuro l'ottenimento di buoni spettri.

(1) Ecco come in proposito si è espresso fin dal 1892 l'Oddone: «... sono giunto a «dimostrare che l'azione del vento sugli strati superficiali del suolo si trasmette ai migliori «pilastri isolati e di lì ai pendoli, e che nello studio della sismologia, per quanto si sia in «condizioni eccellenti, non si potrà evitare questa causa d'errore» («Annali dell'Ufficio Centr. di Met. e Geod.», vol. XII, Parte 1<sup>a</sup>).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(3) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(4) Vedi KOHLRAUSCH, SMEKAL, *Raman-Effekt*, pp. 337-339, Springer, Berlin, 1931.

(5) «Ind. Journ. of Phys.», 4, p. 196 (1929).

*Spettro Raman della Chinolina.*

N. d'ordine	$\nu$ in $\text{cm}^{-1}$	Intensità	Riferimento	Gruppi caratteristici
1	19884	3	e—3054	C—H
2	21367	3	e—1571	C≡C
3	21505	3	e—1433	C=N
4	21563	5	e—1375	
5	21625	2	e—1313	
6	21796	1	e—1142	
7	21896	3	e—1042	C—N
8	22174	4	e—764	
9	22444	4	e—524	

Complessivamente noi troviamo nella chinolina nove righe Raman contro sei righe conosciute dal precedente lavoro già citato.

L'interpretazione di alcune di queste righe è facile: la  $3054 \text{ cm}^{-1}$  corrispondente al C—H « aromatico » la  $1571 \text{ cm}^{-1}$ , al « doppio legame » aromatico, la  $1042 \text{ cm}^{-1}$  al legame C—N<sup>(1)</sup>. Una riga intensa tra  $1370$  e  $1380 \text{ cm}^{-1}$  deve attribuirsi al doppio nucleo condensato della chinolina. Invero tale riga è intensissima nello spettro della naftalina come in quello della chinolina mentre è debolissima nella piridina dove probabilmente deve attribuirsi ad altre ragioni. Analoghe considerazioni si possono fare per la riga  $1142 \text{ cm}^{-1}$  e per la  $764 \text{ cm}^{-1}$  che compaiono con pari intensità nello spettro della naftalina.

Occorre invece discutere l'interpretazione che noi diamo alla riga Raman  $1433 \text{ cm}^{-1}$  nella chinolina. Noi attribuiamo tale riga al doppio legame tra carbonio e azoto. Essa infatti cade innanzi tutto nella zona dello spettro Raman assegnata da Kohlrausch ai doppi legami<sup>(2)</sup> ( $1200$ – $1800 \text{ cm}^{-1}$ ). È poi da notare che nei composti che contengono gruppi  $\text{CH}_2$  una riga a  $1400$ – $1450 \text{ cm}^{-1}$  è da attribuirsi ad una delle frequenze proprie di oscillazione del gruppo metilenico<sup>(3)</sup>. Ma nella chinolina tale interpretazione non può sussistere dato che non esistono in molecola gruppi  $\text{CH}_2$ . D'altra parte si osserva che tutti i composti i quali pur non contenendo in molecola

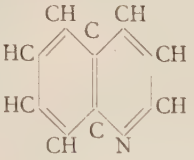
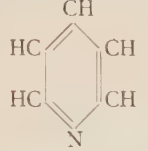
(1) KOHLRAUSCH, loc. cit., p. 155.

(2) KOHLRAUSCH, loc. cit., p. 154.

(3) KOHLRAUSCH, loc. cit., p. 193.



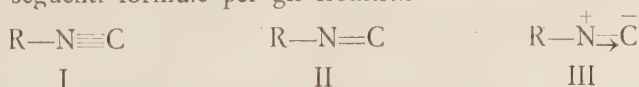
gruppi  $\text{CH}_2$  posseggono un carbonio legato con doppio legame ad un azoto si ha una riga Raman intensa a circa  $1450 \text{ cm}^{-1}$ . Ecco alcuni esempi che possiamo trarre dalla bibliografia:

Nome	Formula	C=N	Inten- sità	C=O	Inten- sità	C=C	Inten- sità
Chinolina . . .		1433	(3)			1571	(3)
Piridina . . . .		1480	(2)			1580	(3)
Fenilisocianato .	$\text{C}_6\text{H}_5\text{N}=\text{C}=\text{O}$	1440	(5)	1510	(4)	1596	(8)
Fenilisotiocianato	$\text{C}_6\text{H}_5\text{N}=\text{C}=\text{S}$	1448	(4)			1590	(12)
$\alpha$ -naftilisocianato	$\text{C}_{10}\text{H}_7\text{N}=\text{C}=\text{O}$	1438	(3)	1513	(4)	1576	(6)

La riga Raman che noi attribuiamo al  $\text{C}=\text{N}$  è presente negli isonitrili mentre manca nei nitrili (sempre in assenza di gruppi  $\text{CH}_2$ ). Per i derivati che contengono pure gruppi  $\text{CH}_2$  in molecola si trova spesso (negli isonitrili) o una larga riga diffusa tra  $1430$  e  $1480 \text{ cm}^{-1}$  che probabilmente è dovuta alla mancata risoluzione di due distinte righe Raman ovvero due righe distinte corrispondenti una al  $\text{CH}_2$  e l'altra probabilmente al gruppo  $\text{C}=\text{N}$ . Nei nitrili contenenti i gruppi  $\text{CH}_2$  si ha invece solo una riga semplice corrispondente al gruppo  $\text{CH}_2$ . Esempio:

Metilisonitrile	$\text{CH}_3-\text{N}=\text{C}$	$1414 \text{ cm}^{-1}$	$1456 \text{ cm}^{-1}$
Acetonitrile	$\text{CH}_3-\text{C}\equiv\text{N}$	$1417$	—

L'interpretazione della riga  $1450 \text{ cm}^{-1}$  circa negli isonitrili come riga del gruppo  $-\text{C}=\text{N}$  porta a qualche difficoltà dato che nell'effetto Raman degli isonitrili si trova pure una riga a  $2100 \text{ cm}^{-1}$  circa caratteristica di un triplo legame tra C e N. Già nel 1930 Dadiou<sup>(1)</sup> ha studiato la probabilità delle seguenti formule per gli isonitrili



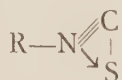
(1) DADIEU, « Sitzungs-Berichte der Akad. der Wiss. zu Wien », 139. Bd., 9-10. Heft, p. 629, (1930).



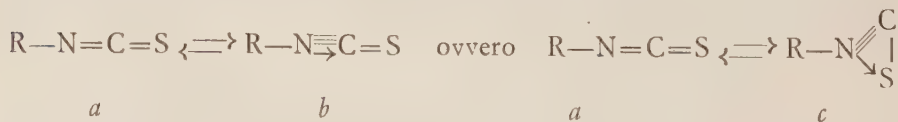
Il Dadiou partendo da considerazioni ispirate dalla teoria dell'ottetto di Langmuir-Lewis scarta la prima e la seconda formula e pone come più probabile la terza formula dove figura un legame semipolare tra C e N. Tale legame semipolare come si sa è dato dal fatto che per es. nella formula II un elettrone dell'atomo di N passa all'atomo di C e forma un doppietto nel senso di London <sup>(1)</sup> con un altro elettrone del livello più esterno dell'atomo di azoto. Tutto sommato tra N e C verrebbe a formarsi un vero e proprio triplo legame ma l'N resterebbe carico positivamente per la perdita di un elettrone e il C negativamente. Con ciò si spiegherebbe nello spettro Raman degli isonitrili una riga caratteristica di un legame triplo. La presenza concomitante di una riga a 1450 cm<sup>-1</sup> caratteristica del legame C=N ci suggerisce una ulteriore ipotesi che pur essendo in accordo con le idee di Dadiou verrebbe ad integrare le stesse. Supponiamo cioè negli isonitrili presenti ed in equilibrio le due forme:



il passaggio tra la forma II e la forma III cioè lo stabilirsi del legame semipolare potrebbe avvenire nel seguente modo. L'atomo di N ha nel livello più esterno cinque elettroni e cioè due elettroni 2s e tre elettroni 2p. I tre elettroni 2p parteciperebbero alla formazione delle tre valenze normali per es. nella formula II. Per passare alla forma III occorre che un elettrone 2s dell'N passi all'atomo di C e, dato che l'atomo di C ha già due elettroni 2s è probabile che detto elettrone dell'atomo di N vada ad occupare un livello 2p nell'atomo di C. Tale elettrone poi formerà un doppietto con l'elettrone rimasto ancora libero nell'atomo di N costituendo un vero e proprio legame chimico. Prenderà cioè origine il legame semipolare. Nel caso dei tioisocianati la formula classica era R—N=C=S. Anche in questo caso Dadiou (loc. cit.) trova una riga Raman a 2100 cm<sup>-1</sup> caratteristica del triplo legame ed ammette perciò per i tioisocianati la formula:



con un legame semipolare fra N e S. Ma il fatto di trovare anche negli isotiocianati la riga del gruppo C=N ci induce anche in questo caso ad ammettere la possibilità di un equilibrio tra due forme:



(1) LONDON, « Zeits. f. Phys. », 44, 455 (1927).

La discussione tra le forme *b* e *c* viene impernata per ora sulla teoria dell'ottetto. Però non è detto che anche per un fatto del tutto particolare come quello di un legame semipolare ci si debba strettamente attenere alla teoria dell'ottetto che ha dopo tutto un carattere semiempirico. Lo studio di altre proprietà fisiche come la refrattività ovvero il parachor potrebbe riuscire di difficile applicazione se effettivamente abbiamo due forme in presenza mescolate insieme; uno studio spettroscopico più approfondito forse potrebbe fornire materiale di più sicura applicabilità in questa discussione.

È nostra intenzione ritornare sull'argomento appunto con nuovo materiale che noi andiamo raccogliendo. Ci basta per ora aver rilevato le ragioni che ci portano ad attribuire al legame  $C \equiv N$  una riga Raman a  $1450 \text{ cm}^{-1}$  circa e di aver mostrato la possibilità che accanto ad una forma  $=C=N-$  possa sussistere o isolata o in equilibrio una forma polare del legame azoto e carbonio del tipo:



Questa seconda osservazione come è facile vedere può portare a numerose considerazioni in diversi casi che interessano il campo della chimica organica. Speriamo che il materiale sperimentale che andiamo raccogliendo ci possa permettere di ritornare presto sulla questione.

**Chimica.** — *Antimoniati minerali di calcio (Atopite, romeite, ocre di antimonio calcifere)* <sup>(1)</sup>. Nota di G. NATTA e M. BACCAREDDA, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio G. BRUNI.

Durante lo studio da noi iniziato da oltre un anno sulla struttura degli ossidi e degli acidi dell'antimonio, per risolvere certe interessanti e poco chiarite anomalie sulle strutture reticolari di questi composti, abbiamo creduto utile esaminare certi acidi antimonici minerali ed a questo scopo abbiamo raccolto e studiato diverse ocre di antimonio.

Riferiremo prossimamente in altra sede sul complesso problema della struttura degli acidi antimonici e di quelle ocre di antimonio costituite da ossidi di antimonio idrati relativamente puri. In questa Nota vogliamo solo riferire sulla struttura di alcuni antimoniati minerali di calcio, non studiati sinora, costituenti alcune ocre di antimonio, e di altri antimoniati cristallini che abbiamo esaminato a titolo di confronto.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 21 febbraio 1932.

Riportiamo qui alcune analisi di ocre di antimonio contenenti notevoli quantità di calcio combinato. Il campione I è un'ocra di antimonio di colore giallo bruno chiaro di Villafranca-Galicia (Spagna) prodotta per alterazione di antimonite. Il II è un'ocra, giallo bruno, della China. Il III è un'ocra di Higueras-Cordoba di colore bianco grigio chiaro. Per confronto uniamo le analisi da noi eseguite di due altre ocre di antimonio praticamente esenti da calcio: (Campione IV proveniente da Szalonack Ungheria, V da Pruro Bolivia). Esse ci sono state fornite da F. Krantz di Bonn.

	I	II	III	IV	V
H <sub>2</sub> O . . . . .	13.15	6.92	10.42	5.53	2.41
O riducibile . . . . .	16.51	18.17	15.39	18.00	19.13
Sb . . . . .	46.19	48.05	44.80	68.65	68.70
Fe . . . . .	1.35	10.00	0.89	0.34	0.39
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	tr.	1.36	tr.	—	—
CaO . . . . .	18.72	12.77	12.22	3.57	0.89
CO <sub>2</sub> . . . . .	3.25	non det.	non det.	—	—
Res. Insol. . . . .	2.44	2.12	14.80	3.91	6.20
	101.61	99.39	98.52	100.00	97.62
Densità $d =$	3.50	4.25	3.66	5.15	5.79

L'analisi è stata eseguita, data l'insolubilità dei minerali negli acidi, per riduzione a 700-800° in tubo di quarzo con idrogeno del minerale preessicato.

La quantità di calcio presente risulta nelle ocre I, II, III notevole e, data la piccola percentuale di anidride carbonica presente, si deve ritenere combinata coll'acido antimonico.

I minerali I, II, III differiscono anche come valenza dell'antimonio dalle altre ocre di antimonio (IV e V) costituite prevalentemente da Sb<sub>2</sub>O<sub>4</sub> più o meno idrato, perchè si debbono ritenere costituite da antimoniati in cui l'antimonio si trova tutto (campione I e III) o per massima parte (II) sotto forma pentavalente. Detraendo dall'analisi dell'ossigeno determinato per riduzione quella parte che si può ritenere combinata col ferro risulta:

*Ossigeno combinato con l'antimonio :*

	I	II	III	IV	V
% trovato . . . . .	15.93	13.87	14.94	17.85	18.96
% teorico per Sb <sup>IV</sup> . . . . .	12.12	12.35	11.75	18.02	18.04
% teorico per Sb <sup>V</sup> . . . . .	15.18	15.80	14.73	22.58	22.59

Si deve quindi ritenere che le ocre I, II, III siano costituite da antimoniati di calcio. Astraendo dagli ossidi di ferro, di alluminio ed altre impurezze presenti e detraendo quella parte del calcio che può ritenersi combinata con l'anidride carbonica, risulterebbero per i minerali considerati composizioni comprese tra le seguenti formule:  $3\text{CaO} \cdot 2\text{Sb}_2\text{O}_5 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{CaO} \cdot \text{Sb}_2\text{O}_5 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ , come risulta dalla seguente tabella nella quale sono paragonate le composizioni dedotte dall'analisi con quelle teoriche.

	Campione I	$3\text{CaO} \cdot 2\text{Sb}_2\text{O}_5$ $8\text{H}_2\text{O}$	Campione III	$\text{CaO} \cdot \text{Sb}_2\text{O}_5$ $3\text{H}_2\text{O}$
H <sub>2</sub> O . . . . .	14.38	15.00	12.64	12.49
O . . . . .	17.42	16.67	18.11	18.43
Sb . . . . .	50.49	50.80	54.41	56.24
CaO . . . . .	17.71	17.53	14.84	12.84

Il campione II che presenta maggiori impurezze risulterebbe, astraendo dal ferro, di composizione intermedia a quelle dei due composti riportati.

Le ocre calcifere esaminate sono macroscopicamente amorfe, ma al microscopio appaiono microcristalline, solo leggermente birifrangenti. Le abbiamo esaminate coi raggi X col metodo delle polveri ed abbiamo paragonati i fotogrammi con quelli dei due antimoniati di calcio cristallini più noti: la *atopite* e la *romeite*. Il campione di *atopite* proviene da Miguel Bournier, Minas Geraes (Brasile). Quelli di *romeite* di S. Marcel, ci sono stati gentilmente forniti dalla prof.<sup>a</sup> Maria De Angeli e dal prof. Alberto Pelloux che vivamente ringraziamo. Un altro campione, fornitoci come *romeite* dalla Ditta F. Krantz di Bonn, diede fotogrammi diversi. Analizzato risultò costituito da granato manganesifero, di aspetto molto simile alla *romeite* ma di colore più chiaro.

## TABELLA

h k l	Atopite		Romeite		Odra Higuera		Intensità calcolata per l'atopite
	Int. oss.	d	Int. oss.	d	Int. oss.	d	
1 1 1	d	5.808	md	5.859	m	5.859	480
2 0 0	—	—	—	—	md	5.062	0
1 1 3	—	—	—	—	dd	3.073	275
2 2 2	mf	2.943	dd	2.920	md	2.933	2430
2 0 3	—	—	d	2.815	—	—	0
4 0 0	d	2.535	dd	2.518	—	—	512
1 1 4	—	—	md	2.383	—	—	0
2 0 4	d	2.252	—	—	d	2.265	0
2 2 4	d	2.087	—	—	—	—	40
4 4 0	mf	1.803	mf	1.812	mf	1.803	5500
5 3 1	md	1.725	—	—	md	1.725	815
2 2 6	ff	1.538	ff	1.538	f	1.538	3800
4 4 4	mf	1.474	m	1.479	md	1.479	360
5 5 1	m	1.435	m	1.437	md	1.440	572
7 1 1							145
6 0 4	—	—	d	1.415	—	—	0
6 2 4	d	1.366	m	1.356	—	—	38
7 3 1	mf	1.331	m	1.335	m	1.336	22
5 5 3							425
8 0 0	d	1.281	m	1.283	—	—	1710
6 6 0	—	—	md	1.209	—	—	8
2 2 8							17
6 6 2	f	1.177	f	1.177	mf	1.174	2900
4 0 8	mf	1.148	f	1.147	m	1.146	835
9 1 1	m	1.127	mf	1.124	—	—	443
7 5 3							216
6 6 4	md	1.093	m	1.091	d	1.093	15
9 3 1	m	1.076	md	1.077	—	—	40
4 4 8	ff	1.047	mf	1.047	m	1.047	5280
7 7 1	md	1.030	md	1.030	—	—	29
5 5 7							240
a =	10.26 ± 0.01		10.26 ± 0.01		10.25 ± 0.02		



I fotogrammi delle polveri della romeite e della atopite risultano praticamente uguali e si ordinano nel sistema cubico. Per essi si calcola un identico lato della cella elementare di 10.26 Å. Tale valore concorda con quello determinato recentemente da F. Machatschki <sup>(1)</sup> per l'atopite.

Dalla letteratura <sup>(2)</sup> la romeite sarebbe invece tetragonale con rapporto assiale di 1.0257. Pur essendo questo valore molto vicino ad 1 il metodo delle polveri dovrebbe permettere di distinguerlo. Secondo questo metodo invece la romeite risulterebbe cubica come l'atopite. L'identità tra romeite ed atopite era già stata supposta da Schaller <sup>(3)</sup>.

Anche le ocre di antimonio calcifere presentano fotogrammi quasi identici a quelli della atopite e della romeite che si ordinano pure nel sistema cubico con un lato della cella elementare di 10.25-10.26 Å. Dopo eliminazione dell'acqua per calcinazione a 750° i fotogrammi delle ocre risultano invariati sia come intensità che come posizione delle linee e si deve quindi ritenere che rimangano invariate, durante la disidratazione, le dimensioni delle celle elementari e la struttura reticolare sebbene aumenti la densità sperimentale. È da notarsi che anche l'ossido  $\text{Sb}_2\text{O}_4$  e quello  $\text{Sb}_2\text{O}_5$  ed anche le ocre minerali di antimonio che corrispondono alla formula  $\text{Sb}_2\text{O}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ , presentano pure, come verrà esposto in altra sede più dettagliatamente, analoghe celle elementari cubiche con costanti vicinissime.

La densità degli antimoniati di calcio, calcolati in base alle densità röntgenografiche ed alle formule indicate sono raccolte nella seguente tabella. Riportiamo per la atopite <sup>(4)</sup> e romeite <sup>(3)</sup> le densità sperimentali e le formule indicate nella letteratura, per le ocre le densità da noi determinate sui minerali calcinati a 750°.

	$a =$	Formula supposta per il calcolo della densità	Numero di molecole nella cella	densità calc.	dens. sper. (per le ocre dopo calc.)
Atopite . . .	10.26	$2\text{CaO} \cdot \text{Sb}_2\text{O}_5$	8	5.32	5.03
Romeite . . .	10.26	$3\text{CaO} \cdot 2\text{Sb}_2\text{O}_5$	4	4.98	4.71 - 5.07
Ocra Galicia . .	10.25	$3\text{CaO} \cdot 2\text{Sb}_2\text{O}_5$	4	5.00	4.30
Ocra Cordoba .	10.25	$\text{CaO} \cdot \text{Sb}_2\text{O}_5$	8	4.66	4.21
Ocra Cina . .	10.25	$5\text{CaO} \cdot 4\text{Sb}_2\text{O}_5$	2	4.82	4.44

(1) F. MACHATSCHKI, « Zeitschr. für Kristall. », 73, 159 (1930).

(2) C. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*, III. B., 1<sup>a</sup> Abt., 771 (T. Steinkopff-Dresden 1918).

(3) W. T. SCHALLER, « Journ. Wash. Ac. Sc. », 4, 359 (1914); « U. S. Geol. Surv. Bull. », 610 (1916); Dano, *System of Mineralogy*, 3<sup>a</sup> App. 68 (1915).

(4) C. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*, III, 1, 770-71; A. DAMOUR « Ann. Min. », 3, 183 (1853).

Le minori densità sperimentali apparenti delle ocre provengono oltre che dal loro stato fisico apparentemente amorfo anche dalle impurezze minerali presenti.

Per la atopite Machatschki<sup>(1)</sup> suppone una struttura analoga a quella del pirocloro, ma non discute detta struttura e non la conferma in base a calcoli delle intensità.

Dai fotogrammi delle polveri si nota solo la presenza di linee ad indici o tutti pari o tutti dispari (soltanto per la romeite appaiono due linee: una debole ed una medio-debole che non sono ordinabili e che potrebbero corrispondere a faccie ad indici misti, ma che si potrebbero, forse, attribuire ad impurezze del minerale).

Mancano inoltre le linee 200, 204, 600, ossia tutte le riflessioni di secondo ordine di faccie del tipo (h k o), dove h + k è dispari (solo nella atopite compare debole la 204, nella ocre di Cordoba la 200 appare media debole, nella romeite la 604 debole).

Si deve perciò concludere, astraendo dalle piccole anomalie accennate, che i minerali esaminati appartengono ad uno dei gruppi spaziali  $O_4$  e  $O_h$ .

Anche il metodo di Laue, più sensibile di quello delle polveri, ha fornito fotogrammi secondo la faccia di ottaedro perfettamente identici.

Nella tabella seguente le intensità sono state calcolate con la formula  $I = \frac{nS^2}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$  dove S è il fattore di struttura, ammesso che gli atomi occupino le posizioni che soddisfano alle condizioni di simmetria dei gruppi spaziali  $O_4$ ,  $O_h$ :

Sb: 16  $D_3$  o 16  $D_{3d}$  (132-fz); Ca: 16  $D_3$  o 16  $D_{3d}$  (137-fz);  
48 O: 48  $C_2$  o 48  $C_{3v}$  (381-fz); 8 O: 8 T o 8 Td (118-az).

Per brevità non riportiamo le coordinate dei singoli atomi; le notazioni tra parentesi corrispondono alle tabelle di H. Mark<sup>(2)</sup>.

L'accordo tra le intensità calcolate, per un valore di 0.23 per il parametro  $u$  dell'ossigeno, e quelle sperimentali è soddisfacente e conferma la struttura supposta.

È da notarsi che anche gli ossidi di antimonio  $Sb_2O_4$  e  $Sb_2O_5$  appartengono secondo Dehlinger<sup>(3)</sup> allo stesso gruppo spaziale  $Oh^7$ . Le celle elementari hanno dimensioni molto vicine, 10.21 Å, a quelle degli antimonati da noi esaminati e contengono il doppio di atomi di antimonio. È notevole l'analogia nelle intensità.

(1) F. MACHATSCHKI, loc. cit.

(2) H. MARK, *Die Verwendung der Röntgenstrahlen in Chemie und Technik*. (J. Barth. Ed.) Leipzig, 1926.

(3) U. DEHLINGER, «Zeitschr. für Kristall.» 66, 108 (1928).

Discuteremo in una prossima Nota più dettagliatamente la struttura degli antimonati di calcio e le analogie strutturali tra ossidi di antimonio, acidi antimonici e antimonati di calcio e piombo. Dai risultati qui esposti si deve ammettere che le dimensioni delle celle elementari e le posizioni dei gruppi  $\text{Sb}_2\text{O}_5$  nel reticolo siano le stesse per i diversi antimonati di calcio minerali, sia atopite che romeite, che ocre di antimonio calcifere. Nel reticolo così definito può variare la quantità di ossido di calcio combinato o di acqua senza che venga alterato lo scheletro dell'edificio reticolare<sup>(1)</sup>.

RIASSUNTO. — Sono descritte alcune ocre di antimonio minerali contenenti calcio combinato. Corrispondono alla seguente formula:



Presentano reticolo cubico, un lato della cella elementare di 10.25–10.26 Å, strutture reticolari analoghe a quelle dell'atopite. La romeite appare all'esame röntgenografico col metodo delle polveri cubica come l'atopite; come quest'ultima presenta un lato della cella di 10.26 Å ed appartiene al gruppo spaziale  $\text{O}_h^7$  od  $\text{O}_4$ .

**Chimica.** — *Sopra le diazoresine*<sup>(2)</sup>. Nota II di Z. JOLLES, presentata<sup>(3)</sup> dal Socio G. PELLIZZARI.

Nella precedente comunicazione fatta in questi « Rendiconti »<sup>(4)</sup>, ho riferito sopra i prodotti di decomposizione spontanea dei diazoderivati normali di alcune basi aromatiche, cioè le così dette diazoresine. Nella presente Nota voglio segnalare altri dati conseguiti nel frattempo ed in stretta relazione con quelli precedentemente esposti.

Evidentemente la fenilazossicarbonammide, la quale, come Angeli<sup>(5)</sup> ha dimostrato, per azione degli alcali si trasforma nel diazotato normale, dovrebbe per prolungato contatto con alcali dare luogo alla formazione di una resina identica a quella che si ottiene direttamente dall'anilina diazotata. L'esperienza ha confermato pienamente tale previsione.

(1) Nota aggiunta durante la correzione delle bozze. — Dopo la presentazione di questo lavoro (21 febbraio 1932) siamo venuti a conoscenza di un lavoro di O. Zedlitz, pubblicato nel frattempo (« Zeitschr. f. Kristallographie », 81, 157, febbraio 1932). I risultati ivi esposti nella struttura della romeite e sulla identità di questa con l'atopite concordano con i nostri.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

(3) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

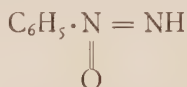
(4) Vol. XV, p. 292, 1932.

(5) « Rend. Lincei », 26, I, 207, 1917.

Una soluzione acquosa satura dell'ammide, resa alcalina, separa dopo qualche tempo dei fiocchi colorati in marrone scuro. Contemporaneamente ha luogo sviluppo gassoso. La resina purificata, nello stesso modo come le altre resine, descritte nella Nota su citata, e cioè mediante lavaggio per prolungata estrazione a ricadere con etere etilico, diede all'analisi elementare i seguenti valori:

	C	H	N
trov.	81.83	5.20	8.10
per $C_{24}H_{18}N_2O$ calc.	82.28	5.14	8.00.

Ora se il liquido di saponificazione dell'azossicarbonammide, come rileva Hantsch <sup>(1)</sup>, non contenesse diazotato normale, non sarebbe possibile spiegare la formazione di un prodotto di decomposizione spontanea, identico a quello che si ottiene in analoghe condizioni dall'anilina diazotata. Tale fatto costituisce un'altra conferma della struttura assegnata dal compianto Maestro al diazotato normale:



la cui formazione, in seguito alla saponificazione dell'azossicarbonammide, è un fatto rigorosamente dimostrato.

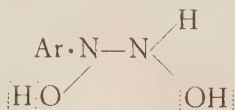
Anche la nitrosoacetanilide, lasciata a contatto dell'alcali per qualche ora, subisce un processo di resinificazione, dando luogo ad un prodotto un po' più scuro di quello proveniente dall'anilina, ma che all'analisi di azoto corrisponde alla formula:



che è la stessa trovata per la resina di tale base.

	N°/o trov.	8.06
per $C_{24}H_{18}N_2O$	N°/o calc.	8.00.

Il passaggio della nitrosoacetanilide a diazotato normale potrebbe aver luogo attraverso un composto di addizione



(1) « Berichte », 64, 656, 1931.

preceduto da una specie di trasposizione pinacolinica, come è stato altrove posto in rilievo <sup>(1)</sup>. A questo proposito voglio far notare che Bamberger <sup>(2)</sup> ha per primo intravveduta la possibilità di addizione dell'acqua, ma in un'altra maniera:



In base ad alcune esperienze, appositamente eseguite, sembra, che piccole quantità di un riducente debole come idrato ferroso, manganoso od acqua ossigenata (quest'ultima agisce sul diazocomposto normale anche da riducente) <sup>(3)</sup> acceleri la formazione di resina.

L'autore predetto <sup>(4)</sup>, studiando l'azione dell'acqua ossigenata sopra i diazocomposti normali e partendo da gr. 800 di p. cloroanilina, ottenne pochissimo acido diazobenzolico e gr. 500 circa di un prodotto resinoso, da cui egli, mediante estrazione eterea, separa pochi centigrammi di p. dicloroazobenzolo e p. dicloroazossi composto. Insieme al sig. Willy Camiglieri ho ripetuta tale esperienza partendo da anilina e la resina separatasi in breve tempo risulta per il suo aspetto e per il contenuto in azoto, identica a quella ottenuta per decomposizione spontanea del fenildiazotato:

N°/o trov. 8.25

per  $\text{C}_{24}\text{N}_{18}\text{N}_2\text{O}$  N°/o calc. 8.00.

In questo modo resta stabilito che l'anilina diazotata, sia lasciata a sè, sia in presenza di acqua ossigenata, come pure la fenilazossicarbonammide e la nitrosoacetanilide forniscono una medesima diazoresina.

(1) « Gazz. Chim. It. », 61, 401, 1931.

(2) BAMBERGER, « Berichte », 27, 2594.

(3) « Rend. Lincei », X, 321, 1929.

(4) BAMBERGER, « Berichte », 42, 3578, 1908.



**Zoologia.** — *Elenco degli uccelli riportati dalla "Missione Desio nel Deserto Libico"*. Nota di E. MOLTONI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. DAINELLI.

Fra il materiale riportato dalla «Missione Desio nel Deserto Libico» (estate-autunno 1931), che fu gentilmente donato al Museo Civico di Storia Naturale di Milano, figurano 44 pelli di uccelli appartenenti a ben 22 forme diverse, oltre svariati frammenti di cocci di uova di Struzzo, uccello che, com'è noto, al presente è completamente estinto nel Deserto Libico ed anche in Egitto; gli ultimi individui, a quanto pare, furono distrutti nella prima metà del 1800.

Frammenti di uova di Struzzo furono raccolti dal prof. Desio già nelle precedenti sue esplorazioni nel Deserto Libico <sup>(2)</sup>, frammenti che si crede appartengano ad individui che vivevano nella regione nell'epoca attuale e quindi non fossili.

Il numero degli uccelli cacciati e riportati non è elevato, ma data la scarsità della fauna riscontrata nella regione e lo scopo della Missione essenzialmente di carattere geologico-geografico, il prof. A. Desio ed il suo collaboratore cav. V. Ponti, possono essere soddisfatti di aver contribuito lodevolmente alla conoscenza ornitologica dell'interno del Deserto Libico, che fu fino ad oggi pressochè inesplorato anche dal lato ornitologico, tanto più che gli uccelli furono catturati in zone non agevolmente visitabili anche in prossimo avvenire.

Le forme a cui appartengono gli uccelli cacciati sono in massima parte del gruppo delle migratrici paleartiche, e, precisamente, ben diciassette sono tali, mentre le altre cinque, *Falco biarmicus tanypterus*, Schleg., *Streptopelia turtur isabellina* (Bp.), *Alaemon alaudipes alaudipes* (Desf.), *Oenanthe leucopygia leucopygia* (Brehm), *Bucanetes githagineus githagineus* (Licht.) sono del gruppo delle stanziali o di quelle i cui individui arrivano in estate, come ad esempio la *Streptopelia turtur isabellina* (Bp.).

Riguardo alle località di cattura, che sono elencate di fianco a ogni singolo esemplare, si ricorda che appartengono tutte all'interno della Cire-

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) E. MOLTONI, *Risultati Zoologici della Missione della R. Soc. Geogr. Ital. per l'esplorazione dell'Oasi di Giarabub* (1926-1927), *Uccelli*, in «Ann. Museo Civ. di St. Nat. di Genova», vol. III; id., *Uccelli raccolti dalla "Missione Desio" in Sirtica nel 1930*, in «Rivista Ital. di Ornitologia», anno I, serie 2<sup>a</sup>, 1931.

naica all'infuori delle seguenti che amministrativamente appartengono all'interno della Tripolitania (Fezzan): Uau en-Namus, Uau el-Chebir, Temissa, El-Fogha.

Prima di elencare le diverse forme faccio rilevare che se si fa un confronto tra l'avifauna delle località dell'interno del Deserto Libico e quella delle località cirenaiche e tripolitane costiere risalta come la prima abbia molto più affinità coll'avifauna finitima egiziana anzichè colla seguente, la quale, a sua volta, ha maggiore somiglianza coll'avifauna occidentale della catena dell'atlante, ciò che fu da me già riscontrato nei precedenti studi sugli uccelli delle zone interne delle nostre colonie dell'Africa del Nord.

Lo studio che seguirà questa Nota preventiva riporterà anche le osservazioni personali del prof. Desio e del cav. Ponti, che pubblicamente fin d'ora sento il dovere di ringraziare per il raro materiale di studio riportato dalle ultime propagini del Deserto Libico.

#### FAMIGLIA STRUTHIONIDAE

##### *Struthio camelus* (Linn.)

Vennero riportati frammenti di cocci di uova di questa specie, ormai estinta per il Deserto Libico, dalle seguenti località: Archenu, 18 agosto 1931 (6 frammenti); presso Gara el-Beda (Sahabi), 9 luglio; 4 Km. a W. di Sahabi, 10 luglio (3 frammenti); Uadi el-Faregh (Serir di Calanscio), 21 luglio (1 grosso frammento); dintorni di Gareh Tuila (Uau el-Chebir), 3 ottobre (diversi frammenti); fra Gareh Mohammed e 2° campo (Uau el-Chebir), 3 ottobre (diversi frammenti); fra 6° e 7° campo Temissa-Fogha, 11 ottobre (2 frammenti); presso 1° campo Harugi (el-Fogha), 14 ottobre 1931 (1 frammento).

#### FAMIGLIA ARDEIDAE

##### *Egretta garzetta garzetta* (Linn.)

♂, 6 novembre 1931, Laghetto di el-Giof (Cufra).

♀, 6 novembre 1931, id. id.

##### *Ardeola ralloides ralloides* (Scop.)

♀, 31 agosto 1931, Laghetto di el-Giof (Cufra).

♀, 15 settembre 1931, Lago di Bzema.

♂, 19 settembre 1931, Tazerbo.

FAMIGLIA FALCONIDAE

*Falco biarmicus tanypterus*, Schleg.

♀, Lago di Buema (Cufra).

FAMIGLIA RECURVIROSTRIDAE

*Himantopus himantopus* (Linn.)

♀, 7 settembre 1931, Lago di Buema (Cufra).

FAMIGLIA SCOLOPACIDAE

*Erolia minuta* (Leisl.)

6 settembre 1931, Laghetto di el-Giof (Cufra).

6 settembre 1931, id. id.

6 settembre 1931, id. id.

*Philomachus pugnax* (Linn.)

♂, 15 settembre 1931, Lago di Bzema.

♀, 15 settembre 1931, id.

FAMIGLIA COLUMBIDAE

*Streptopelia turtur isabellina* (Bp.)

♂, 7 agosto 1931, Laghetto di el-Giof (Cufra).

♂, 7 agosto 1931, id. id.

♀, 7 agosto 1931, id. id.

FAMIGLIA UPUPIDAE

*Upupa epops epops*, Linn.

♀, 14 settembre 1931, Seef es-Dressi (Bzema)†

Si tratta di un individuo molto più pallido in colorito dei soliti, in modo particolare sulla fronte che è color crema-pallido,

FAMIGLIA ALAUDIDAE

*Alaemon alaudipes alaudipes* (Desf.)

♂, 20 settembre 1931, Daheua (Tazerbo).

FAMIGLIA MOTACILLIDAE

*Anthus trivialis trivialis* (Linn.)

3 ottobre 1931, Uau el-Chebir.

3 ottobre 1931, id.

FAMIGLIA MUSCICAPIDAE

*Muscicapa striata striata* (Pall.)

29 agosto 1931, Presso il Laghetto di el-Giof (Cufra).

FAMIGLIA TURDIDAE

*Oenanthe hispanica melanoleuca* (Güld.)

♂, 15 settembre 1931, Lago di Bzema, individuo a gola nera.

15 settembre 1931, Lago di Bzema.

♂, 17 settembre 1931, Ramla tra Bzema e Tazerbo.

17 settembre 1931, id. id. id.

*Oenanthe leucopyga leucopyga* (Brehm)

3 ottobre 1931, Uau el-Chebir.

*Phoenicurus phoenicurus phoenicurus* (Linn.)

20 settembre 1931, Daheua (Tazerbo).

FAMIGLIA SYLVIIDAE

*Sylvia communis communis*, Lath.

17 settembre 1931, Ramla tra Bzema e Tazerbo.

*Sylvia borin* (Bodd.)

17 settembre 1931, Ramla tra Bzema e Tazerbo.

22 settembre 1931, Ramla tra Tazerbo e Uau en-Namùs.

*Sylvia cantillans albistriata*?

16 settembre 1931, Ramla tra Bzema e Tazerbo.

♀, 31 agosto 1931, Lago di el-Giof (Cufra).

3 ottobre 1931, Uau el-Chebîr.

Questi individui sono giovani e non riesco perciò a comprendere con certezza se appartengano alla sottospecie *albistriata*, ed ecco perchè ho messo l'?

*Phylloscopus trochilus trochilus* (Linn.)

♀, 14 settembre 1931, Scéf es-Dressi (Bzema).

14 settembre 1931, Ramla tra Bzema e Tazerbo.

17 settembre 1931, id. id. id.

FAMIGLIA LANIIDAE

*Lanius collurio* (Linn.)

♂ juv., 20 settembre 1931, Daheua (Tazerbo).

FAMIGLIA ORIOLIDAE

*Oriolus oriolus oriolus* (Linn.)

juv., 7 settembre 1931, Ramla presso Rebiana.

♂ juv., 15 settembre 1931, Lago di Bzema.

♀ juv., 20 settembre 1931, Daheua (Tazerbo).

FAMIGLIA FRINGILLIDAE

*Bucanetes githagineus githagineus* (Licht.)

♂, 20 agosto 1931, Ain Casu (Auenât).

♀, 20 agosto 1931, id. id.

♀, 20 agosto 1931, id. id.

♂, 31 agosto 1931, id. id.



FAMIGLIA EMBERIZIDAE

*Emberiza hortulana*, Linn.

♀, 28 settembre 1931, Uau'en-Namùs.

\*  
\* \*

Da quanto mi consta non erano ancora ricordate per la zona le seguenti specie: *Egretta garzetta garzetta* (Linn.), *Falco biarmicus tanypterus*, Schleg., *Streptopelia turtur isabellina* (Bp.), *Lanius collurio* (Linn.), *Emberiza hortulana*, Linn.

**Biologia.** — *Le onde cosmiche e l'oscillazione cellulare.* Nota di G. LAKHOVSKY, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio P. R. PIROTTA.

L'illustrissimo prof. Vincenzo Rivera ha presentato il 2 marzo 1930 <sup>(2)</sup> un ragguardevole lavoro relativo all'azione delle onde cosmiche sullo sviluppo degli esseri viventi. Gli esperimenti riguardavano semi rinchiusi in scatole di Petri e immersi nel lago di Castelgandolfo, vicino a Roma, a varie distanze sotto il livello dell'acqua. Tali esperimenti hanno dimostrato che lo sviluppo dei vegetali poteva essere ritenuto proporzionale alla profondità alla quale i semi erano stati immersi. Da questi esperimenti il prof. Rivera ha concluso che alle onde cosmiche non si possa far risalire la eccitazione alla divisione cellulare e che esse hanno anzi sulla germinazione una influenza lievemente depressiva.

Orbene, tali esperimenti invece d'infirmare le mie teorie vi danno una conferma.

Ho spiegato a lungo nei miei libri: *Il segreto della Vita*, *Contribuzione all'Etiologia del Cancro*, *L'Universion*, *La Scienza e la Felicità*, che la *variazione* delle onde cosmiche provoca lo squilibrio oscillatorio delle cellule e quindi la malattia e la morte.

Infatti sappiamo che non c'è nè un minuto nel giorno, nè un giorno nell'anno, nei quali le intensità e le frequenze delle onde cosmiche rimangono uguali, per causa del girare della Terra intorno al Sole e per causa

(1) Nella seduta del 21 febbraio 1932.

(2) V. RIVERA, *Sull'azione biologica della radiazione penetrante (Raggi cosmici o ultra-γ) sullo sviluppo dei semi di vegetali terrestri.* Nota presentata il 2 marzo 1930 all'Accademia dei Lincei.

del suo movimento intorno a sè stessa, movimento che fa cambiare l'intensità della luce.

I lavori degli astrofisici e le misure da loro fatte a questo proposito ci fanno sapere che le onde cosmiche sono molto più intense alle 22 della notte che a mezzogiorno, dato che la luce del sole, la quale è un campo elettromagnetico, assorbe queste onde cosmiche, più o meno, a seconda della sua intensità.

Ho dunque ideato di creare un campo elettromagnetico ambiente intorno all'individuo da curare, per assorbire l'eccesso di queste onde ed uniformare l'intensità, in un certo modo, ciò che deve toglier via gli accidenti della divisione cellulare, in seguito all'attenuazione dell'eccesso massimo del campo cosmico alle ore 23 della notte, come pure della sua insufficienza alle ore 12.

Quel campo magnetico ausiliario, l'ho realizzato, in un certo modo, per mezzo dei miei circuiti oscillanti. Infatti sappiamo, dal punto fisico, che qualsiasi pezzo di metallo, isolato come si deve, sia capace di oscillare elettricamente sulla propria lunghezza di onda, trovando nella gamma delle onde atmosferiche un'onda almeno, che corrisponda al suo proprio periodo di oscillazione.

E tal fenomeno viene provocato dalle innumerevoli scariche che, ogni tanto, si producono nell'atmosfera, sia per le scintille che scoppiano fra le spazzole dei motori, fra i commutatori, fra i morsetti di apparecchi elettrici, fra i trolleys, ecc., sia, da pochi anni, per le radio-onde che ad ogni momento solcano l'atmosfera da un'estremità all'altra estremità della Terra con ogni lunghezza di onda, dalle più grandi alle più piccole, tanto per le onde fondamentali, quanto per le armoniche. Così si trovano nell'atmosfera campi elettromagnetici di ogni lunghezza di onda, da qualche millimetro fino a parecchie diecine di chilometri.

Orbene, non ho ideati i miei circuiti oscillanti a scopo di concentrare le onde cosmiche, come certi autori dichiarano, ma invece per creare intorno al soggetto un campo magnetico, che possa filtrare le onde cosmiche, togliendo via il loro eccesso.

Ecco come il processo degli esperimenti del prof. V. Rivera produce il medesimo effetto dei miei circuiti oscillanti:

Calando a una certa distanza sotto il livello dell'acqua, nel lago, le scatole di Petri, nelle quali i semi erano rinchiusi, si sopprime a grandi proporzioni la variazione delle onde cosmiche: infatti l'intensità eccessiva delle ore 23, la più pericolosa, viene soppressa dalla massa dell'acqua, mentre la debolezza di tali onde alle ore 12 viene ugualmente migliorata dalla mancanza della luce, la quale non penetra più nell'acqua al di là di una certa profondità.

Di modo che, l'azione delle onde cosmiche essendo così più costante, la divisione cellulare normale è più rapida e più regolare, lo che spiega il grande sviluppo dei semi.

Tali fatti spiegano anche la straordinaria longevità dei pesci e animali sottomarini che vivono durante secoli, dato che in mezzo all'acqua non vengono mai sottoposti all'eccesso delle onde cosmiche.

Non è dunque esatto il dire, con certi fisici, che non ci sono più onde cosmiche ad una profondità superiore a sessanta metri nei laghi o nel mare. Sostengo che ci sono gamme di onde cosmiche le quali non possiamo misurare coi nostri apparecchi, ma che attraversano tutta la Terra, come ho spiegato nel mio libro *L'Universion*: «dove c'è materia, ci sono onde cosmiche».

**Biologia.** — *Sulla sostanza colorante dei bozzoli dei bachi da seta di razza verde Giapponese.* Nota di C. JUCCI e C. MANUNTA, presentata dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Botanica.** — *Piante raccolte in Libia dalla « Missione Desio ».* Nota di R. PAMPANINI, presentata dal socio G. DAINELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il doloroso annuncio della morte del Socio Corrispondente GIUSEPPE VITALI.

Il Socio SEVERI aggiunge all'annuncio del Presidente calde parole d'omaggio alla memoria di G. VITALI e ne rievoca brevemente la figura di uomo e di studioso affermando che egli ha portato all'analisi infinitesimale dei contributi che assicurano al Suo nome una fama duratura.

Il Presidente ringrazia il Socio SEVERI delle parole pronunciate.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio DAINELLI presenta il volume di S. A. R. il Duca degli Abruzzi dal titolo « Alle sorgenti dello Uabi Uebi-Scebèli » e ne mette in rilievo la grande importanza dal punto di vista scientifico per la conoscenza della regione, e dal punto di vista pratico per lo studio delle possibilità di irrigazione e quindi di sfruttamento della Somalia.

Propone che l'Accademia invii a S. A. R. il Duca degli Abruzzi l'espressione della più viva ammirazione per la Sua opera imperitura di esploratore, di scienziato e di italiano.

L'Assemblea approva all'unanimità.

## PRESENTAZIONE DI NOTE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELLINI, BOTTAZZI, CASTELNUOVO, LEVI-CIVITA, PALAZZO.

---

# OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 6 marzo 1932*

- AGOSTINI ANGELA. — Miceti della Cirenaica. (Estr. dagli «Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia». Serie IV, vol. III). Pavia, 1931. 4°, pp. 1-10.
- ALDRICH J. M. — Notes on Francis Walker's types of North American flies of the family Tachinidae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-16.
- ARCANGELI ALCESTE. — Isopodi terrestri raccolti in Somalia dal Dott. Giuseppe Russo. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXVI, pp. 48-50). Spoleto, 1932. 8°.
- ARCANGELI ALCESTE. — Nuova specie di Isopodo terrestre. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXVI, pp. 17-19). Spoleto, 1932. 8°.
- BARNES H. F. — A new saprophytic gall midge, *Asynapta Furcifer* sp. n., on olives. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXVI, pp. 51-53). Spoleto, 1932. 8°.
- BARTSCH PAUL. — The West American mollusks of the genus *Acar*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-4.
- BERNHAEUER MAX. — Neue Staphyliniden aus Afrika aus der Ausbeute Silvestri's (27 Beitrag zur Fauna Afrika's). (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXVI, pp. 9-16). Spoleto, 1932. 8°.
- BOSELLI F. B. — Istinti materni del *Sehirus sexmaculatus* Rbr. (Heteroptera: Cydnidae). (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXVI, pp. 1-8). Spoleto, 1932. 8°.
- CASSINIS GINO. — Aerofotogrammetria e Catasto. (Estr. da «L'Ingegnere». Vol. V). Roma, 1931. 8°, pp. 1-8.
- CASSINIS GINO. — La crociera gravimetrica del R. Sommergebile «Vettor Pisani». (Estr. dal «Bollettino del Com. Naz. Italiano per la Geodesia e la Geofisica». Serie II, anno II). s. l. 1931. 8°, pp. 1-8.
- CASSINIS GINO. — Ricerche sul metodo aerofotogrammetrico Nistri. (Estr. da «L'Aerotecnica». Vol. XI). Roma, 1931. 8°, pp. 1-10.
- Comitato per l'Ingegneria del Consiglio Nazionale delle Ricerche. — La partecipazione italiana al primo Congresso Internazionale del beton semplice ed armato. Liegi, settembre 1930. Roma, 1931. 8°, pp. I-IV, 1-216.
- CUSHNUM J. A. and PARKER F. L. — Recent Foramifera from the Atlantic coast of South America. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-24.
- DI TOCCO ROBERTO. — Bibliografia del filugello (*Bombyx mori* L.) e del gelso (*Morus alba* L.) compilata nella R. Stazione bacologica sperimentale di Padova. Padova, Casa Editr. A. Milani, 1927. 8, pp. I-XLII, 1-262.
- DOBZHANSKY TH. — The North American beetles of the genus *Coccinella*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-32.
- EWING H. E. — A catalogue of the Trombiculinae, or «chigger mites» of the new world, with new genera and species and a key to the genera. (From the



- « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-18.
- GRANT U. S. and RODNEY-GALE H. — Catalogue of the Marine Pliocene and Pleistocene Mollusca of California and adjacent regions. (Memoirs of the San Diego Society of Natural History. Vol. I.). San Diego, California, 1931. 4°, pp. 1-1036.
- INGBER EDMONDO. — Intorno alla radioeccitazione e alla radiolesione. Memoria I: Azione biologica dei raggi Röntgen duri. Ricerche eseguite sulla *Vicia faba var. minor*. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia ». Serie IV, vol. II, 1930, pp. 173-268). Siena, 1931. 4°.
- LONGO B. — Sulla fioritura di un esemplare di *Arancaria Bidwilli* Hook. nel R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal « Bollettino del R. Orto Botanico di Napoli ». Tomo X, pp. 313-315). s. l. 1932, 8°.
- LUIGI AMEDEO DI SAVOIA (Duca degli Abruzzi). — Le esplorazioni dello Uabi-Uebi Scebeli dalle sue sorgenti nella Etiopia meridionale alla Somalia Italiana (1928-1929). Roma, Editore A. Mondadori, 1932. 8°, pp. 1-XXVII, 1-515.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — Anaphylaxie. Paris, Librairie J. B. Baillière et Fils., 1932. 8°, pp. 1-158.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — Nomenclature des principaux travaux scientifiques. 1887-1931. Lyon, 1931. 8°, pp. 1-44.
- MARTELLI GIUSEPPE M. — Note di biologia sulla « *Rhagoletis cerax* » (L) Loew (Diptera-Triponeidae). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVI, pp. 20-45). Spoleto, 1932. 8°.
- MARTYNOV A. B. — Report on a collection of insects of the order Trichoptera from Siam and China. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931, 8°, pp. 1-20.
- RANZI SILVIO. — I gradienti assiali nello sviluppo embrionale. (Estr. dal « Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale ». Vol. VI). Milano, 1931. 8°, pp. 1-30.
- RANZI SILVIO. — Ricerche fisiomorfologiche sull'accrescimento dei Selaci. (Estr. dal « Bollettino di Zoologia ». Anno III, pp. 39-43). Napoli, 1932. 8°.
- RANZI SILVIO. — Ricerche sulla biologia sessuale degli Anellidi. (Estr. dalle « Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli ». Vol. XI, pp. 271-292). Napoli, 1931. 8°.
- REINHARD H. J. — Revision of the American parasitic flies belonging to the genus *Winthemia*. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79. Washington, 1931. 8°, pp. 1-54.
- RUEDEMANN RUDOLF. — Some new Middle Cambrian fossils from British Columbia. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-18.
- RUSSO GIUSEPPE. — Contributo alla conoscenza degli Scolitidi. III. Ilesinini dell'olivo. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVI, pp. 87-114). Spoleto, 1932. 8°.
- SCOTT SKINKER MARY. — Three new parasitic nematode worms. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-9.
- SILVESTRI F. — « Campodeidae » (Insecta, Thysanura) dell'Unione dell'Africa meridionale. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVI, pp. 54-86). Spoleto, 1932. 8°.
- TREADWELL AARON L. — Three new species of Polychaetous annelids in the collections of the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-5.
- VIGNE PAUL. — L'œuvre scientifique de Auguste Lumière dans le domaine de la biologie et de la médecine. Lyon, 1931. 8°, pp. 1-30.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Fascicolo del 20 marzo 1932 (Anno X)*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Teoremi di unicità e di esistenza per le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso prossimo alla forma circolare.* Nota<sup>(1)</sup> del Socio T. LEVI-CIVITA.

L'equazione che regge le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso  $C$ , in prossimità alla forma circolare, è <sup>(2)</sup>

$$(E) \quad \ddot{\varepsilon} + \varepsilon^{IV} + \varepsilon' = 0,$$

dove (assunti per unità di lunghezza il raggio della circonferenza non perturbata, e un'opportuna unità di tempo) le variabili indipendenti sono l'arco  $s$  della curva  $C$  (identificabile con quello della circonferenza non perturbata), e il tempo  $t$ : —  $\varepsilon(s, t)$  rappresenta l'alterazione del raggio di curvatura del filetto; infine il punto sovrapposto sta per  $\frac{\partial}{\partial t}$ , e l'apice ' per  $\frac{\partial}{\partial s}$ .

Come intervallo di ampiezza  $2\pi$ , entro cui varia  $s$ , si assumerà —  $\pi \leq s \leq \pi$ .

Risguardando poi, come è sempre lecito,  $t = 0$  quale istante iniziale, dovremo far variare  $t$  da 0 a  $t_1$ , essendo  $t_1$  un generico valore positivo, che ci riserviamo, quando sarà il caso, di far crescere indefinitamente.

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1932.

(2) Cfr. la mia Memoria *Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi* negli « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », ser. II, vol. I, 1932, pp. 1-33, 229-250.

Chiameremo per brevità  $\chi$  il campo rettangolare  $-\pi \leq s \leq \pi$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ .

Quanto alle funzioni  $\varepsilon(s, t)$ , esse debbono manifestamente ritenersi uniformi in  $\chi$  e, per il fatto che verificano la (E), dotate *almeno generalmente* di derivate, rispetto ad  $s$ , fino al 4° ordine, e, rispetto a  $t$ , fino al 2° ordine, finite e integrabili. Coll'avverbio generalmente intendiamo che possa al più rimanere escluso un insieme del campo  $\chi$  di misura superficiale nulla. Ma è nella natura delle cose di introdurre una specificazione ulteriore; e precisamente, dato il significato della variabile  $t$ , si è condotti ad esigere che

a) le derivate  $\ddot{\varepsilon}(s, t)$ ,  $\varepsilon^{IV}(s, t)$  esistano e siano finite per ogni  $t$  dell'intervallo  $0 \leq t \leq t_1$  (estremi inclusi), potendo invece rimanere esclusi valori di  $s$  dell'intervallo  $-\pi \leq s \leq \pi$ , in numero finito (o costituenti un insieme di misura nulla). Comunque, le derivate d'ordine immediatamente precedente  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon'''$  e a fortiori  $\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon$  vanno senz'altro ritenute continue in tutto il campo  $\chi$ .

D'altra parte, per essere  $C$  una curva chiusa,

b) la  $\varepsilon(s, t)$ , e con essa tutte le sue derivate, per cui sussiste la continuità, devono essere funzioni periodiche dell'argomento  $s$ , cioè prendere gli stessi valori per  $s = \pm \pi$ .

Supporremo ulteriormente che

c) anche  $\dot{\varepsilon}'$  esista e si comporti in  $\chi$  come  $\ddot{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon^{IV}$ , con che  $\dot{\varepsilon}'$  risulta incondizionatamente continua.

Per brevità chiameremo *regolare* ogni integrale  $\varepsilon(s, t)$  della (E) che soddisfa alle condizioni a), b), c).

Scopo della presente Nota è di mostrare che *un integrale regolare  $\varepsilon(s, t)$  è univocamente determinato dai valori iniziali  $\varphi(s) = \varepsilon(s, 0)$ ,  $\psi(s) = \dot{\varepsilon}(s, 0)$  che esso e la sua derivata rapporto a  $t$  assumono per  $t = 0$  (teorema di unicità); e che tale integrale si può agevolmente costruire mediante serie, uniformemente convergenti nel campo reale (teorema di esistenza).*

Trattandosi di equazione lineare, la dimostrazione di univocità si riduce, come è notissimo, a verificare che un integrale  $\varepsilon(s, t)$ , per cui si annullano i dati iniziali  $\varphi$  e  $\psi$ , è identicamente nullo. Di ciò appunto ci occuperemo dopo brevi premesse (n. 1° e 2°); ma vogliamo rilevare fin d'ora che le nostre considerazioni (ovviamente suggerite dai metodi correnti della fisica matematica classica) non richiederanno comunque analiticità dei dati. Ciò è non soltanto utile (per la maggiore generalità dell'impostazione e per la maggiore adeguatezza ai problemi applicativi), ma, per certi sistemi, e in particolare per la equazione (E), addirittura indispensabile. Infatti la (E), come l'equazione che regge la propagazione del calore, non è di quelle cui sia applicabile il classico teorema (locale) di esistenza di Cauchy-Kowalevsky (sebbene essa abbia forma, come suol dirsi, quasi-normale). E ciò perchè,

pur potendosi calcolare in base ai dati iniziali, tutti i coefficienti dello sviluppo tayloriano, questo in generale non converge <sup>(1)</sup>.

# I. — RICHIAMO DI UN LEMMA DELL'ALMANSI.

Sia  $y$  una funzione di  $x$ , finita e continua nell'intervallo  $-\pi$ — $\pi$ , a valor medio nullo, cioè, tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} y dx = 0,$$

e periodica, nel senso che

$$y(\pi) = y(-\pi);$$

inoltre dotata di derivata prima  $y'(x)$ , integrabile assieme al suo quadrato nello stesso intervallo. Allora si ha

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} y^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} y'^2 dx.$$

E vale altresì la disuguaglianza più restrittiva

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} y^2 dx \leq \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} y'^2 dx,$$

semprechè, nello sviluppo di Fourier di  $y(x)$ , manchino, oltre il termine noto (eguale al valor medio), anche i termini in  $\sin x$ ,  $\cos x$ , sia cioè ulteriormente

$$\int_{-\pi}^{\pi} y \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} y \sin x dx = 0.$$

La dimostrazione si ricava agevolmente dallo sviluppo di Fourier, tenendo conto della formula di Parseval <sup>(2)</sup> per  $y'(x)$ , come fece originariamente l'Almansi <sup>(3)</sup>, supponendo continua anche  $y'(x)$ .

(1) Cfr. S. KOWALEVSKY, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, « Journal für die reine und die angew. Math. », B. LXXX, 1875, p. 22; nonchè G. LAMPARIELLO, *Sopra una equazione alle derivate parziali del 4° ordine*, in questo stesso volume di « Rendiconti », p. 37.

(2) Veggasi ad es. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Bologna, Zanichelli, 1928.

(3) *Sopra una delle esperienze di Plateau*, « Ann. di Mat. », t. XII, pp. 7-8 (1906).

Il Tonelli<sup>(1)</sup> mostrò in seguito che basta ammettere l'assoluta continuità della  $y(x)$  e l'esistenza di  $\int_{-\pi}^{\pi} y'^2 dx$ .

Infine il Picone<sup>(2)</sup> indicò un modo più diretto ed elementare per arrivare al risultato nelle stesse ipotesi.

## 2. — CONSEGUENZE INTEGRALI DELLA (E).

Per una qualsiasi funzione  $f(s, t)$ , integrabile in  $\chi$ , avremo

$$\int_{\chi} f d\chi = \int_{-\pi}^{\pi} ds \int_0^{t_1} f dt = \int_0^{t_1} dt \int_{-\pi}^{\pi} f ds.$$

Inoltre, se  $f_1(s, t)$ ,  $f_2(s, t)$  sono periodiche (di periodo  $2\pi$ ) rispetto all'argomento  $s$ , e  $f_1^{(n_1)}$ ,  $f_2^{(n_2)}$  designano le loro derivate rispetto a tale argomento degli ordini  $n_1$  ed  $n_2$  rispettivamente, si ricava con ovvie integrazioni per parti, attesa la integrabilità e periodicità (delle due funzioni e loro derivate),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1^{(n_1)} f_2^{(n_2)} ds = (-1)^p \int_{-\pi}^{\pi} f_1^{(n_1+p)} f_2^{(n_2-p)} ds,$$

essendo  $p$  un qualsivoglia intero positivo non superiore ad  $n_2$ . Da questa formula segue in particolare, per ogni  $\epsilon(s, t)$  regolare (nel senso dichiarato in principio della presente Nota),

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\epsilon} \epsilon'' ds = - \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\epsilon}' \epsilon' ds = - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\epsilon'^2}{dt} ds,$$

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\epsilon} \epsilon^{IV} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\epsilon}'' \epsilon'' ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\epsilon''^2}{dt} ds.$$

Si ha d'altra parte

$$(5) \quad \int_{\chi} \ddot{\epsilon} \dot{\epsilon} d\chi = \int_{-\pi}^{\pi} ds \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \frac{d\epsilon^2}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ds [\epsilon^2]_0^{t_1},$$

(1) *Su una proposizione dell'Almansi*, in questi « Rendiconti », serie 5<sup>a</sup>, vol. XXIV, pp. 676-682 (1° sem. 1914).

(2) *Su una proposizione dell'Almansi*, « Boll. della Unione Mat. », anno I, pp. 97-101, (1923).



nonché, integrando le (3), (4) rispetto a  $t$  fra 0 e  $t_1$ ,

$$(3') \quad \int_{\chi} \dot{\epsilon} \epsilon'' d\chi = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\epsilon'^2]_0^{t_1} ds,$$

$$(4') \quad \int_{\chi} \dot{\epsilon} \epsilon^{IV} d\chi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\epsilon''^2]_0^{t_1} ds.$$

Tutto ciò premesso, moltiplichiamo la (E) per  $\dot{\epsilon}$ , e integriamo in  $\chi$ . In base alle (5), (3'), (4'), risulta

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \dot{\epsilon}^2 + \epsilon''^2 - \epsilon'^2 \}_0^{t_1} ds = 0.$$

Suppongasi ora che, per  $t = 0$  (e per qualsiasi  $s$ ), si annullino  $\epsilon$  ed  $\dot{\epsilon}$ , ciò che implica naturalmente  $\epsilon' = \epsilon'' = 0$ , sempre per  $t = 0$ . Ove si riprenda per l'estremo superiore la designazione generica  $t$ , al posto di  $t_1$ , ne consegue

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \{ \dot{\epsilon}^2 + \epsilon''^2 - \epsilon'^2 \} ds = 0$$

per ogni  $t > 0$ .

### 3. — APPLICAZIONE DEL LEMMA DI ALMANSI E TEOREMA DI UNICITÀ.

Ogni  $\epsilon'(s, t)$  proveniente da un integrale regolare della (E) è periodica rispetto ad  $s$ , e ammette, rispetto a questo argomento, derivate fino al terzo ordine almeno (continue e periodiche almeno fino al secondo). Si trovano così esuberantemente soddisfatte le premesse del n. 1, che assicurano la validità del lemma dell'Almansi. Vale pertanto la disuguaglianza (1), che si scriverà

$$\int_{-\pi}^{\pi} \epsilon'^2 ds \leq \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon''^2 ds.$$

Con ciò la (6) dà luogo alla disuguaglianza

$$\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\epsilon}^2 ds = \int_{-\pi}^{\pi} (\epsilon'^2 - \epsilon''^2) ds \leq 0,$$

la quale (nel campo reale, attesa la continuità) richiede

$$\dot{\varepsilon}(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(s, t) = 0$$

per ogni  $s$  e per ogni  $t \geq 0$ . Siccome per ipotesi,  $\varepsilon(s, 0) = 0$ , così ne segue che  $\varepsilon(s, t)$  si annulla per qualsiasi  $t \geq 0$ , c. d. d.

#### 4. - TEOREMA DI ESISTENZA.

Nella Memoria degli « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », citata a p. 409, ho in sostanza stabilito il teorema di esistenza della (E), assegnandone (col consueto criterio delle soluzioni semplici) gli integrali, i cui valori iniziali sono del tipo  $e^{\pm i n s}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ,  $n$  intero arbitrario). Possiamo, in poche parole, riprendere la questione.

Si tratta di costruire l'integrale  $\varepsilon(s, t)$  della (E), che per  $t = 0$  si riduce a  $\varphi(s)$ , mentre la sua derivata  $\dot{\varepsilon}$  diviene eguale a  $\psi(s)$ , essendo  $\varphi(s)$  e  $\psi(s)$  funzioni periodiche, dotate, a norma di  $a$ ,  $b$ ,  $c$ : la prima di derivate fino al quart'ordine (continue e periodiche, fino al terzo almeno), la seconda fino al 2° ordine.

Per la linearità della (E), il problema si scinde in due, corrispondenti alle seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s, 0) = \varphi(s) & \quad , \quad \dot{\varepsilon}(s, 0) = 0; \\ \varepsilon(s, 0) = 0 & \quad , \quad \dot{\varepsilon}(s, 0) = \psi(s), \end{aligned}$$

bastando poi fare la somma delle due soluzioni. Ora  $\varphi$  e  $\psi$  sono entrambe sviluppabili in serie di Fourier, il cui termine generale, passando attraverso l'immaginario, può assumersi sotto la forma del prodotto di una costante (in generale complessa) per

$$e^{\pm i n s}$$

essendo  $n$  un intero positivo o nullo.

Prescindiamo dal fattore costante, per cui ogni soluzione di una equazione lineare può essere moltiplicata, conservandosi tale. In corrispondenza ai dati iniziali

$$(7) \quad \varphi = e^{\pm i n s} \quad , \quad \psi = 0$$

si ha, come immediatamente si verifica, l'integrale

$$(8) \quad \varepsilon(s, t) = \cos vt \cdot e^{\pm i n s} ,$$

in cui

$$(9) \quad v^2 = n^4 - n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Invece, in corrispondenza ai dati

$$(10) \quad \varphi = 0, \quad \psi = e^{\pm i n s},$$

si trova subito, per  $n > 1$ , con che anche  $v^2 > 1$ ,

$$(11) \quad \varepsilon(s, t) = \frac{1}{v} \sin vt \cdot e^{\pm i n s} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

mentre, per i due valori  $n = 0, n = 1$ , si ha rispettivamente

$$(12) \quad \varepsilon(s, t) = t; \quad \varepsilon(s, t) = t e^{\pm i s}.$$

Da tutto ciò si raccoglie che, per costruire l'integrale generale della (E), basta introdurre, nello sviluppo di Fourier di

$$(13) \quad \varphi(s) = \alpha_0 + \sum_n (\alpha_n e^{i n s} + \bar{\alpha}_n e^{-i n s})$$

( $\alpha_0$  costante reale,  $\alpha_n$  complessa coniugata di  $\alpha_n$ ),

le espressioni (8) al posto dei singoli  $e^{\pm i n s}$ ; e, nell'analogo sviluppo di

$$(14) \quad \psi(s) = \beta_0 + \beta_1 e^{i s} + \bar{\beta}_1 e^{-i s} + \sum_n (\beta_n e^{i n s} + \bar{\beta}_n e^{-i n s})$$

(in cui ho scritto a parte i termini corrispondenti a  $n = 0$  e  $n = 1$ ), le espressioni (11) entro il sommatorio, moltiplicando inoltre, in base alle (12), i termini esterni per  $t$ .

Si ha così

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon(s, t) &= \alpha_0 + \sum_n \cos vt (\alpha_n e^{i n s} + \bar{\alpha}_n e^{-i n s}) \\ &+ t (\beta_0 + \beta_1 e^{i s} + \bar{\beta}_1 e^{-i s}) + \sum_n \frac{\sin vt}{v} (\beta_n e^{i n s} + \bar{\beta}_n e^{-i n s}). \end{aligned} \right.$$

Tale conclusione, che sarebbe senz'altro esauriente per somme di un numero finito di termini, seguita naturalmente a valere anche per le serie, purchè si possano (di fronte alle operazioni formali che interessano nei casi singoli) trattare come somme. Per noi è all'uopo sufficiente la uniforme convergenza entro il campo  $\chi$ , della (15) e delle serie che se ne ottengono, derivando termine a termine, per passare a  $\ddot{\varepsilon}, \varepsilon'', \varepsilon^{IV}$ . Tale uni-

forme convergenza si assicura agevolmente, introducendo qualche ipotesi complementare circa i dati, cioè circa le funzioni  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$ . E precisamente, mentre, in base ai requisiti *a)*, *b)*, *c)* d'ogni integrale regolare, già devono ritenersi  $\varphi(s) = \varepsilon(s, 0)$  periodica e continua assieme a  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ ;  $\psi(s) = \dot{\varepsilon}(s, 0)$  pure periodica e continua assieme a  $\psi'$  (esistendo altresì  $\varphi^{IV}$  e  $\psi''$  finite e generalmente continue), noi ammetteremo in più:

d) che siano periodiche anche  $\varphi^{IV}$  e  $\psi''$ , e che esistano e siano funzioni a variazione limitata le due derivate immediatamente successive  $\varphi^V$  e  $\psi'''$  <sup>(1)</sup>.

Da tali ipotesi segue subito <sup>(2)</sup> la convergenza delle due serie

$$\sum_1^\infty n^4 |\alpha_n| \quad , \quad \sum_1^\infty n^2 |\beta_n|$$

a termini positivi costanti, donde, come ovviamente si verifica, tenendo conto della espressione (9) di  $v$ , la convergenza assoluta e uniforme anche delle serie che rappresentano  $\ddot{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\varepsilon^{IV}$ , c. d. d.

## 5. - STABILITÀ DEI VORTICI PROSSIMI ALLA FORMA CIRCOLARE.

Ricordo <sup>(3)</sup> che, per le configurazioni prossime alle circolari, come necessaria conseguenza del fatto che, comunque, trattasi necessariamente di curve chiuse, devono mancare in  $\varepsilon(s, t)$  i termini corrispondenti ad  $n = \pm 1$ , e d'altra parte deve essere nullo il valore medio (rispetto ad  $s$ ) di  $\dot{\varepsilon}(s, t)$ , cioè la costante  $\beta_0$ . Scompaiono pertanto dal secondo membro della (15) cinque termini, fra cui i tre che contengono  $t$  a fattore. *Tutti gli altri rimangono limitati, donde la stabilità.*

Siffatta conclusione è invero subordinata, come tutti i ragionamenti consimili, al presupposto che le condizioni iniziali determinino il fenomeno — nel caso nostro la espressione di  $\varepsilon(s, t)$  — *univocamente*. Altrimenti bisognerebbe esaminare anche il comportamento asintotico di tutte le altre eventuali soluzioni (aventi i necessari requisiti) compatibili colle stesse condizioni iniziali.

Il teorema di unicità, di cui al n. 3, trova, come si vede, specifico impiego nell'attribuire rigore matematico all'accertamento della completa stabilità dei filetti vorticosi prossimi a circoli, accertamento che era stato da me conseguito con implicita (perchè intuitiva) esclusione della possibilità di più soluzioni, a partire da una data configurazione iniziale.

(1) In luogo di quest'ultima condizione, si può naturalmente sostituire quella più restrittiva che esistano, finite e generalmente continue, anche  $\varphi^{VI}$  e  $\psi^{IV}$ .

(2) Veggansi ad es. le già citate *Serie trigonometriche* del TONELLI, p. 125.

(3) Pp. 247-249 della Memoria citata in principio.

**Matematica.** — *Un teorema di calcolo delle variazioni.* Nota <sup>(1)</sup>  
del Corrisp. L. TONELLI.

Per l'esistenza del minimo assoluto dell'integrale

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

in ogni classe completa  $K$  di curve ordinarie  $C^{(2)}$ , contenute in un campo limitato e chiuso  $A$ , si ha un teorema generale <sup>(2)</sup>, il quale poggia, oltre che sulla semicontinuità inferiore di  $I$ , sul comportamento della funzione  $f(x, y, y')$  al crescere indefinito di  $|y'|$ ; in esso, infatti, si suppone che la  $f(x, y, y')$ , per  $|y'|$  sufficientemente grande, soddisfi sempre ad una disuguaglianza del tipo

$$f(x, y, y') \geq |y'|^{1+\alpha},$$

con  $\alpha > 0$ . Recentemente, M. Nagumo <sup>(4)</sup> ha sostituito, a questa condizione, l'altra, più generale, che la  $f(x, y, y')$ , per  $|y'| \rightarrow \infty$ , diventi positivamente infinita di un ordine uniformemente (rispetto al campo  $A$ ) superiore ad 1. Nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ho studiato anche il caso in cui l'ordine di infinito della  $f(x, y, y')$ , per  $|y'| \rightarrow \infty$ , cessa di essere uniformemente superiore ad 1 nell'intorno di punti isolati od anche nell'intorno di alcune curve a tangente variabile in modo continuo, ma mai parallela all'asse delle  $y$ . Dai teoremi sino ad ora conosciuti resta, pertanto, sistematicamente escluso il caso di integrali con funzione  $f(x, y, y')$  avente la singolarità indicata nell'intorno di rette parallele all'asse delle  $y$ , come precisamente avviene, ad esempio, per gli integrali

$$\int_0^1 xy'^2 dx \quad , \quad \int_0^1 \sqrt{x} y'^2 dx.$$

Di questo caso intendo di occuparmi nella presente Nota.

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1932.

(2) Seguo qui la terminologia adottata nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (Zanichelli, Bologna, 1922-24).

(3) *Fondamenti, ecc.*, op. cit., vol. II, p. 282.

(4) *Ueber die gleichmässige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblem*, « Japanese Journal of Mathematics », vol. VI, p. 173 (1929).



1. — Sia  $f(x, y, y')$  una funzione (reale) finita e continua, rispetto alla terna reale  $(x, y, y')$ , insieme con le sue derivate parziali  $f_{y'}, f_{y'y'}$  <sup>(1)</sup>, per tutti i punti  $(x, y)$  di un campo limitato e chiuso  $A$  del piano  $(x, y)$  e per ogni valore (reale), finito di  $y'$ . Sia poi  $C$  una curva continua, tutta appartenente al campo  $A$ , rappresentabile nella forma  $y = y(x)$ , per tutti gli  $x$  di un certo intervallo  $(a, b)$  (che potrà variare da curva a curva), con  $y(x)$  funzione assolutamente continua in tutto  $(a, b)$  e tale che l'integrale

$$I_C = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

esista finito.

Ci proponiamo di dimostrare la seguente proposizione:

*Sia l'integrale  $I_C$  quasi-regolare positivo<sup>(2)</sup> e, per tutti i punti  $(x, y)$  di  $A$  e per tutti gli  $y'$  in modulo maggiori di un certo  $Y'$ , risulti*

$$(1) \quad f(x, y, y') \geq |x - x_1|^{\alpha_1} |x - x_2|^{\alpha_2} \dots |x - x_r|^{\alpha_r} |y'|^{1+\alpha},$$

dove  $x_1, x_2, \dots, x_r$  sono  $r$  numeri fra loro distinti e  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  sono numeri  $\geq 0$ , con  $\alpha$  maggiore di tutti gli  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ . Allora, in ogni classe completa  $K$  di curve  $C$  del campo  $A$ , esiste sempre il minimo assoluto di  $I_C$ .

2. — Rammentiamo che una classe  $K$  di curve  $C$  è completa se ogni sua curva  $\bar{C}$  di accumulazione, quando risulti della forma

$$y = \bar{y}(x) \quad , \quad (\bar{a} \leq x \leq \bar{b}),$$

con  $\bar{y}(x)$  assolutamente continua in  $(\bar{a}, \bar{b})$  e tale che  $I_{\bar{C}}$  esista finito, appartiene anch'essa alla classe  $K$ .

Sia, dunque,  $K$  una classe completa di curve  $C$  del campo  $A$ , e si consideri una successione minimizzante per  $I_C$  in  $K$ , vale a dire, una successione  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  di curve di  $K$ , soddisfacenti alla condizione

$$(2) \quad I_{C_n} \leq i + \frac{1}{n},$$

$i$  essendo il limite inferiore di  $I_C$  in  $K$ , limite inferiore che è sicuramente finito, perchè, detto  $-N$  un numero negativo o nullo non superiore al minimo della funzione  $f(x, y, y')$  per tutti i punti  $(x, y)$  di  $A$  e per tutti

(1) La considerazione della derivata  $f_{y'y'}$  potrebbe essere completamente omissa.

(2) Vale a dire, sia sempre  $f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ .

gli  $y'$  tali che  $|y'| \leq Y'$ , si ha, in virtù della (1) e per ogni curva  $C$  di  $K$ ,

$$I_C \geq -N \int_C dx \geq -ND,$$

dove  $D$  indica la massima differenza fra le ascisse dei punti del campo  $A$ .

3. — Scritta nella forma

$$y = y_n(x) \quad , \quad (a_n \leq x \leq b_n),$$

la rappresentazione analitica della curva  $C_n$ , proviamo che le funzioni  $y_n(x)$ , per  $n = 1, 2, \dots$ , sono tutte ugualmente continue. A tale scopo, detti  $E_n$  e  $E'_n$  gli insiemi dei punti di  $(a_n, b_n)$  in cui è, rispettivamente,  $|y'_n(x)| \leq Y'$ , e  $|y'_n(x)| > Y'$ , abbiamo da (1)

$$\int_{E_n} f(x, y_n, y'_n) dx \geq -ND,$$

$$\int_{E'_n} f(x, y_n, y'_n) dx \geq \int_{E'_n} |x - x_1|^{\alpha_1} \dots |x - x_r|^{\alpha_r} |y'_n|^{1+\alpha} dx,$$

donde

$$I_{C_n} \geq -ND + \int_{E'_n} |x - x_1|^{\alpha_1} \dots |x - x_r|^{\alpha_r} |y'_n|^{1+\alpha} dx,$$

e, per la (2),

$$(3) \quad \int_{a_n}^{b_n} |x - x_1|^{\alpha_1} \dots |x - x_r|^{\alpha_r} |y'_n|^{1+\alpha} dx \leq i + 1 + ND + \\ + Y'^{1+\alpha} DD_1^{\alpha_1} + \dots + \alpha_r \equiv H^{1+\alpha},$$

$D_1$  essendo il massimo modulo delle differenze fra  $x_1, \dots, x_r$  e le ascisse dei punti del campo  $A$ .

Se ora indichiamo con  $x'$  e  $x''$  due ascisse qualunque dell'intervallo  $(a_n, b_n)$ , con  $x' < x''$ , dall'uguaglianza

$$y_n(x'') - y_n(x') = \int_{x'}^{x''} y'_n(x) dx$$

deduciamo, in virtù della nota disuguaglianza di Schwarz-Hölder,

$$|y_n(x'') - y_n(x')| = \left| \int_{x'}^{x''} \left\{ y'_n(x) |x - x_1|^{\frac{\alpha_1}{1+\alpha}} \dots |x - x_r|^{\frac{\alpha_r}{1+\alpha}} \right\} \left| |x - x_1|^{\frac{-\alpha_1}{1+\alpha}} \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots |x - x_r|^{\frac{-\alpha_r}{1+\alpha}} \right\} dx \right| \leq \left[ \int_{x'}^{x''} |y'_n(x)|^{1+\alpha} |x - x_1|^{\alpha_1} \dots \right. \\ \left. \dots |x - x_r|^{\alpha_r} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[ \int_{x'}^{x''} |x - x_1|^{\frac{-\alpha_1}{\alpha}} \dots |x - x_r|^{\frac{-\alpha_r}{\alpha}} dx \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

e quindi, per la (3),

$$(4) \quad |y_n(x'') - y_n(x')| \leq H \left[ \int_{x'}^{x''} |x - x_1|^{\frac{-\alpha_1}{\alpha}} \dots |x - x_r|^{\frac{-\alpha_r}{\alpha}} dx \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Pertanto, preso ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$ , e determinato un  $\delta > 0$  in modo che, per due ascisse qualunque  $\bar{x}$  e  $\bar{x}'$  comprese fra la minima e la massima ascissa dei punti del campo A e soddisfacenti alla condizione  $|\bar{x} - \bar{x}'| < \delta$ , si abbia

$$\left| \int_{\bar{x}'}^{\bar{x}} |x - x_1|^{\frac{-\alpha_1}{\alpha}} \dots |x - x_r|^{\frac{-\alpha_r}{\alpha}} dx \right| < \left( \frac{\varepsilon}{H} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}},$$

dalla (4) segue

$$|y_n(x'') - y_n(x')| < \varepsilon,$$

sotto la sola condizione che le ascisse  $x'$  e  $x''$ , appartenenti ad  $(a_n, b_n)$ , verifichino la disuguaglianza  $|x'' - x'| < \delta$ .

Con ciò è provata l'uniforme continuità delle funzioni  $y_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

4. - Dall'uniforme continuità dello  $y_n(x)$  (le quali sono poi anche tutte ugualmente limitate, essendo tutte le curve  $C_n$  contenute nel campo limitato A) segue, per una nota proposizione, che è possibile di estrarre dalla successione delle  $y_n(x)$  un'altra successione, il cui termine generale sarà indicato con  $y_m(x)$ , in modo che la curva  $y = y_m(x)$  ( $a_m \leq x \leq b_m$ ) converga uniformemente ad una curva limite continua

$$y = y_\infty(x) \quad (a_\infty \leq x \leq b_\infty),$$

la quale risulterà anch'essa tutta contenuta nel campo A.

Proviamo che la  $y_\infty(x)$  è una funzione assolutamente continua in tutto l'intervallo  $(a_\infty, b_\infty)$ .

Consideriamo, a tal fine, un qualsiasi gruppo di intervalli  $(c_i, d_i)$ , in numero finito e non sovrappontentisi di  $(a_\infty, b_\infty)$ . Numerati questi intervalli secondo l'ordine in cui essi si presentano su  $(a_\infty, b_\infty)$ , siano  $(c_1, d_1)$  e  $(c_s, d_s)$  il primo e l'ultimo. Per  $m$  sufficientemente grande,  $(a_m, b_m)$  contiene tutti i  $(c_i, d_i)$  ad esclusione al più del primo e dell'ultimo, e pertanto si ha, in forza della disuguaglianza di Schwarz-Hölder e della (3)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=2}^{s-1} \{y_m(d_i) - y_m(c_i)\} \right| = \left| \sum_{i=2}^{s-1} \int_{c_i}^{d_i} y'_m(x) dx \right| \leq \\ & \leq \left[ \sum_{i=2}^{s-1} \int_{c_i}^{d_i} |y'_m|^{1+\alpha} |x - x_1|^{\alpha_1} \dots |x - x_r|^{\alpha_r} dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[ \sum_{i=2}^{s-1} \int_{c_i}^{d_i} |x - x_r|^{-\frac{\alpha_1}{\alpha}} \dots \right. \\ & \left. \dots |x - x_r|^{-\frac{\alpha_r}{\alpha}} dx \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq H \left[ \sum_{i=2}^{s-1} \int_{c_i}^{d_i} |x - x_1|^{-\frac{\alpha_1}{\alpha}} \dots |x - x_r|^{-\frac{\alpha_r}{\alpha}} dx \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Di qui e dall'uniforme continuità delle  $y_m(x)$ , segue che, preso ad arbitrio, un  $\varepsilon > 0$ , si può determinare in corrispondenza ad esso un  $\delta > 0$ , in modo che, dalla disuguaglianza  $\sum_{i=1}^s (d_i - c_i) < \delta$ , scenda l'altra

$$\left| \sum_{i=1}^s \{y_m(d_i) - y_m(c_i)\} \right| < \varepsilon,$$

e quindi anche, passando al limite per  $m \rightarrow \infty$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^s \{y_\infty(d_i) - y_\infty(c_i)\} \right| \leq \varepsilon.$$

Così l'assoluta continuità della  $y_\infty(x)$  in  $(a_\infty, b_\infty)$  è dimostrata.

5. - Se la funzione  $f(x, y, y')$  ammettesse, sempre finita e continua, anche la derivata parziale  $f_{y'x}(x, y, y')$  e la curva  $y = y_\infty(x)$  fosse tutta costituita di punti interni al campo  $A$ , la proposizione dimostrata nel volume I, n. 170 dei miei *Fondamenti, ecc.*, assicurerebbe senz'altro, in virtù della (2), l'esistenza e la finitezza dell'integrale

$$(5) \quad \int_{a_\infty}^{b_\infty} f(x, y_\infty(x), y'_\infty(x)) dx,$$

e si avrebbe poi anche la semicontinuità inferiore dell'integrale  $I_C$  sulla  $y = y_\infty(x)$ . Le condizioni più generali in cui ci siamo posti nel n. 1 non

turbano la validità di questi fatti; ma per esserne certi occorre un ragionamento supplementare.

Dall'osservazione del n. 171 del vol. I dei citati *Fondamenti, ecc.*, segue, intanto, che esiste finito l'integrale della  $f(x, y_{\infty}(x), y'_{\infty}(x))$  esteso ad un qualsiasi intervallo parziale di  $(a, b)$  non contenente nessuno dei punti  $x_1, \dots, x_r$ , e che sull'arco della curva  $y = y_{\infty}(x)$  corrispondente ad un simile intervallo l'integrale  $I_C$  è semicontinuo inferiormente. Se dunque consideriamo un qualsiasi gruppo di intervalli (in numero finito)  $(c_i, d_i)$ , non sovrapponentisi, appartenenti ad  $(a_{\infty}, b_{\infty})$ , e non contenenti nessuno dei punti  $x_1, \dots, x_r, a_{\infty}, b_{\infty}$ , possiamo scrivere, per  $m$  sufficientemente grande,

$$\sum_{c_i} \int_{c_i}^{d_i} f(x, y_{\infty}(x), y'_{\infty}(x)) dx < 1 + \sum_{c_i} \int_{c_i}^{d_i} f(x, y_m, y'_m) dx < 1 + ND + I_{C_m}$$

e quindi

$$\sum_{c_i} \int_{c_i}^{d_i} \{f(x, y_{\infty}, y'_{\infty}) + N\} dx < 2 + 2ND + i.$$

Siccome è sempre, in tutto  $(a_{\infty}, b_{\infty})$ ,  $f(x, y_{\infty}(x), y'_{\infty}(x)) \geq -N$ , la disuguaglianza precedente mostra che la somma  $f(x, y_{\infty}(x), y'_{\infty}(x)) + N$  è integrabile su tutto  $(a_{\infty}, b_{\infty})$  e che perciò è integrabile anche

$$f(x, y_{\infty}(x), y'_{\infty}(x)),$$

vale a dire, che l'integrale (5) esiste finito. Inoltre, per uno qualunque dei gruppi di intervalli  $(c_i, d_i)$  or ora considerati, si ha che, preso ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$ , si può determinare un  $\bar{m}$  in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$\sum_{c_i} \int_{c_i}^{d_i} f(x, y_{\infty}, y'_{\infty}) dx < \varepsilon + \sum_{c_i} \int_{c_i}^{d_i} f(x, y_m, y'_m) dx,$$

per ogni  $m > \bar{m}$ . E supponendo che la lunghezza complessiva degli intervalli  $(c_i, d_i)$  sia sufficientemente prossima a quella di  $(a_{\infty}, b_{\infty})$  in modo che risulti

$$(b_{\infty} - a_{\infty}) - \sum (d_i - c_i) < \frac{\varepsilon}{N}, \quad \left| I_{C_{\infty}} - \sum_{c_i} \int_{c_i}^{d_i} f(x, y_{\infty}, y'_{\infty}) dx \right| < \varepsilon,$$

si ottiene pure

$$I_{C_{\infty}} < 3\varepsilon + I_{C_m},$$



sempre per ogni  $m > \bar{m}$ . Di qui e dalla (2) segue finalmente  $I_{C_\infty} \leq 3\varepsilon + i$ , e quindi  $I_{C_\infty} = i$ . Il teorema enunciato nel n. 1 è dunque pienamente dimostrato.

6. - Osservazione. — Se nella disuguaglianza (1) il numero  $\alpha$  non fosse maggiore di tutti gli  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , il minimo assoluto di  $I_C$  potrebbe mancare. Questo è precisamente il caso dell'integrale

$$(6) \quad \int_0^1 xy'^2 dx.$$

Nella classe di tutte le curve  $C$  del n. 1, che congiungono i punti  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$  del piano  $(x, y)$  e che appartengono, per esempio, al quadrato di vertici opposti  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ , non esiste il minimo assoluto dell'integrale (6). Consideriamo, infatti, la curva  $C_\rho$  definita da  $y = 1$  in  $(0, \rho)$ , con  $0 < \rho < 1$ , e da  $y = \lg x : \lg \rho$  in  $(\rho, 1)$ . Per essa si ha

$$\int_0^1 xy'^2 dx = \frac{1}{\lg^2 \rho} \int_\rho^1 \frac{dx}{x} = -\frac{1}{\lg \rho},$$

e perciò l'integrale (6) esteso alla  $C_\rho$  tende a 0 per  $\rho \rightarrow 0$ . Siccome poi l'integrale (6) non può mai risultare negativo, il limite inferiore  $i$  di (6), nella classe delle curve  $C$  indicata, è 0. Se il minimo assoluto esistesse, vale a dire, se, per una curva  $y = y(x)$  della classe detta, fosse

$$\int_0^1 xy'^2 dx = 0,$$

si avrebbe, quasi dappertutto in  $(0, 1)$ ,  $y'(x) = 0$  e la  $y(x)$  sarebbe costante in tutto l'intervallo e non potrebbe quindi soddisfare alle condizioni  $y(0) = 1, y(1) = 0$ .

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Su di una proprietà delle curve intuitive sghembe.*  
Nota di S. CHERUBINO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

In una mia recente Nota <sup>(2)</sup>, seguendo la via tracciata dal Severi <sup>(3)</sup>, sono riuscito a dimostrare che le curve intuitive sghembe, come quelle piane, posseggono un ordine limitato, e che limitato è anche il numero delle tangenti uscenti da ogni punto dello spazio <sup>(4)</sup> e quello delle tangenti appoggiate ad ogni retta *impropria* di  $S_3$ .

Pei piani osculatori, avevo dimostrato soltanto che sono finiti tanto il numero di quelli uscenti da ogni retta di  $S_3$ , quanto il numero di quelli che hanno una direzione comune <sup>(5)</sup>, mentre sarebbe desiderabile assodare che questi due numeri sono addirittura limitati.

Nelle righe seguenti, dimostro appunto quest'ultimo fatto, seguendo lo stesso metodo di cui mi son giovato nella Nota richiamata in principio.

1. Sia P un estremo della curva intuitiva sghemba  $\Gamma$ , se  $\Gamma$  è aperta, o un suo punto qualunque, se  $\Gamma$  è chiusa. Sappiamo <sup>(6)</sup> che partendo da P, in uno dei due versi di  $\Gamma$ , si può staccare su  $\Gamma$  un arco elementare <sup>(7)</sup> PM: di più, se convenientemente impicciolito, questo arco può suporsi proiettantesi ortogonalmente, in modo biunivoco, sulla tangente in un suo punto (ad es. in P). A partire da M, si può staccare, nello stesso verso, un secondo arco elementare MM', proiettantesi ortogonalmente in modo biunivoco sulla tangente in un suo punto (ad es. in M). E così di seguito (insomma, a partire da ogni punto interno di  $\Gamma$  si può staccare, da una parte e dall'altra, un arco elementare proiettantesi biunivocamente sulla tan-

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) S. CHERUBINO, *Sulle curve intuitive sghembe*. [«Giorn. di Matem.», vol. 69 (1931)].

(3) F. SEVERI, *Le curve intuitive*. [«Rend. del Circ. Mat. di Palermo», vol. 54 (1930)].

(4) Benchè per un punto generico dello spazio non passi alcuna tangente ad una curva sghemba, non ci si può esimere dall'esaminare se il numero delle tangenti per un punto *qualunque* è, oppure no, limitato.

(5) Nella b) del n. 10 della mia Nota cit. (2), deve ovviamente parlarsi soltanto di punti impropri e non di *ogni* punto esteriore a  $\tilde{C}$ . Analogamente, nel n. 11, ci si deve circoscrivere alle sole rette improprie. Tanto perchè il corollario V, in fine al n. 8, è da sopprimere; quindi nella proposizione a) del n. 9 va soppresso il punto 6 e vanno considerate soltanto rette improprie: così pure nella b).

(6) Nota cit. (2), n. 7 b).

(7) Per la definizione di arco elementare, vedi nota cit. (2), n. 7.

gente in un suo punto). Ripetendo il ragionamento di cui alla proposizione b) del n. 7 della Nota citata <sup>(1)</sup>, si riconosce che, con un numero finito di tali operazioni, si esaurisce la curva  $\Gamma$ , cioè si raggiunge l'altro estremo  $Q$ , oppure, se  $\Gamma$  è chiusa, si ritorna in  $P$ .

2. Sia  $n$  il numero degli archi ottenuti con una divisione qualunque di  $\Gamma$  in archi elementari ciascuno proiettantesi biunivocamente sulla tangente in un punto dell'arco stesso. Dico che, ad ogni direzione dello spazio  $S$ , in cui è immersa  $\Gamma$ , appartengono, *al più*,  $3n$  piani osculatori della curva: precisamente, non più di 3 per ciascun arco parziale.

Infatti, consideriamo uno  $\Gamma_i$  di questi  $n$  archi e riferiamolo a tre assi coordinati ortogonali, di cui quello delle  $x$  coincide, oppure è parallelo, alla tangente sulla quale  $\Gamma_i$  si proietta ortogonalmente in modo biunivoco. La rappresentazione parametrica (regolare) di  $\Gamma_i$  riuscirà allora del tipo

$$(1) \quad x = v, \quad y = y(v), \quad z = z(v);$$

il piano osculatore in un punto qualunque  $P_i(v_i) = (x_i, y_i, z_i)$  avrà l'equazione

$$(2) \quad A_i(x - x_i) + B_i(y - y_i) + C_i(z - z_i) = 0$$

con

$$(3) \quad A_i = y'_i z''_i - y''_i z'_i, \quad B_i = -z''_i, \quad C_i = y''_i$$

e la torsione nello stesso punto acquisterà il valore

$$(4) \quad \frac{I}{T_i} = - \frac{y''_i z'''_i - y'''_i z''_i}{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}.$$

Poichè  $\Gamma_i$  è elementare, quindi privo di flessi, il numeratore di quest'ultima espressione, in ogni punto interno di  $\Gamma_i$ , non è mai nullo, nè infinito, mentre il denominatore è sempre  $\neq 0$ .

Ciò posto, supponiamo che nei 4 punti distinti  $P_1(v_1), P_2(v_2), P_3(v_3), P_4(v_4)$ , succedentisi su  $\Gamma_i$  in quest'ordine, si abbiano 4 piani osculatori possedenti una direzione a comune. Questa direzione si assegnerà con una quaterna di numeri  $(x_0, y_0, z_0, 0)$  di cui il quarto è zero. Notiamo subito che  $y_0$  e  $z_0$  non possono essere contemporaneamente nulli, poichè altrimenti la direzione data sarebbe quella dell'asse delle  $x$ , cioè di una tangente a  $\Gamma_i$ , e questa risulterebbe parallela a quattro piani osculatori, di cui almeno uno osculerà  $\Gamma_i$  in un punto distinto dal punto di contatto di quella tangente, il che è impossibile, perchè  $\Gamma_i$  è elementare <sup>(2)</sup>.

(1) S. CHERUBINO, loc. cit.

(2) Cfr. il n. 8 della Nota cit. (2). Si tenga anche presente che in ogni punto di  $\Gamma$  vi è uno ed un solo piano osculatore.

Se  $x_0 \neq 0$ , si può supporre  $x_0 = 1$  e, sostituendo le coordinate di questa direzione nella (2), si hanno le 4 relazioni

$$(5) \quad A_i + B_i y_0 + C_i z_0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Supponendo  $A_i \neq 0$ , per  $i = 1, 2, 3, 4$ , queste si scrivono anche

$$(5^*) \quad 1 + M_i y_0 + N_i z_0 = 0, \quad M_i = \frac{B_i}{A_i}, N_i = \frac{C_i}{A_i}$$

e da esse si ricavano le altre

$$(5^{**}) \quad \begin{cases} (M_2 - M_1) y_0 + (N_2 - N_1) z_0 = 0 \\ (M_3 - M_2) y_0 + (N_3 - N_2) z_0 = 0 \\ (M_4 - M_3) y_0 + (N_4 - N_3) z_0 = 0. \end{cases}$$

Le (5<sup>\*</sup>) ci assicurano che, oltre  $y_0, z_0$ , anche  $M_i, N_i$  non sono contemporaneamente nulli. Supponendo, ad es.,  $y_0 \neq 0$  ed  $N_2 \neq N_1, N_3 \neq N_2, N_4 \neq N_3$ , dalle (5<sup>\*\*</sup>) si deduce che

$$(6) \quad \frac{M_2 - M_1}{N_2 - N_1} = \frac{M_3 - M_2}{N_3 - N_2} = \frac{M_4 - M_3}{N_4 - N_3} = - \frac{z_0}{y_0}.$$

Indicando con  $M'_i, N'_i$  le derivate di  $M_i, N_i$  rispetto a  $v_i$ , ed applicando il teorema di Cauchy sugli accrescimenti finiti, si ha

$$(6^*) \quad \frac{M'(u_1)}{N'(u_1)} = \frac{M'(u_2)}{N'(u_2)} = \frac{M'(u_3)}{N'(u_3)} = - \frac{z_0}{y_0}$$

ove il significato dei simboli  $M, N$  è evidente ed  $u_1, u_2, u_3$  sono numeri rispettivamente *interni* agl'intervalli  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$  e danno quindi luogo a tre punti  $Q_1, Q_2, Q_3$  *interni* all'arco  $\Gamma_1$ .

Tenendo presenti i valori di  $M_i, N_i$ , queste (6<sup>\*</sup>) diventano

$$(6^{**}) \quad \frac{\gamma'(u_1)}{y'(u_1)} = \frac{\gamma'(u_2)}{y'(u_2)} = \frac{\gamma'(u_3)}{y'(u_3)} = \frac{z_0}{y_0},$$

e da esse seguono le relazioni

$$\frac{\gamma'(u_2) - \gamma'(u_1)}{y'(u_2) - y'(u_1)} = \frac{\gamma'(u_3) - \gamma'(u_2)}{y'(u_3) - y'(u_2)} = \frac{z_0}{y_0},$$

dalle quali, col solito teorema di Cauchy, si ottiene

$$(6^{***}) \quad \frac{\zeta''(w_1)}{y''(w_1)} = \frac{\zeta''(w_2)}{y''(w_2)} = \frac{\zeta_0}{y_0},$$

con  $w_1, w_2$  interni agl'intervalli  $(u_1, u_2), (u_2, u_3)$ . Da queste relazioni, infine, col teorema di Rolle, si deduce che per un valore  $w$  compreso fra  $w_1$  e  $w_2$ , estremi esclusi, si ha

$$\left[ \frac{d}{dv} \left( \frac{\zeta''}{y''} \right) \right]_{v=w} = 0$$

ossia

$$(7) \quad y''(w) \cdot \zeta'''(w) - y'''(w) \cdot \zeta''(w) = 0.$$

Cioè, nel punto interno a  $\Gamma_1$  corrispondente a  $v = w$ ,  $\Gamma_1$  possiederebbe un flesso, ciò che è escluso.

Se fosse, ad es.  $N_2 = N_1$ , sempre rimanendo  $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, y_0 \neq 0$ , dalla prima delle (5\*\*) si avrebbe anche  $M_2 = M_1$ , cioè, in pari tempo

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\zeta_2''}{y_2' \zeta_2'' - y_2'' \zeta_2'} = \frac{\zeta_1''}{y_1' \zeta_1'' - y_1'' \zeta_1'} \\ \frac{y_2''}{y_2' \zeta_2'' - y_2'' \zeta_2'} = \frac{y_1''}{y_1' \zeta_1'' - y_1'' \zeta_1'} \end{array} \right.$$

Da queste si ha che  $y_1'', y_2'', \così \zeta_1'', \zeta_2''$ , sono contemporaneamente nulle o non nulle: nè queste 4 derivate possono annullarsi insieme, altrimenti si avrebbe  $A_1 = A_2 = 0$ , il che è stato escluso. Sarà dunque, ad es.,  $y_1'' \neq 0$ , quindi  $y_2'' \neq 0$  e da queste (8) si deduce che

$$\frac{\zeta_2''}{y_2''} = \frac{\zeta_1''}{y_1''}$$

onde, pel teorema di Rolle, esiste un punto  $v = w$ , interno all'intervallo  $(v_1, v_2)$ , pel quale vale ancora la (7).

Analogamente si conclude, se  $N_3 = N_2$  od  $N_4 = N_3$  (con  $y_0$  e le corrispondenti  $A_i$  non nulle).

Poniamo ora che qualche  $A_i$ , ad es.  $A_1$ , sia nulla. Allora la prima delle (5) diventa

$$(9) \quad B_1 y_0 + C_1 \zeta_0 = 0$$

ossia, posto  $y_0 \neq 0$ ,

$$(9^*) \quad \frac{\zeta_1''}{y_1''} = \frac{\zeta_0}{y_0}$$



a meno che non sia  $C_1 = y_1'' = 0$ , il che porterebbe anche  $B_1 = -z_1'' = 0$  e quindi all'annullamento del denominatore di  $\frac{1}{T_1}$ , il che è impossibile.

Se le altre  $A_i, i = 2, 3, 4$ , non sono nulle, nelle (6)-(6\*) manca solo il primo membro, ma nelle (6\*\*\*) esso è ripristinato mediante la (9\*), cioè per  $w_1 = v_1$ , quindi la conseguenza dedotta resta inalterata.

Analogamente qualora si annulli qualche altra  $A_i$  (insieme o separatamente da  $A_1$ ) restando diverso da zero  $y_0$ .

Infine, nella quaterna  $(x_0, y_0, z_0, 0)$ , può supporre  $x_0 = 0$ , ma  $y_0$  (oppure  $z_0$ ) necessariamente non nullo.

Sostituendo nelle (2), si ha

$$(10) \quad B_i y_0 + C_i z_0 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

e da queste, tenendo presenti le (3), si deduce

$$(11) \quad \frac{z_i''}{y_i''} = \frac{z_0}{y_0},$$

oppure  $C_i = B_i = 0$ , ossia

$$z_i'' = y_i'' = 0,$$

quindi anche  $A_i = 0$ , il che si è visto impossibile.

Dunque le (11) valgono per ogni  $i$  ( $= 1, 2, 3, 4$ ) quindi, per la solita ragione, fra  $v_1$  e  $v_2$  (così pure fra  $v_2$  e  $v_3$  e fra  $v_3$  e  $v_4$ ) vi è un numero  $w$  per cui vale la (7), cioè  $\Gamma_1$  ammetterebbe flessi in punti interni.

Tutte le eventualità sono così esaurite e si conclude che  $\Gamma_1$  non può ammettere più di tre piani osculatori aventi una direzione in comune.

Dal fatto che per ogni direzione di  $S_3$  passano non più di  $3n$  piani osculatori di  $\Gamma$ , segue ovviamente che è limitato ( $\leq 3n$ ) anche il numero dei piani osculatori uscenti da ogni retta dello spazio <sup>(1)</sup>.

(1) Si osservi che l'intero  $n$ , essendo inferiormente limitato (dall'unità positiva) ha certo un minimo. Tuttavia, anche assumendo  $n$  eguale a questo minimo, la dimostrazione precedente non ci autorizza ad affermare che il numero  $3n$  è il massimo numero di piani osculatori uscenti da un punto improprio di  $S_3$ . Questo problema resta dunque aperto insieme a quello dell'estensione della proprietà dimostrata ai punti al finito.

**Matematica.** — *Quelques nouvelles notions infinitesimales directes.*  
Nota di J. MIRGUET, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La première de ces notions est le *biparatingent*, en abrégé *biptg*, dont la définition est très analogue à celle du *paratingent* (*ptg*): en un point d'accumulation *O* d'un ensemble *E* le *biptg* est l'ensemble des plans qui sont limites des directions de triplets dont les trois sommets sont des points de *E* qui tendent simultanément vers *O*, *sans être alignés*. A l'exemple du *ptg*, le *biptg* possède la semi-continuité supérieure d'inclusion <sup>(2)</sup>.

Entre *ptg* et *biptg* d'un même ensemble existant les liaisons exprimées par les propositions suivantes :

*a)* Une *paratingente*, non introduite dans le *ptg* par une infinité de points alignés, se trouve dans au moins un plan *biparatingent*.

*b)* Sur un plan *biparatingent* se trouve au moins une *paratingente*.

Il n'y a cependant pas identité du *biptg* et de l'ensemble qui ferme celui des plans d'interjonction des *paratingentes*, plus précisément :

*c)* Le plan de deux *paratingentes* n'appartient pas nécessairement au *biptg*.

*d)* Par une même *paratingente* il peut passer un nombre fini et même une infinité de plans *biptg* ne contenant pas d'autre *paratingente* que la *paratingente* commune.

L'étude du *biptg* ne fait donc pas double emploi avec celle des *paratingentes*; au surplus certaines propriétés simples du *biptg* (Exemple: laisser échapper au moins un plan passant par *O*) ne peuvent se traduire par aucune propriété simple du *ptg*. Le *biptg* offre donc matière à recherches.

Toutefois la moindre restriction apportée à la structure du *biptg* influence notablement la structure de *E*: Soit un ensemble à *biptg* incomplet, c'est-à-dire dont certains plans issus de *O* sont exclus; supposons que le *ctg* englobe deux *demitangentes* distinctes situées d'un même côté d'un plan *P* exclu et dont chacune est introduite dans le *ctg* par un continu inclus dans *E*, toutes les *demi-tangentes* de *E* situées du même côté de *P* sont dans le plan des deux premières <sup>(3)</sup>. En revanche cette structure du *ctg*, pourtant

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) BOULIGAND, *Sur l'idée d'ensemble d'accumulation*. (« L'Enseignement Mathématique », année 1931, pp. 243-247).

(3) Voici un résultat analogue: si *E* englobe une portion *AOB* de droite, située en dehors d'un plan contenant la *demi-tangente* *OT* et exclu du *biptg*, *E* est plan à l'intérieur d'une sphère de centre *O*.

si simple, ne suffit pas pour assurer l'exclusion de certains plans; ainsi, le biptg d'une sphère passant par O est complet.

Les ensembles à biptg complet, très nombreux d'après les remarques précédentes, peuvent se classer au moyen de sous-ensembles du biptg. Parmi ceux-ci les biptg d'ordre supérieur ont été signalés <sup>(1)</sup>; on aperçoit aussi le *paracontingent*, ensemble des plans qui sont limites des directions de triplets dont un sommet est le point O, les deux autres deux points de l'ensemble tendant simultanément vers O sans être jamais alignés avec O.

Le paracontingent, d'après son mode de définition et certaines propriétés (exemple: le fait de ne pas posséder la semicontinuité supérieure d'inclusion) joue par rapport au biptg un rôle rappelant le rôle du ctg par rapport au ptg.

Mais il y a des propriétés du paractg qui le rapprochent du ptg. Je citerai, comme exemple, les formules de réunion: on connaît l'égalité concernant le ctg d'une réunion

$$\text{ctg}(a \dot{+} b) = \text{ctg } a \dot{+} \text{ctg } b.$$

L'égalité analogue relative au ptg s'écrit

$$\text{ptg}(a \dot{+} b) = \text{ptg } a \dot{+} \text{ptg } b \dot{+} \text{ptg}(a/b)$$

où le dernier terme symbolise le *ptg mutuel*, ensemble des droites qui sont limites des directions de doublets dont une extrémité est sur *a*, l'autre sur *b* et tendent simultanément vers le point d'accumulation commun.

Or, si l'on cherche la formule du même genre convenant au paractg on voit qu'il existe un *paractg mutuel*, ensemble des plans qui sont limites des directions de triplets dont un sommet est O, l'autre sur *a*, l'autre sur *b*. Il faut donc écrire une formule semblable à la formule du ptg et non à celle du ctg, à savoir:

$$\text{paractg}(a \dot{+} b) = \text{paractg } a \dot{+} \text{paractg } b \dot{+} \text{paractg}(a/b).$$

Signalons les généralisations de ces formules pour les ptg, paractg et biptg d'ordre supérieur où s'introduisent différents éléments mutuels des divers ordres; parmi elles figurent les règles suivantes où ces éléments mutuels ne sont qu'implicites: « Le ptg (ou le paractg) d'ordre *n* d'une réunion de *n + 2* ensembles est la réunion des *n + 2* ptg (ou paractg) d'ordre *n* de ces ensembles pris *n + 1* à *n + 1* ». « Le biptg d'ordre *n* d'une réunion de *n + 3* ensembles est la réunions des *n + 3* biptg d'ordre

(1) BOULIGAND, *Sur quelques points de méthodologie géométrique*. « Revue générale des Sciences », année 1930, p. 602.

$n$  des réunions de ces ensembles  $n + 2$  à  $n + 2$  », règles qui englobent cette formule de M. Bouligand,

$$\text{ptg}(a \dot{+} b \dot{+} c) = \text{ptg}(a \dot{+} b) \dot{+} \text{ptg}(b \dot{+} c) \dot{+} \text{ptg}(c \dot{+} a).$$

Observons encore que le ptg mutuel est aussi un instrument d'étude des réunions d'ensembles ou des décompositions d'un même ensemble. Citons à l'appui le problème: « Deux continus ayant un point commun, exprimer que le ptg mutuel y comprend une seule droite ». La solution est simplifiée par cette remarque: le ptg mutuel englobe le ctg de la réunion; donc, ici, le ctg de la réunion doit être porté par une seule droite; chacun des deux ensembles a donc, au plus, deux demi-tangentes et s'il en a deux elles sont opposées. En rapprochant cela de propriétés connues des continus on arrive à cet énoncé: Si le ptg mutuel de deux ensembles se réduit à une seule droite et que l'un des deux ensembles au moins soit continu, ce dernier ensemble n'a qu'une seule demi-tangente; l'autre ensemble, continu ou non, ne présente que la seule demi-tangente opposée. C'est d'ailleurs le seul cas où le ptg mutuel d'une réunion, où figure un continu, ait un nombre fini de droites.

Soit encore le problème: « Deux continus ayant un point commun, exprimer que le ptg mutuel est tout entier situé dans un même plan ». Comme précédemment on voit que tout le ctg de la réunion est situé dans ce plan. Certaines conditions suffisantes sont ensuite évidentes: Si les deux ensembles n'ont aucune demi-tangente commune le ptg mutuel est tout entier dans le plan du ctg; même conclusion si toute tangente commune comporte pour chaque ensemble un demi-plan d'osculation unique, situé dans le plan du ctg et distinct du demi-plan de l'autre ensemble.

On peut employer le ptg mutuel dans un autre genre de questions: supposons tout point de  $a$  de coordonnées cartésiennes constantes par rapport à un trièdre rectangulaire fixe d'origine  $O$  et tout point de  $b$  de coordonnées cartésiennes constantes par rapport à un trièdre rectangulaire mobile d'origine  $O$ . Quand le trièdre mobile varie, ptg  $a$  et ptg  $b$  restent intrinséquement les mêmes mais non ptg  $(a/b)$  dans le cas général; l'étude des variations de ptg  $(a/b)$  contribue à celle du mouvement relatif de  $b$  par rapport à  $a$ . Ces variations ne dépendent pas seulement des variations du trièdre mobile, mais de la nature des ensembles.

On demand, par exemple, d'étudier la nature du mouvement relatif de deux continus où le ptg mutuel demeure une droite unique. Pour cela il faut et il suffit que chaque continu ait une seule demi-tangente en  $O$  et que ces deux demi-tangentes demeurent opposées; donc toute rotation de  $b$  autour de la droite du ptg mutuel est possible.

**Meccanica.** — *Sull'instabilità dei vortici elicoidali.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Nella sua Memoria sull'attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi<sup>(2)</sup> il prof. T. Levi-Civita ha studiato le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso intorno ad una possibile forma rigida, accertando la stabilità dei filetti circolari. In questa Nota mi propongo di dimostrare l'*instabilità* dei filetti elicoidali ed a tale scopo basta assicurarsi su un esempio che un vortice *inizialmente* prossimo ad un'elica non si mantenga tale al crescere indefinitamente del tempo. Si tratta, in verità, di instabilità futura, ma, per la reversibilità del fenomeno di moto, tale instabilità vale anche *in passato*.

2. Se  $c$  e  $\gamma$  sono le due curvature di un filetto, funzioni dell'ascissa curvilinea  $s$  e di una variabile  $t$  proporzionale al tempo, le equazioni differenziali cui debbono soddisfare  $c$  e  $\gamma$  sono

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{c} = (c\gamma)' + c'\gamma \\ \dot{\gamma} = \left(\gamma^2 - \frac{c''}{c}\right)' - c\gamma', \end{cases}$$

dove il punto sovrapposto indica derivazione rispetto a  $t$  e l'apice derivazione rispetto ad  $s$  (cfr. Levi-Civita, Mem. cit., p. 50).

Se  $c_0(s), \gamma_0(s)$  individuano un particolare filetto rigido, i secondi membri delle (S) sono identicamente nulli per  $c = c_0, \gamma = \gamma_0$ . Allora se poniamo

$$\begin{aligned} c(s, t) &= c_0(s) + \varepsilon(s, t) \\ \gamma(s, t) &= \gamma_0(s) + \eta(s, t) \end{aligned}$$

e consideriamo  $\varepsilon$  ed  $\eta$  come quantità del 1° ordine, le equazioni alle variazioni delle (S), relative alla soluzione  $(c_0, \gamma_0)$  sono

$$(S') \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon} = (c_0\eta + \gamma_0\varepsilon)' + c_0'\eta + \gamma_0'\varepsilon \\ \dot{\eta} = \left(2\gamma_0\eta - \frac{\varepsilon''}{c_0} + \frac{c_0''}{c_0^2}\varepsilon\right)' - (c_0\varepsilon)'. \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 20 marzo 1932.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi*, « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », serie 2<sup>a</sup>, vol. 1, 1932.



Supponiamo ora  $c_0$  e  $\gamma_0$  costanti, talchè il filetto intorno a cui si vogliono studiare le oscillazioni è elicoidale e poniamo, per semplicità di scrittura,  $c_0 = 1$ . Il sistema (S') diventa

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \eta' + 2\gamma_0 \varepsilon' \\ \dot{\eta} = 2\gamma_0 \eta' - \varepsilon'' - \varepsilon' \end{cases}$$

Derivando la prima di queste equazioni rispetto a  $t$ , la seconda rispetto ad  $s$  ed eliminando la  $\eta$ , si ha l'equazione in  $\varepsilon$

$$(E) \quad \ddot{\varepsilon} - 4\gamma_0 \dot{\varepsilon}' + (1 + 4\gamma_0^2) \varepsilon'' + \varepsilon^{IV} = 0.$$

Quest'equazione è del 4° ordine, lineare, omogenea, a coefficienti costanti; ad essa sono oramai rivolte le nostre considerazioni, poichè trattandosi di provare la instabilità del filetto elicoidale, basterà far vedere che si può soddisfare la (E) con una funzione  $\varepsilon(s, t)$ , la quale sia diversa da zero soltanto entro un arco finito  $\alpha \leq s \leq \beta$  del filetto elicoidale, eppure non rimanga limitata per  $t \rightarrow +\infty$ . Ma perchè una soluzione di questo tipo sia accettabile dal punto di vista meccanico (allo scopo cioè di costruire una particolare soluzione della (E) che non presenti in qualche modo carattere d'artificio, ma sia in tutto rispondente a quelle condizioni di regolarità insite nella natura dei fenomeni meccanici), dovremo imporre alla  $\varepsilon(s, t)$  alcune condizioni di comportamento qualitativo.

E precisamente, trattandosi di integrali di una equazione (E) alle derivate parziali, in cui figurano esplicitamente le derivate  $\ddot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}', \varepsilon^{IV}$ , sarà necessario ammetterne l'esistenza (almeno generalmente), il che implica la *continuità incondizionata* (nel campo di valori di cui si tratta) *delle derivate d'ordine precedente*, ossia

$$\dot{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''.$$

Noi faremo anche di più, richiedendo addirittura che rimangano continue anche le derivate temporali di  $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ . Imporremo cioè specificamente alla  $\varepsilon(s, t)$  ed alle sue tre prime derivate rispetto ad  $s, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ , di annullarsi nei punti  $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ , insieme con le loro derivate temporali.

3. Cominciamo col procurarci una soluzione di (E) del tipo esponenziale

$$\varepsilon = e^{\lambda t + \mu s}.$$

Si trova l'equazione in  $\lambda, \mu$

$$\lambda^2 - 4\gamma_0 \mu \cdot \lambda + \mu^2 (1 + \mu^2 + 4\gamma_0^2) = 0,$$

che risolta rispetto a  $\lambda$ , dà

$$\lambda = 2\gamma_0 \mu \pm i\mu \sqrt{\mu^2 + 1}.$$

Un integrale della (E), dipendente dal parametro  $\mu$ , è dunque

$$(1) \quad \varepsilon(s, t) = e^{\mu s} q(t, \mu),$$

avendo posto

$$q(t, \mu) = e^{2\gamma_0 \mu t} \cos(\mu \sqrt{\mu^2 + 1} t).$$

Consideriamo un certo numero  $n$  di valori di  $\mu, \mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), positivi e disposti in ordine crescente ( $n$  essendo un intero *a priori* arbitrario che ci riserviamo di fissare in modo opportuno). Poniamo

$$q_k(t) = q(t, \mu_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Le funzioni  $e^{\mu_k s} q_k(t)$  sono soluzioni della (E) e ne è soluzione anche una loro combinazione lineare di moltiplicatori (costanti)  $c_k$ . Si ha così l'integrale

$$(2) \quad \varepsilon(s, t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\mu_k s} q_k(t),$$

dovendosi scegliere il numero intero  $n$  e subordinatamente determinare le  $n$  costanti  $c_k$  in modo che si abbia

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\alpha, 0) = \varepsilon(\beta, 0) = 0 \\ \dot{\varepsilon}(\alpha, 0) = \dot{\varepsilon}(\beta, 0) = 0 \\ \dot{\varepsilon}'(\alpha, 0) = \dot{\varepsilon}'(\beta, 0) = 0 \\ \dot{\varepsilon}''(\alpha, 0) = \dot{\varepsilon}''(\beta, 0) = 0 \\ \dot{\varepsilon}'''(\alpha, 0) = \dot{\varepsilon}'''(\beta, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'(\alpha, 0) = \varepsilon'(\beta, 0) = 0 \\ \varepsilon''(\alpha, 0) = \varepsilon''(\beta, 0) = 0 \\ \varepsilon'''(\alpha, 0) = \varepsilon'''(\beta, 0) = 0. \end{array} \right.$$

Imponendo queste condizioni all'integrale (2) e, notando che

$$q_k(0) = 1, \quad \dot{q}_k(0) = 2\gamma_0 \mu_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

si hanno sedici equazioni lineari nelle  $c_k$ , di cui le sei provenienti dal gruppo (4) sono già comprese nelle dieci provenienti dal gruppo (3) e che sono precisamente

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n c_k e^{\mu_k \alpha} = 0, \quad \sum_{k=1}^n c_k \mu_k e^{\mu_k \alpha} = 0, \quad \sum_{k=1}^n c_k \mu_k^2 e^{\mu_k \alpha} = 0, \\ \sum_{k=1}^n c_k \mu_k^3 e^{\mu_k \alpha} = 0, \quad \sum_{k=1}^n c_k \mu_k^4 e^{\mu_k \alpha} = 0$$

ed analoghe ove si ponga  $\beta$  invece di  $\alpha$ .

Poichè si tratta di dieci equazioni, sarà opportuno prendere  $n = 11$ , assumendo in pari tempo  $c_{11} = 1$ , con che rimangono univocamente deter-

minate le altre dieci  $c_k$  quante volte sia diverso da zero il determinante D dei loro coefficienti. Tale determinante è

$$D = \begin{vmatrix} e^{\mu_1 \alpha} & \dots & e^{\mu_{10} \alpha} \\ e^{\mu_1 \beta} & \dots & e^{\mu_{10} \beta} \\ \mu_1 e^{\mu_1 \alpha} & \dots & \mu_{10} e^{\mu_{10} \alpha} \\ \mu_1 e^{\mu_1 \beta} & \dots & \mu_{10} e^{\mu_{10} \beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^4 e^{\mu_1 \alpha} & \dots & \mu_{10}^4 e^{\mu_{10} \alpha} \\ \mu_1^4 e^{\mu_1 \beta} & \dots & \mu_{10}^4 e^{\mu_{10} \beta} \end{vmatrix}$$

e mostriamo che esso è diverso da zero, almeno se  $\beta$  è sufficientemente prossimo ad  $\alpha$ .

A tale scopo, poniamo  $\beta - \alpha = h$ , così che

$$e^{\mu_k \beta} = e^{\mu_k \alpha} (1 + \mu_k h + \frac{1}{2} \mu_k^2 h^2 + \dots).$$

Fissato il valore di  $\alpha$ , il determinante D risulta una funzione di  $h$ , la quale è trascendente intera, poichè si ottiene dalla funzione esponenziale applicando sole operazioni razionali intere. Si ha

$$D(h) = e^{\alpha \sum_{k=1}^{10} \mu_k} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 + \mu_1 h + \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1 & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1 + \mu_1^2 h + \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^4 & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^4 + \mu_1^5 h + \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

dove nelle colonne successive vanno poste quantità analoghe a quelle della prima colonna.

Spingendosi nello sviluppo esponenziale fino al termine di ordine 9 ed effettuando evidenti riduzioni sulle righe, si ottiene

$$D(h) = K h^{10} e^{\alpha \sum_{k=1}^{10} \mu_k} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{10} \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^9 & \mu_2^9 & \dots & \mu_{10}^9 \end{vmatrix} + \dots,$$

essendo K una costante numerica non nulla,

Il determinante di Vandermonde che comparisce al secondo membro è diverso da zero per l'ipotesi fatta sulle  $\mu$  e si vede così che  $D(h)$  è un infinitesimo di ordine 10 per  $h \rightarrow 0$ .

Dunque, per  $|h| > 0$  e sufficientemente piccolo, si ha certo  $D(h) \neq 0$ . Perciò il sistema (5), in cui già si è posto  $c_{11} = 1$ , è senz'altro risolubile rispetto a  $c_1, c_2, \dots, c_{10}$  con la regola del Cramer.

Ponendo i valori così definiti per le  $c$ , si ha

$$\varepsilon(s, t) = e^{2\gamma_0 \mu_{11} t} \left[ e^{\mu_{11} t} \cos(\mu_{11} \sqrt{\mu_{11}^2 + 1} t) + \right. \\ \left. + \sum_k^{10} c_k e^{\mu_k s} e^{-2\gamma_0 (\mu_{11} - \mu_k) t} \cos(\mu_k \sqrt{\mu_k^2 + 1} t) \right].$$

Questo è l'integrale cercato della (E), poichè, supponendo per fissare le idee,  $\gamma_0 > 0$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_k^{10} c_k e^{\mu_k s} e^{-2\gamma_0 (\mu_{11} - \mu_k) t} \cos(\mu_k \sqrt{\mu_k^2 + 1} t) = 0,$$

mentre l'esponenziale  $e^{2\gamma_0 \mu_{11} t}$  cresce indefinitamente per  $t \rightarrow +\infty$ .

Se fosse  $\gamma_0 < 0$ , basterebbe supporre che  $\mu_{11}$  fosse la più piccola, anzichè la più grande, delle  $\mu$ .

**Meccanica.** — *Sulla riduzione di rango dei sistemi canonici mediante integrali generici.* Nota di G. D. MATTIOLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La conoscenza di  $m$  integrali primi *in involuzione* per un sistema canonico, permette, notoriamente (teorema di Lie), di abbassarne il rango di  $2m$  unità; in quanto al sistema dato d'ordine  $n$  è sostituibile l'insieme di un altro sistema pure canonico d'ordine  $n - m$  e di ulteriori  $m$  equazioni che possono poi essere ridotte in altrettante incognite. Quali possibilità di riduzione di rango si hanno, e con i minimi mezzi analitici, quando gli  $m$  integrali noti *non* sono in involuzione?

In questa Nota dimostro: 1° che certe equazioni del sistema ridotto mediante eliminazione di  $m$  variabili  $p$  formano — a loro sole — un sistema ai differenziali totali *illimitatamente integrabile*; 2° che è possibile sostituire a tale sistema completo un sistema canonico, quando gli integrali dati siano ridotti alla forma canonica di Lie.

1. Le equazioni di Hamilton si possono anche presentare, notoriamente, come il *primo sistema di Pfaff* (o *sistema associato*) della forma lineare

$$(1) \quad \omega = \sum_1^n p_i dq_i - H(p|q) dt.$$

Supponiamo noti per il problema caratterizzato dalla  $H(p|q)$  — che supporremo indipendente dal tempo —  $m$  integrali primi,

$$(2) \quad f_r(p|q) = c_r, \quad r = 1 \cdot 2 \cdots m,$$

indipendenti e generici: anche *non* in involuzione, quindi; tra i quali ammettiamo sia contenuto pure l'integrale dell'energia  $H = E$ , che faremo anzi corrispondere al valore  $r = m$  dell'indice  $r$ . Si ha dunque  $c_m = E$ .

Le (2) siano risolubili rispetto ad  $m$  delle  $p$ : ad es. nel modo seguente:

$$(3) \quad p_j = \Phi_j(p_{m+1} \cdots p_n | q | c_r), \quad j = 1 \cdot 2 \cdots m.$$

Lasciando da parte, per un momento, la circostanza che le  $c_r$  sono delle costanti d'integrazione (e che sarà fatta intervenire più tardi), in-

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.



terpretiamo le precedenti (3) come formule di trasformazione che sostituiscono alle  $p_j$  l'ugual numero di nuove variabili  $c_r$ , conservando tutte le rimanenti  $p_{m+1} \dots p_n, q_i$ : allora le originarie equazioni canoniche saranno sostituite dal sistema associato alla forma  $\omega$  trasformata mediante le (3); che risulterà essere, quindi, un particolare sistema *pfaffiano* secondo Birkhoff<sup>(1)</sup>. Eliminate dunque le  $p_j, j = 1, 2, \dots, m$  nella  $\omega$  — ove si noti che essendo  $H(p|q) = E$  compreso nelle (2), ad eliminazione eseguita  $H(p|q)$  diventa  $E (\equiv c_m)$  — dobbiamo partire dalla nuova forma lineare

$$(1') \quad \sum_1^m \Phi_j (p_{m+1} \dots p_n | q_i | c_r) dq_j + \sum_1^{n-m} p_{m+\alpha} dq_{m+\alpha} - E dt$$

e ricavarne il relativo sistema associato.

Il covariante bilineare della (1') è:

$$(4) \quad \sum_1^{n-m} \left[ \left( -dp_{m+\alpha} + \sum_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{m+\alpha}} dq_j \right) \delta q_{m+\alpha} + \left( dq_{m+\alpha} + \sum_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_{m+\alpha}} dq_j \right) \delta p_{m+\alpha} \right] + \\ + \sum_1^m \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_e} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial q_j} \right) dq_j - \sum_1^{n-m} \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial p_{m+\alpha}} dp_{m+\alpha} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial q_{m+\alpha}} dq_{m+\alpha} \right) - \right. \\ \left. - \sum_r \frac{\partial \Phi_e}{\partial c_r} dc_r \right] \delta q_e + \sum_r \sum_1^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial c_r} dq_j \delta c_r + \left( \sum_1^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial E} dq_j - dt \right) \delta E + dE \delta t,$$

ed il sistema differenziale richiesto si ha senz'altro annullando tutti i coefficienti dei differenziali  $\delta$ , che, per brevità, scriveremo subito nella forma che esso acquista dopo eliminazione dei  $dp_{m+\alpha}, dq_{m+\alpha}$  mediante le prime equazioni, in quelle che provengono dai coefficienti dei  $\delta q_e$ :

$$(5') \quad \begin{cases} dp_{m+\alpha} - \sum_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{m+\alpha}} dq_j = 0, \\ dq_{m+\alpha} + \sum_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_{m+\alpha}} dq_j = 0, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2 \dots n - m,$$

$$(5'') \quad \sum_1^m \frac{\partial \Phi_e}{\partial c_r} dc_r + \sum_j \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_e} + \{ \Phi_e, \Phi_j \} \right) dq_j = 0,$$

$$(5''') \quad \sum_1^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial c_r} dq_j = 0, \quad r = 1, 2 \dots m - 1,$$

$$(5^{IV}) \quad dt - \sum_1^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial E} dq_j = 0,$$

(5<sup>v</sup>)

$$dE = 0$$

e dove si è posto

$$\{ \Phi_e, \Phi_j \} = \sum_{\alpha}^{n-m} \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial p_{m+\alpha}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{m+\alpha}} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial q_{m+\alpha}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_{m+\alpha}} \right).$$

Facciamo ora intervenire la circostanza che le (2) – da cui le (3) provengono – sono integrali primi: le (5) devono essere soddisfatte da

$$dc_r = 0, \quad r = 1, 2 \dots m,$$

ed allora le (5''), riducendosi a contenere i soli differenziali  $dq_j$  dovranno intanto essere delle combinazioni lineari delle (5''') (ciò che si può anche verificare direttamente); le quali sono invece necessariamente indipendenti per l'ipotesi della risolubilità delle (2) rapporto alle  $p_j$ .

Le equazioni dinamiche si riducono pertanto al sistema ai differenziali totali (5'), (5''), (5<sup>IV</sup>), necessariamente completo, perchè formato da un'equazione in meno del numero delle variabili.

Orbene, se nel sistema complessivo ora menzionato isoliamo le equazioni (5'), (5'') – nelle quali siano tolti i termini in  $dc_r$  – che ne costituiscono una parte, per la dipendenza delle (5'') dalle (5'''),

$$(A) \quad dp_{m+\alpha} - \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{m+\alpha}} dq_j = 0 \quad ; \quad dq_{m+\alpha} + \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_{m+\alpha}} dq_j = 0 \quad ;$$

$$\sum_j^m \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_e} + \{ \Phi_e, \Phi_j \} \right) dq_j = 0 ;$$

dico che si ottiene *un sistema ai differenziali totali illimitatamente integrabile*.

La constatazione è immediata. Esaminando la (4), infatti, si riconosce che le (A) sono il primo sistema di Pfaff della forma (1') *quando le  $c_r$  si considerano come parametri costanti*; e tale sistema, come è noto dalla teoria del problema di Pfaff<sup>(1)</sup>, è appunto completo.

Sia  $s$  il numero delle equazioni indipendenti nel 3° gruppo delle (A); sarà

$$0 \leq s \leq m - 1$$

ed in particolare risulterà  $s = 0$  quando gli integrali dati sono in involuzione. Vale, in conclusione, questo primo risultato: *la conoscenza di  $m$  integrali primi generici delle equazioni canoniche consente di ridurre il problema dell'integrazione a quello di un sistema completo ai differenziali totali formato*

(1) GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 27.

da  $2(n - m) + s$  equazioni, ed alla successiva integrazione di un sistema differenziale ordinario di  $m - s$  equazioni (cioè delle equazioni  $(5''')$ ,  $(5^{IV})$  che non sono contenute nell'ultimo gruppo delle (A), e nelle quali siano eliminate  $2(n - m) + s$  variabili mediante gli integrabili del precedente sistema).

## 2. Riduzione canonica.

Nel caso in cui gli  $m$  integrali sono in involuzione, il sistema completo dianzi messo in evidenza si riduce alle sole equazioni  $(5')$ , le quali possiedono la forma canonica. Ed inverso l'integrazione di  $(5')$  col metodo di Morera esige che si pongano le variabili  $q_j$  eguali a funzioni arbitrarie di un parametro  $\lambda$ ; dopo di che ponendo

$$\mathcal{H}(p_{m+\alpha} | q_{m+\alpha} | c_r | \lambda) = - \sum_i^m \Phi_i \frac{dq_i}{d\lambda},$$

che, a sostituzione eseguita delle  $q_j$  con le scelte loro espressioni per  $\lambda$ , diventa appunto una funzione delle variabili indicate, si possono scrivere le  $(5')$  nella forma canonica

$$\frac{dp_{m+\alpha}}{d\lambda} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{m+\alpha}},$$

$$\frac{dq_{m+\alpha}}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{m+\alpha}}.$$

Questo metodo di riduzione è dovuto a Morera.

Orbene, anche nel caso generale in cui ci siamo posti, è possibile sostituire il sistema completo (A) con uno canonico, purché i primi membri degli  $m$  integrali (2) formino un gruppo canonico di funzioni, secondo Lie.

Aggiungiamo alle funzioni  $f_r$  le parentesi  $(f_r, f_s)$  fintanto che ognuna di queste risulti una funzione delle  $f_r$  stesse: per il teorema di Poisson le eventuali nuove  $f$  eguagliate a costanti daranno nuovi integrali primi. Supponiamo che gli  $m$  integrali (2) formino un gruppo completo nel senso ora detto. Lie<sup>(1)</sup> ha dimostrato che ad essi si può dare una forma canonica (sostituendo le  $f$  con opportune loro funzioni), e precisamente che si possono scindere nei tre gruppi (alteriamo ora convenientemente le notazioni per le  $f_r$  e le  $c_r$ )

$$(6) \quad \begin{aligned} Q_i(p|q) &= k_i, \quad P_i(p|q) = h_i; & i &= 1, 2 \dots \mu, \\ Q_{\mu+j} &= c_{2\mu+j}, & j &= 1, 2 \dots \nu, \end{aligned}$$

(1) *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. II, Kap. 9.

con  $2\mu + \nu = m$ , e tali che valgono le relazioni

$$(7) \quad (Q_r, Q_s) = 0, \quad (Q_r, P_i) = 0, \quad (Q_i, P_i) = 1.$$

La trasformazione delle (2) sotto la forma (6) esige l'integrazione di sistemi completi; ma, nei riguardi pratici, potrà darsi che essa talvolta riesca con procedimenti *ad hoc* analiticamente semplici. Mettiamoci, comunque, nelle condizioni supposte, e procediamo ad una trasformazione delle (5'').

Valgono le identità (1)

$$(f_r, f_s) = \sum_{\alpha, \beta}^m \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f_s}{\partial p_\beta} (p_\alpha - \Phi_\alpha, p_\beta - \Phi_\beta); \quad r, s = 1, 2 \dots m;$$

da cui, essendo i determinanti  $\left\| \frac{\partial f_r}{\partial p_\alpha} \right\|$ ,  $\left\| \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial c_r} \right\|$ , reciproci, si traggono le

$$(p_\alpha - \Phi_\alpha, p_\beta - \Phi_\beta) = \sum_i^m (f_r, f_s) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial c_r} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial c_s}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \dots m;$$

le quali, nell'ipotesi che le  $f_r = c_r$  abbiano la forma (6), in virtù delle (7) diventano (sempre con le nuove notazioni per le  $c_r$ )

$$(p_\alpha - \Phi_\alpha, p_\beta - \Phi_\beta) = \sum_i^\mu \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial k_i} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial h_i} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial h_i} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial k_i} \right),$$

cioè, sviluppando il primo membro

$$(8) \quad [\Phi_\alpha, \Phi_\beta] \equiv \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\alpha} + \{ \Phi_\alpha, \Phi_\beta \} + \sum_i^\mu \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial h_i} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial k_i} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial k_i} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial h_i} \right) = 0.$$

Le (5'') divengono conseguentemente

$$\sum_r^m \frac{\partial \Phi_e}{\partial c_r} dc_r + \sum_j^m \sum_i^\mu \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial k_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial h_i} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial h_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial k_i} \right) dq_j = 0,$$

e dopo risolte rispetto alle  $dc_r$  (moltiplicando per  $\sum_e^m \frac{\partial f_r}{\partial c_e}$ , e tenendo conto delle notazioni (6)),

(1) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II<sup>a</sup>, p. 349.

$$(9') \quad \left\{ \begin{array}{l} dh_i - \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial k_i} dq_j = 0, \\ dk_i + \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial h_i} dq_j = 0, \end{array} \right. \quad i = 1, 2 \dots \mu,$$

$$(9'') \quad dc_r = 0, \quad r = 2\mu + 1 \dots m.$$

Interpretando le (3) come quelle relazioni che sostituiscono le  $p_j$  ( $j = 1, 2 \dots m$ ) con le  $c_r$ , l'iniziale sistema canonico è trasformato (quando le  $f_r$  hanno la forma (6)) nel sistema (*pfaffiano*) (5'), (9'), (9''), (5'''), (5<sup>IV</sup>); dico che le equazioni (5'), (9') - che ne sono una parte, e nelle quali le  $c_r$  ( $r = 2\mu + 1 \dots m$ ) siano a norma delle (9''), costanti - formano, a loro sole, un sistema di differenziali totali illimitatamente integrabile.

La verifica è immediata: basta costruire il sistema associato di equazioni lineari

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} - [\Phi_j, F] = 0, \quad j = 1, 2 \dots m,$$

e sviluppare le condizioni che ne esprimono l'illimitata integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial q_j} [\Phi_e, F] = \frac{\partial}{\partial q_e} [\Phi_j, F].$$

Ometto i calcoli per brevità (puramente materiali, del resto): si constata che esse sono soddisfatte a causa delle identità (8). Ma (5'), (9') è un sistema canonico nelle variabili coniugate  $p_{m+\alpha}, h_i$ ;  $q_{m+\alpha}, k_i$ , e di funzione caratteristica

$$\mathcal{H}(p_{m+\alpha} | q_{m+\alpha} | h_i | k_i | c_{2\mu+1} \dots c_m | \lambda) = - \sum_j^m \Phi_j \frac{dq_j}{d\lambda}.$$

Infatti ad esso s'applica quanto si è detto al principio di questo numero per il sistema (5') nel caso involutorio. D'altronde è di immediata verifica che gli integrali di (5'), (9'), quando pure le  $h_i, k_i$ , al pari delle  $c_r$  si trattino come costanti, sono anche integrali delle vere equazioni dinamiche; cioè delle (5') e della (9') con  $dh_i = dk_i = 0$ .

Si può dunque concludere: la riduzione di rango di un sistema canonico mediante integrali posti sotto forma canonica, è ancora realizzabile conservando l'aspetto canonico del sistema ridotto

$$(B) \quad dp_{m+\alpha} - \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{m+\alpha}} dq_j = 0 \quad ; \quad dq_{m+\alpha} + \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_{m+\alpha}} dq_j = 0,$$

$$dh_i - \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial k_i} dq_j = 0 \quad ; \quad dk_i + \sum_j^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial h_i} dq_j = 0,$$



la cui integrazione dovrà essere seguita da quella delle equazioni ( $\zeta'''$ ), ( $\zeta^{IV}$ ) relative ai valori di  $r = 2\mu + 1 \dots m$ , nelle quali siano eliminate le  $p_{m+\alpha}$ ,  $q_{m+\alpha}$  ed altre  $2\mu$  tra le  $q_j$  ( $j = 1, 2 \dots m$ ) mediante gli integrali di (B) e trattando ora, beninteso, tutte le  $h_i, k_i, c_r$  come costanti d'integrazione<sup>(1)</sup>.

**Meccanica.** — *Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare.* — III. Caso generale di una agitazione incoerente. Nota di N. MOISSEIEV, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 4. Caso in cui le particelle posseggono velocità proprie rispetto al flusso.

Nelle Note precedenti<sup>(3)</sup> è stato investigato in dettaglio il « caso di flusso semplice ». Ammettiamo ora che le particelle componenti della nuvola cosmica non sieno sospese immobilmente in questa nuvola, ma si muovano in seno di essa.

Ammettiamo poi che:

a) tutte le direzioni di velocità delle particelle rispetto al loro « centro di moto » sono equi-probabili;

b) le grandezze di velocità delle particelle rispetto allo stesso punto sono eguali fra di loro.

Ciò è per l'appunto quel caso di distribuzione delle velocità, che in un lavoro precedente chiamammo: legge di distribuzione *Natanson*.

Indichiamo la velocità della particella rispetto al centro di moto della nuvola con  $b$ , la velocità del corpo S rispetto allo stesso punto con  $w$ , e finalmente la velocità del corpo S rispetto ad una qualsiasi delle particelle con  $r$ . Siano ancora  $\alpha$  e  $\alpha'$  rispettivamente gli angoli dei vettori di  $r$  e  $b$  con il vettore  $w$  della velocità del corpo S.

Sarà facile vedere allora che se il numero d'insieme delle particelle nell'unità di volume sarà eguale ad  $N$ , il numero di particelle contenute

(1) Parrebbe naturale di sfruttare gli integrali (6) a questo modo: realizzare una prima riduzione (canonica) con  $i\mu + \nu$  integrali  $Q = \text{cost.}$  che sono in involuzione; quindi un ulteriore abbassamento di rango, di almeno  $\mu$  unità, con  $i$  rimanenti  $P = \text{cost.}$  Mentre si scrive subito il sistema canonico ridotto (che consta di tante equazioni quante ne ha (B), ma non coincide con questo: si osservi che in (B) intervengono come variabili le costanti d'integrazione  $h_i, k_i$ , ciò che non sarebbe in questo secondo modo di riduzione), non è possibile assegnare l'ulteriore sistema di  $\nu$  equazioni senza prima avere integrato il precedente sistema canonico. Ciò è possibile invece nel metodo indicato in questa Nota.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(3) Cfr. pp. 135-139 e 377-380 di questo stesso volume dei « Rendiconti ».

nell'unità di volume per le quali l'angolo  $\alpha'$  sia compreso nei limiti fra  $\alpha'$  e  $\alpha' + d\alpha'$  verrà rappresentato dall'espressione seguente:

$$(21) \quad \frac{1}{2} N \sin \alpha' d\alpha',$$

ma

$$\cos \alpha' = \frac{w^2 + b^2 - r^2}{2wb}.$$

Perciò, dell'insieme di particelle contenute nell'unità di volume, il seguente numero possederà rispetto al corpo S velocità comprese nei limiti fra  $r$  e  $r + dr$ :

$$(22) \quad \frac{1}{2} N \frac{r}{wb} dr.$$

La velocità del corpo S rispetto a queste particelle formerà con l'asse del flusso l'angolo  $\alpha$ , ricavabile dalla relazione

$$\cos \alpha = \frac{w^2 + r^2 - b^2}{2wr}.$$

Tutto l'insieme di particelle nell'unità di volume della nostra nuvola può esser considerato come una moltitudine di « elementari flussi conici », ognuno dei quali sia caratterizzato da una grandezza definita  $\alpha'$ , oppure, ciò che è lo stesso, da una grandezza definita di velocità  $r$ . Ognuno di questi flussi conici consiste a sua volta da un insieme di flussi semplici<sup>(1)</sup>, la cui reazione fu da noi investigata più sopra.

Riassumendo tutto ciò che si è detto sopra, veniamo alle seguenti due espressioni per la forza di resistenza nei due casi fondamentali:

$$1) \quad b \geq w,$$

$$(23) \quad \Re(w, b) = \frac{1}{4} \frac{N}{w^2 b} \int_{r=b-w}^{b+w} \frac{\Re(r)}{n} (r^2 + w^2 - b^2) dr$$

$$2) \quad b \leq w,$$

$$(24) \quad \Re(w, b) = \frac{1}{4} \frac{N}{w^2 b} \int_{r=w-b}^{w+b} \frac{\Re(r)}{n} (r^2 + w^2 - b^2) dr$$

(1) Cfr. N. MOISSEIEV, *Ueber einige Grundfragen der Theorie des Ursprungs der Kometen, Meteore und des kosmischen Staubes*, IV Teil, § 1.

aggiungendo che in ambedue le formule  $\mathfrak{R}(r)$  va sostituito con la sua espressione mediante  $r$  coll'aiuto delle formole (11), (10) e (5), se si ha da fare col caso generale, e coll'espressione (12) qualora si voglia esaminare il caso di un punto materiale.

Non ci tratterremo qui a investigare la legge indicata nella sua forma generale (23) o (24), ma ci limiteremo solamente a fissare certe sue forme estreme.

a) *Caso di un punto materiale.*

Giusta il § 2, la funzione  $\mathfrak{R}(r)$  è continua e limitata, tendente a zero nel caso di velocità nulle ed infinite, e avente valore massimo per certe determinazioni intermedie di velocità.

Perciò alle formole (23) e (24) può venir data la forma seguente:

$$(23.1) \quad \mathfrak{R}(w, b) = \frac{N}{n} \mathfrak{R}(\bar{r}) \cdot \frac{2}{3} \frac{w}{b},$$

$$(24.1) \quad \mathfrak{R}(w, b) = \frac{N}{n} \mathfrak{R}(\bar{r}) \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{b^2}{w^2} \right],$$

dove  $\bar{r}$  significa un certo valore medio di velocità  $r$  nell'intervallo fra i limiti d'integrazione.

Da qui deduciamo, che:

1) Se  $b$  per rapporto a  $w$  è grande, tanto grande inoltre per valore assoluto (oppure, ciò che fa lo stesso,  $w$  tanto piccolo) che  $\mathfrak{R}(b-w)$  si distingue poco da  $\mathfrak{R}(b+w)$ , allora la legge di resistenza si può approssimativamente rappresentare colla formola

$$(25) \quad \mathfrak{R}(w, b) = \frac{N}{n} \mathfrak{R}(b) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{w}{b}.$$

2) Se  $w$  per rapporto a  $b$  è grande, tanto grande in modo assoluto (oppure, ciò che fa lo stesso,  $b$  tanto piccolo), che  $\mathfrak{R}(w-b)$  non si distingue sensibilmente da  $\mathfrak{R}(w+b)$ , allora la legge di resistenza si esprime approssimativamente con la formola

$$(26) \quad \mathfrak{R}(w, b) = \frac{N}{n} \mathfrak{R}(w) \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{b^2}{w^2} \right].$$

In conclusione diamo una tabella dei valori limiti della funzione investigata:

$$\Re(w, b)$$

$\begin{smallmatrix} w \\ b \end{smallmatrix}$	o	finito	$\infty$
o	o	finito (26)	o (26)
finito	o (25)	finito (23) e (24)	o (26)
$\infty$	o (25)	o (25)	1) $\lim (w - b) \leq A$ $\Re(w, b)$ è finito. 2) $\Re(w, b) = 0$ in qualsiasi caso.

b) *Caso di un corpo di raggio finito.*

Giusta il § 3, la funzione  $\Re(r)$  è funzione continua di velocità, tendente a zero, nel caso che  $r$  tenda pure a zero, e crescente infinitamente come quadrato di velocità in seguito ad aumento infinito di velocità.

Ragionamenti analoghi a quelli del caso a) ci conducono alla seguente tabella dei valori limiti della funzione investigata:

$$\Re(w, b)$$

$\begin{smallmatrix} w \\ b \end{smallmatrix}$	o	finito	$\infty$
o	o	finito (26)	$\infty$ (26)
finito	o (25)	finito (23) e (24)	$\infty$ (26)
$\infty$	o 1) (25)	$\infty$ 2) (25)	? 3)

1) Generalmente parlando, per variazioni contemporanee di  $b$  e  $w$ , tendenti a valori indicati, il limite verso il quale tenda la forza di resistenza dipenderà dalla legge di variazione di  $b$  e  $w$ . Pertanto, se  $w$  tende

a zero più rapidamente di  $\frac{1}{b}$ , questo limite sarà evidentemente zero, poichè, come si è già detto,  $\mathfrak{A}(b)$  cresce con rapidità non maggiore del quadrato della velocità. (Cfr. form. (25)).

2) Questo limite si ricava dalla formola (25), se si prende in considerazione l'osservazione testè fatta relativamente all'aumento della forza di resistenza.

3) Generalmente parlando, l'infinito, tranne qualche dubbio e poco interessanti combinazioni di  $w$  e  $b$ .

Nel terminare il presente articolo ci permettiamo di soffermarci su d'un problema affine a quello qui studiato. Vogliamo parlare del problema della forma dell'equazione differenziale del moto di un corpo di massa variabile in un mezzo resistente.

Nei suoi interessantissimi lavori da noi citati nell'introduzione al primo articolo<sup>(1)</sup> il prof. T. Levi-Civita ha investigato le condizioni sotto le quali la detta equazione differenziale può, colle solite notazioni essere scritta

$$\frac{d(mv)}{dt} = F.$$

Affinchè l'equazione abbia proprio questa forma è necessario, come segue dai lavori citati del prof. Levi-Civita, che la resistenza del mezzo al moto del corpo, come la intendevamo in quanto precede, sia nulla. (Propriamente si allude qui alla resistenza dai corpuscoli che urtano il corpo e rimangono ad esso aderenti. La questione dei semi-urti non è stata contemplata nei lavori di Levi-Civita, non essendo essa connessa alla variabilità della massa).

Esaminando da questo punto di vista le tavole dei valori limiti della resistenza riprodotti più sopra, possiamo notare che ogni combinazione di  $b$  e  $w$ , per cui risulti  $\mathfrak{A} = 0$ , darà anche la forma desiderata dell'equazione del moto, e che le combinazioni  $b$  e  $w$  prossime a queste daranno una legge del moto prossima alla suddetta.

Il risultato ottenuto dal prof. Levi-Civita per la distribuzione maxwelliana delle velocità nel seno del flusso — cioè che il quadrato del rapporto della velocità media quadratica dell'insieme dei corpuscoli alla velocità del corpo deve esser trascurabile, affinchè l'equazione prenda la forma desiderata — trova ulteriore conferma nella nostra analisi e rimane così, almeno parzialmente, esteso anche alle distribuzioni da noi studiate.

(1) Questi « Rendiconti », pp. 135-138.



**Meccanica.** — *Sopra la deformazione delle lastre.* Nota di G. SUPINO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Nota precedente<sup>(2)</sup> ho indicato come, partendo da una soluzione elastica in due dimensioni si possa ottenere, in modo del tutto elementare (e cioè senza risolvere nuovi problemi ai limiti e senza nuove integrazioni) una soluzione soddisfacente per le lastre di spessore finito nella ipotesi che le forze agenti giacciono tutte nel piano medio della lastra e che — in analogia con quello che si fa nel problema di Saint-Venant per la trave — si prescinda dalla distribuzione delle tensioni su una stessa generatrice, limitandosi a considerare su ciascuna generatrice la risultante e il momento risultante.

Nella presente Nota considero dapprima lastre soggette a forze agenti soltanto sul contorno: queste forze però non giacciono più nel piano medio della lastra. Vedremo che anche in questo caso si riesce ad estendere (in modo elementare) alle lastre grosse una soluzione generica data per la lastra sottile. Questo risultato, unito a quello precedente, permette dunque, in virtù della sovrapposizione degli effetti, di ritenere risolto il problema generale della deformazione delle lastre di spessore finito soggette a forze agenti soltanto sul contorno, quando per lo stesso contorno si conosca la soluzione per la lastra sottile.

Il risultato si estende al caso di lastre soggette ad un carico uniformemente ripartito come sarà indicato nell'ultimo numero di questa Nota.

2. Consideriamo una lastra grossa soggetta a forze agenti soltanto sul contorno e supponiamo che la sollecitazione in essa soddisfi alla condizione  $\sigma_z = 0$ . In tale ipotesi, posto  $\sigma_x + \sigma_y = k$  risulta da una delle equazioni di Beltrami<sup>(3)</sup> che deve essere

$$(1) \quad \begin{cases} k = k_0(x, y) + \lambda k_1(x, y) \\ \left[ \Delta' k_0 = \Delta' k_1 = 0 \right. \quad , \quad \left. \Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) Cfr. G. SUPINO, *Sul problema di Clebsch*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XV, serie 6<sup>a</sup>, pp. 366-371.

(3) Precisamente dalla equazione

$$\Delta \sigma_z + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

nella quale  $m$  rappresenta l'inverso del coefficiente di contrazione.

Lo stato di sollecitazione corrispondente a  $k_0$  è già stato studiato nella mia Nota precedente; quello corrispondente a  $\sigma_x + \sigma_y = \chi k_1(x, y)$  è stato studiato dal Love e dal Michell (1).

Indicando con  $2a$  lo spessore della lastra, con  $x, y$  il suo piano medio e supponendo scariche le basi ( $\chi = \pm a$ ) le componenti di tensione che indico con le notazioni usuali, hanno la forma:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \chi \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{m}{m+1} k_1 \right) + \frac{2m-1}{6(m+1)} \chi^3 \frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \chi \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m}{m+1} k_1 \right) + \frac{2m-1}{6(m+1)} \chi^3 \frac{\partial^2 k_1}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\chi \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \psi + \frac{2m-1}{6(m+1)} \chi^2 k_1 \right) \\ \tau_{y\chi} = -\frac{m}{2(m+1)} (\chi^2 - a^2) \frac{\partial k_1}{\partial y} \\ \tau_{\chi x} = -\frac{m}{2(m+1)} (\chi^2 - a^2) \frac{\partial k_1}{\partial x} \end{array} \right.$$

Con  $\psi$  armonica del secondo ordine,  $k_1$  armonica ed inoltre:

$$\sigma_\chi = 0, \quad \Delta' \psi = \frac{m-1}{m+1} k_1.$$

Poniamo ora:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \int_{-a}^{+a} \chi \sigma_x d\chi, \quad m_2 = \int_{-a}^{+a} \chi \sigma_y d\chi, \quad m_{12} = \int_{-a}^{+a} \chi \tau_{xy} d\chi \\ p_1 = \int_{-a}^{+a} \tau_{\chi x} d\chi, \quad p_2 = \int_{-a}^{+a} \tau_{y\chi} d\chi. \end{array} \right.$$

Dalle (2) si ricava facilmente:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{2a^3}{3} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{m}{m+1} k_1 \right) + \frac{2m-1}{15(m+1)} a^5 \frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2} \\ m_2 = \frac{2a^3}{3} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m}{m+1} k_1 \right) + \frac{2m-1}{15(m+1)} a^5 \frac{\partial^2 k_1}{\partial x^2} \\ m_{12} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{2a^3}{3} \psi + \frac{2m-1}{15(m+1)} a^5 k_1 \right) \\ p_1 = \frac{m}{m+1} \frac{2a^3}{3} \frac{\partial k_1}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{m}{m+1} \frac{2a^3}{3} \frac{\partial k_1}{\partial y} \end{array} \right.$$

(1) Cfr. LOVE, «The Mathematical Theory of Elasticity», nn. 299 e 303.

e queste equazioni danno le sollecitazioni globali su una generatrice generica della lastra grossa.

3. Si considerino ora le espressioni delle tensioni in una lastra sottile. Detto  $\bar{w}$  lo spostamento secondo la  $z$  si ha, come è noto <sup>(1)</sup>:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{m}_1 = -N \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \quad \bar{m}_{12} = -N \frac{m-1}{m} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \\ \bar{m}_2 = -N \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) \\ \bar{p}_1 = -N \frac{\partial \Delta' \bar{w}}{\partial x} \quad , \quad p_2 = -N \frac{\partial \Delta' \bar{w}}{\partial y} \quad \left[ N = \frac{2Em^2 a^3}{3(m^2-1)} \right]. \end{array} \right.$$

Supponiamo noto  $\bar{w}$  e vediamo se si possono determinare  $k_1$  e  $\psi$  in modo che le (4) diano in ogni punto del piano  $x, y$  gli stessi valori delle (5). Perchè sia  $p_1 = \bar{p}_1, p_2 = \bar{p}_2$  basta porre:

$$(6) \quad k_1 = -\frac{3N(m+1)}{2a^3 m} \Delta' \bar{w} = -\frac{Em}{m+1} \Delta' \bar{w}$$

e quindi

$$(7) \quad \Delta' \psi = \frac{Em}{m+1} \Delta' \bar{w},$$

perchè siano  $m_1, m_2, m_{12}$  uguali agli analoghi soprassegnati (5) occorre e basta che sia

$$\psi = \frac{Em}{m+1} \bar{w} - \frac{2m-1}{10(m+1)} a^2 k_1$$

o ciò che fa lo stesso

$$(8) \quad \psi = \frac{Em}{m+1} \bar{w} + \frac{Em(2m-1)a^2}{10(m^2-1)} \Delta' \bar{w}.$$

La (8) è compatibile con la (7) perchè  $\Delta' \bar{w}$  è armonico.

Basta ora rilevare che le (4) si riconducono immediatamente alle (2) e ricordare i risultati della mia Nota già citata per concludere, nel modo che avevamo annunciato, che da una soluzione generica nota nella lastra sottile si può sempre risalire ad una soluzione nella lastra grossa che soddisfi alle stesse condizioni ai limiti per le forze applicate.

4. Le componenti di tensione (7) relative alla lastra grossa danno luogo alle componenti di spostamento

(1) Si veda p. es. NADAI, «Elastische Platten».

$$(9) \quad \begin{cases} u = -\frac{1}{E} \left[ \frac{m+1}{m} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{2m-1}{6m} \chi^3 \frac{\partial k_1}{\partial x} \right] \\ v = -\frac{1}{E} \left[ \frac{m+1}{m} \chi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{2m-1}{6m} \chi^3 \frac{\partial k_1}{\partial y} \right] \\ w = \frac{1}{E} \left[ \frac{m+1}{m} \psi + \left( a^2 - \frac{1}{2m} \chi^2 \right) k_1 \right]. \end{cases}$$

Si vede subito sostituendo in  $w$  i valori di  $\psi$  e  $k_1$  determinati dalle (7) e (8) che  $w$  e  $\bar{w}$  sono diversi: dunque le stesse sollecitazioni provocano nella lastra grossa ed in quella sottile spostamenti diversi.

Si può però determinare una sollecitazione nella lastra grossa in modo che gli spostamenti risultino nei due casi gli stessi. Così se si vuole che la  $w(x, y)$  corrisponda alla  $w$  relativa al piano medio <sup>(1)</sup> ( $\chi = 0$ ) nella lastra grossa, basta porre nelle (2) — come si verifica subito —:

$$(10) \quad \begin{cases} k_1 = -\frac{Em}{m-1} \Delta' \bar{w} \\ \psi = \frac{Em}{m+1} \bar{w} + \frac{Em^2 a^2}{m^2-1} \Delta' \bar{w}. \end{cases}$$

Se invece si vuole che  $\bar{w}(x, y)$  corrisponda alla  $w$  relativa ai due piani base della lastra grossa ( $\chi = \pm a$ ) allora dovremo porre

$$(11) \quad \begin{cases} k_1 = -\frac{Em}{m-1} \Delta' \bar{w} \\ \psi = \frac{Em}{m+1} \bar{w} + \frac{Em(2m-1)}{2(m^2-1)} a^2 \Delta' \bar{w}. \end{cases}$$

Con queste funzioni — come già si è osservato — le sollecitazioni su ogni generatrice sono un poco diverse nella lastra sottile in confronto alla lastra grossa: esse permettono però *da una soluzione generica nella lastra sottile di risalire sempre ad una soluzione nella lastra grossa che dia luogo agli stessi spostamenti del piano medio* (o dei due piani base).

5. Finora ci siamo occupati di forze agenti soltanto sul contorno. Vediamo di estendere questi risultati al caso di una lastra caricata uniformemente: perciò basterà confrontare due soluzioni *particolari*, valida l'una nella

(1) Le quantità relative alla lastra sottile sono sempre soprassegnate per distinguerle a prima vista da quelle analoghe relative alla lastra grossa.

lastra grossa, l'altra nella lastra sottile. Consideriamo dapprima la lastra grossa. Si può porre<sup>(1)</sup> indicando con  $p$  il carico uniforme per unità di area:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{p}{4a^3} (\zeta^3 - 3a^2\zeta - 2a^3) \quad , \quad \tau_{zx} = \frac{3}{8a^3} p (a^2 - \zeta^2) x \quad , \\ \tau_{yz} &= \frac{3}{8a^3} p (a^2 - \zeta^2) y \quad , \quad \tau_{xz} = \frac{3(m-1)}{16ma^3} p \zeta xy \\ \sigma_x &= \frac{p}{4} + \frac{3\zeta}{8a^3} p (x^2 + y^2 + a^2) - \frac{3(m-1)}{32ma^3} p \zeta (x^2 + 3y^2) - \frac{2m+1}{8ma^3} p \zeta^3 \\ \sigma_y &= \frac{p}{4} + \frac{3\zeta}{8a^3} p (x^2 + y^2 + a^2) - \frac{3(m-1)}{32ma^3} p \zeta (3x^2 + y^2) - \frac{2m+1}{8ma^3} p \zeta^3\end{aligned}$$

e da queste si ricavano le componenti di spostamento:

$$\begin{aligned}u &= -\frac{m+1}{Em} \frac{px}{8a^3} \left[ \frac{2m-1}{m} \zeta^3 - 3a^2\zeta - 2a^3 - \frac{3(m-1)}{4m} \zeta (x^2 + y^2) \right] \\ v &= -\frac{m+1}{Em} \frac{py}{8a^3} \left[ \frac{2m-1}{m} \zeta^3 - 3a^2\zeta - 2a^3 - \frac{3(m-1)}{4m} \zeta (x^2 + y^2) \right] \\ w &= \frac{m+1}{Em} \frac{p}{16a^3} \left[ \frac{m+1}{m} \zeta^4 - 6a^2\zeta^2 - 8a^3\zeta + 3 \left( a^2 - \frac{\zeta^2}{m} \right) (x^2 + y^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(m-1)}{8m} (x^2 + y^2)^2 \right].\end{aligned}$$

Le risultanti e i momenti su una generatrice generica sono dati dalle espressioni

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1 &= \frac{p}{16} \left[ \frac{3m+1}{m} x^2 + \frac{m+3}{m} y^2 \right] + \frac{3m-1}{20m} p a^2 \\ m_2 &= \frac{p}{16} \left[ \frac{m+3}{m} x^2 + \frac{3m+1}{m} y^2 \right] + \frac{3m-1}{20m} p a^2 \\ m_{12} &= \frac{m-1}{8m} p xy \quad , \quad p_1 = \frac{px}{2} \quad , \quad p_2 = \frac{py}{2} . \end{aligned} \right.$$

Consideriamo ora il piano medio: su di esso si ha ( $\zeta = 0$  e quindi)

$$w = \frac{m+1}{Em} \frac{p}{16a^3} \left[ 3a^2 (x^2 + y^2) - \frac{3(m-1)}{8m} (x^2 + y^2)^2 \right]$$

(1) V. A. E. H. LOVE, « The Mathematical Theory of Elasticity », n. 307.



e la stessa deformazione può essere attribuita ad una lastra sottile: su una generatrice generica avremo allora in luogo delle (12) una sollecitazione diversa che può essere valutata facilmente a mezzo delle (5): tuttavia questa sollecitazione corrisponde sempre a un carico uniforme sulla lastra di intensità uguale a  $p$ .

Se invece si vogliono conservare per le sollecitazioni i valori (12) dovremo porre nella lastra sottile

$$\bar{w} = -\frac{p}{64N} \left[ (x^2 + y^2)^2 + \frac{8(3m-1)}{5(m+1)} a^2 (x^2 + y^2) \right]$$

come si verifica subito risalendo a questo valore per mezzo delle (5) stesse. Abbiamo così dimostrato tutti i risultati annunciati.

**Meccanica.** — *Sur l'existence de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche.* Nota di RUY LUIS GOMES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Astronomia.** — *Contributo allo studio della variazione della latitudine.* Nota di G. CONTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

1. Uno dei compiti assunti dal R. Osservatorio del Campidoglio consiste nel contribuire allo studio delle variazioni delle latitudini con osservazioni che, se per mancanza di tempo, non possono essere sistematiche ed a catena, si eseguono almeno con notevole frequenza.

Recentemente anzi il R. Osservatorio ha iniziato una doppia serie di osservazioni di latitudine, eseguite *simultaneamente* con due invertibili di Bamberg disposti l'uno in meridiano e l'altro in primo verticale, e valendosi dei due metodi classici di Talcott e di Struve. Si comprende l'alta importanza di tale abbinamento per lo studio del *Termine di Kimura* e della *variazione annua della rifrazione zenitale*.

Le prime osservazioni di latitudine col metodo di Struve si sono iniziate il 1 gennaio 1932, mentre continuano naturalmente le osservazioni di latitudine col metodo di Talcott. Rimandando il loro esame ad altra Nota, espongo intanto i risultati da me ottenuti in precedenti osservazioni di latitudine che ho eseguito col metodo di Talcott nel triennio 1926-27-28.

Separatamente verranno pure pubblicate dal dott. Andrissi le osservazioni da lui eseguite dal 1928 al 1932.

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

2. Ho scelto le stelle fondamentali tutte più luminose della sesta grandezza e quindi visibili anche attraverso una lieve foschia, giacchè spesso eseguivo tali determinazioni nelle serate in cui il cielo non era abbastanza sereno da permettere osservazioni di altro genere.

Ho tolto le posizioni stellari dall'« American Ephemeris » (sistema di Newcomb ed Eichelberger) scegliendo le due componenti di ogni coppia in modo che, non solo avessero presso a poco distanze zenitali uguali e e di segno contrario, ma fossero anche di luminosità poco differente e passanti in meridiano a breve intervallo di tempo. Infatti, su 35 coppie, solo in due la luminosità differisce di più di 2 grandezze stellari, ed in altre due l'intervallo supera le due ore. Nella maggior parte l'intervallo è solo di pochi minuti.

Le coppie scelte sono riportate nella seguente tabella:

Coppie	Stelle	Coppie	Stelle	Coppie	Stelle	Coppie	Stelle	Coppie	Stelle
1	{ ζ Cas 8 And	8	{ ε Gem 15 Lyn	15	{ 9 H Dra χ Leo	22	{ 57B UMi 8 Oph	29	{ γ Cyg ξ Cyg
2	{ β And υ Per	9	{ ρ Gem 27 Lyn	16	{ ψ UMa α CVn	23	{ A Dra 49 Her	30	{ Br 2777 θ Peg
3	{ γ' And	10	{ Grb 1374 β Can	17	{ Gr 1771 24 Com	24	{ ω Dra	31	{ τ Cyg g Cyg
4	{ β Tri θ Per	11	{ η Can h UMa	18	{ ε UMa α CrB	25	{ γ Dra γ Lyr	32	{ 16 Peg ζ Cep
5	{ f Tau 5 H Cam	12	{ ε Leo υ UMa	19	{ 43 Com ζ Uma	26	{ η Ser	33	{ 24 Cep 31 Peg
6	{ 8 Tau 9 Cam	13	{ 8 Can 32 UMa	20	{ 17HCVn λ Boo	27	{ τ Dra γ Aqu	34	{ o And
7	{ 19H Cam 8 Mon	14	{ μ UMa	21	{ η Boo α Dra	28	{ β Aqu x Cep	35	{ γ Cep ω Psc

Nella tabella seconda ho aggruppato per ordine di tempo tutti i risultati ottenuti dalle osservazioni eseguite, indicando con T la data, con C il numero della coppia osservata e con φ la latitudine trovata.

T	C	φ	T	C	φ	T	C	φ	T	C	φ	T	C	φ
1926		41° 53'	dic. 16	3	33".58	feb. 2	10	33."59	mar. 17	15	33."30	apr. 25	17	32."33
mar. 12	8	34".02		4	34.35		4	7 32.63		18	10 32.69		19	33.62
	10	33.14		5	33.31		8	33.63			11 33.49		21	33.39
	14	33.06	17	3	34.13		10	33.42			12 33.85	26	19	33.29
	13	11 32.12		4	32.21		5	7 33.42			14 33.83		21	33.07
	14	33.89	19	33	33.82		8	33.21	19	10	32.90	27	12	30.93
lugl. 4	23	33.46		1	33.18		10	33.65			11 32.87	28	17	33.70
	10	23 33.52		2	33.55		9	10 32.99			12 32.31		19	33.78
		24 33.30		4	33.46		16	8 34.13			14 34.20		21	33.23
		25 33.18	21	2	32.69		10	33.90	20	10	33.54	29	19	33.14
	16	23 33.33		3	32.96		17	10 33.54	21	12	32.89		21	33.82
		24 33.95		4	33.46	mar. 7	10	33.76			14 32.33	30	17	34.62
	17	23 34.08	30	4	33.04			12 33.42	28	17	33.78		19	31.96
		24 33.42	31	4	33.34			14 32.49	29	15	32.57		21	32.17
	19	23 33.08		5	33.11		9	8 33.24		17	32.28	mag. 9	14	33.01
		24 33.32	1927					10 32.86	30	14	33.48		18	21 33.00
	21	25 32.97	gen. 18	5	33.94			12 33.86		15	33.59		22	21 32.75
	23	20 32.10		6	33.37			14 33.50		17	33.88	1928		
nov. 26	1	33.04	23	6	33.30			15 33.02	31	17	33.09	feb. 1	6	34.10
	2	33.31	24	5	33.42		11	10 32.44	apr. 2	12	33.75		4	6 34.15
dic. 3	33	33.82		10	33.35			12 33.31		3	12 32.57		7	33.10
		1 32.13	26	6	33.06		15	10 32.18		15	33.93		8	33.01
	8	1 33.07		7	32.23			11 33.59		4	12 33.25	5	7	33.65
	9	2 33.80		8	33.27			12 33.02		15	32.34		8	33.42
	10	35 33.62		9	32.66			14 33.31		5	12 33.40		9	33.32
		1 32.84	27	5	32.94			15 33.23		15	33.65	6	7	33.76
		2 33.99		7	33.94		16	8 32.72		6	12 33.92		8	33.39
	11	2 33.92		8	33.40			10 33.09		7	12 33.63		8	6 34.01
		3 32.66	28	6	33.74			12 32.53		15	33.67		8	32.94
		4 32.18		7	33.83			14 32.97		8	12 33.46	12	8	33.23
	13	1 33.42		8	33.53			15 33.92		14	17 30.83	13	7	33.27
	14	1 33.74		10	33.94		17	12 33.02		15	17 30.08		8	33.26
	16	2 33.51	feb. 2	8	33.79			14 33.22		21	31.10	23	7	33.74

T	C	φ	T	C	φ	T	C	φ	T	C	φ	T	C	φ
feb. 23	9	32".44	mag. 22	22	32".66	giug. 8	22	33".58	agos. 3	23	33".40	ago. 25	29	32".99
mar. 9	8	33.24	24	19	32.12		23	33.41		24	33.42		27	33.81
	12	33.04		20	33.88	9	20	34.12		27	33.06	nov. 2	33	33.25
		14		22	33.58		22	33.73	5	26	33.41		34	32.63
		15	25	19	33.06		23	33.45	6	26	33.37		9	32.55
18	9	34.27		20	33.42		24	32.88		27	33.78		13	34.72
		14		22	33.19	10	22	33.91		28	33.68		4	34.08
		15	26	19	33.34	11	19	33.42	7	26	33.95	14	33	33.83
	19	33.98		20	32.15		20	32.75	8	26	33.80		34	33.60
		14	27	19	32.42		23	34.19		28	33.30	15	34	33.66
		15		20	34.16	12	19	32.87	10	23	33.63		3	33.15
29	14	33.10		21	32.95		20	34.09		24	34.02		4	33.96
		15	29	20	34.01	14	23	32.75		26	33.24	17	34	32.62
30	15	33.90		22	33.06	15	21	32.58		27	33.41	19	3	33.63
apr. 4	14	32.84	30	19	32.02		23	33.22		29	33.12		4	33.18
		15		20	33.11		24	33.50	14	26	33.39	28	5	33.43
	22	33.52	31	22	33.57	18	22	34.06		29	33.75	30	33	33.43
	26	32.58		23	33.51		23	33.00	16	29	32.99		34	33.12
mag. 2	19	33.09	giug. 1	20	33.68		24	33.34	18	26	32.34	dic. 1	5	33.83
	3	32.97		22	33.40	23	22	32.08		29	33.45		3	5 33.17
		15	4	19	33.05		23	33.31	20	29	33.15		5	1 33.56
		16		20	33.12		24	32.79	21	29	33.17		4	33.69
		19	7	20	33.66	24	23	33.85		31	33.87	14	2	33.15
	20	33.09		22	32.90		24	32.93	24	29	34.22	19	1	33.53
12	20	33.84		23	33.77	25	22	33.42		31	33.81		2	32.75
	21	33.50	8	19	32.21		24	33.28		32	32.18		3	33.36
21	22	34.24		20	33.46		26	33.49	25	26	34.12	20	3	33.32

Da queste osservazioni, eseguendo le medie e prendendo i luoghi normali, ho ottenuto per la latitudine i seguenti valori finali, che metto in confronto con quelli dati dalla vicina stazione di Carloforte <sup>(1)</sup>. Nella

(1) Cfr. H. KIMURA, *Provisional Result of the Intern. Latitude Service* nel « Bull. Géodésique », n. 23, p. 109. Come è noto la stazione astronomica di Carloforte (Cagliari) è adibita al servizio internazionale delle latitudini.

tabella, T indica l'epoca, N il numero delle osservazioni,  $\varphi$  la latitudine trovata,  $\Delta_{cp}$  le variazioni delle latitudini del Campidoglio e  $\Delta_{ct}$  le variazioni delle latitudini di Carloforte nello stesso intervallo di tempo.

T	N	$\varphi$	$\Delta_{cp}$	$\Delta_{ct}$
1926.5	34	41° 53' 33".29	— 0".18	— 0".34
1927.2	100	33 11	+ 0 .19	+ 0 .15
1928.3	96	33 30	+ 0 .08	+ 0 .12
1928.8	54	33 38		

Come si può vedere, le differenze delle due stazioni concordano in modo soddisfacente.

**Geofisica (Meteorologia).** — *Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa.* Nota di T. ALIPPI, presentata (1) dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Il dott. G. Viola in una Nota che porta il medesimo titolo (2) mette in evidenza un fatto di notevole importanza circa questo elemento meteorologico, che interessa non solo la meteorologia e la climatologia ma moltissimo anche l'igiene. È dunque ben spiegabile come esso sia stato argomento di molte ricerche e studi.

Il Viola, dunque, afferma giustamente che i risultati ricavati dalle osservazioni raccolte in alcuni Osservatori non confermano pienamente la nota legge di variazione, secondo la quale l'andamento dell'umidità relativa è in Italia, come in generale in tutta l'Europa, opposto a quello della temperatura. Egli trova infatti che la legge di variazione è « molto complessa e che oltre ai fattori temperatura, stato d'agitazione dell'aria, regime delle piogge ecc. esercitano il massimo influsso la posizione topografica e la frequenza del vento ». Ciò è reso evidente — egli aggiunge — dalle osservazioni raccolte a Roma, Napoli, Gaeta e Chiavari.

Per Roma la curva annua dell'umidità relativa mostra che il massimo è raggiunto in dicembre, il minimo in luglio; ma che per Napoli vi è un massimo secondario in maggio e un minimo a metà di aprile, anomalia

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) « Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XV, fasc. 1, Roma 1932.



dipendente dai venti che dominano a Napoli nel periodo marzo-maggio e dal sopraggiungere delle piogge primaverili. Ancor più istruttivi sono i diagrammi dell'umidità relativa per Gaeta e per Chiavari, i quali dimostrano che veramente l'umidità relativa è maggiore nei mesi estivi, in settembre e in ottobre che nei mesi invernali, in evidente dipendenza dai fattori locali.

L'A. della Memoria osserva infine che occorrerebbe esaminare per conoscere con esattezza il comportamento dell'umidità relativa in Italia, le osservazioni raccolte in quasi tutti gli Osservatori. Fortunatamente dalle Memorie di climatologia dell'Eredia <sup>(1)</sup> si possono desumere esatte notizie al riguardo per molte città italiane. Particolarmente utile, perchè riassuntiva e recentissima, è l'ultima delle tre pubblicazioni citate.

In essa l'Eredia conferma le considerazioni di carattere generale già segnalate da altri studiosi sull'andamento dell'umidità relativa annuale, all'ingrosso opposto a quello della temperatura, corrispondendo a temperatura elevata, bassa, umidità relativa e viceversa. Ma le irregolarità e le eccezioni non mancano e si debbono soprattutto alle condizioni topografiche della località e alla sua posizione rispetto alle correnti dominanti nei vari mesi. Così da una tavola comprendente per 25 stazioni della penisola e delle isole i dati dell'umidità relativa media per i 12 mesi dell'anno dedotti da un cinquantennio di osservazioni (1880-1929), risulta:

a) che nei luoghi marittimi si ha in inverno umidità inferiore a quella delle località interne e in estate il viceversa;

b) che l'escursione dell'umidità relativa è nelle città di mare minore che nelle città interne, pur essendovi differenze a volta anche notevoli.

Ma particolarmente interessante è l'andamento dell'umidità relativa a Genova ed in generale sulla riviera di ponente, dove l'umidità è scarsissima in gennaio (perfino a volte meno di 50) e sale poi per toccare il massimo nell'estate e nell'autunno. L'Eredia ascrive questa anomalia al riscaldamento delle correnti aeree, che, sospinte dalla pressione elevata in inverno sulla Valle Padana, valicano l'arco montuoso che cinge a nord la Riviera, dopo aver deposto sul versante in salita il vapor acqueo (Novi Ligure infatti ha nei mesi invernali un altissimo grado igrometrico, perfino di 85 in dicembre) e cadono giù sulla Cornice riscaldate ed asciutte. L'influenza della orografia sull'umidità relativa è di un'evidenza chiarissima, dunque, per queste due città, Genova e Novi Ligure.

Dall'Italia volgendo un rapido sguardo ad altre regioni continentali si può dire che, pur non essendo stato ancora questo elemento meteorologico oggetto di studi d'insieme, i quali mostrino, come per la pressione

(1) EREDIA, *L'umidità relativa nella riviera ligure* « Bollettino Soc. Met. Ital. », 1908; *L'umidità dell'aria in Sicilia* « Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze Nat. », Catania, 1919; *Sull'umidità relativa in Italia* « Gerlands Beiträge zur Geophysik », vol. 33, 1931.

e per la temperatura, l'andamento annuo e stagionale su tutto il globo, si è da tempo acquistata la convinzione — conforme del resto alle nostre conoscenze di Fisica e di Meteorologia — che l'umidità relativa non è soltanto in relazione colla temperatura, quale sarebbe sopra un globo omogeneo, ma che altri fattori intervengono ad alterare ed anche ad invertire la dipendenza di quella da questa. Tipico esempio — per citarne uno solo a conclusione — è l'andamento dell'umidità relativa nell'Asia orientale e specialmente a Pechino, dove l'umidità relativa è massima in estate e minima in inverno, perchè durante questo il tempo è sereno e molto freddo, mentre in estate cade la stagione delle piogge portate dai monsoni.

**Geofisica.** — *Sul calcolo della circuitazione nei moti dell'atmosfera* <sup>(1)</sup>. Nota di MARIA LOMBARDINI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. P. BURGATTI.

Come è noto Helmholtz ha dimostrato che, per un fluido in movimento, la circuitazione della velocità lungo una curva chiusa fluida è costante nel tempo, sotto la condizione che il fluido sia soggetto a forze esterne conservative, si muova senza attrito, ed abbia la densità funzione della sola pressione. Anche prescindendo dall'attrito questo teorema non è applicabile ai moti dell'atmosfera, perchè in essi la densità non può considerarsi funzione della sola pressione. Perciò V. Bjerknes nei suoi studi fondamentali sui fluidi *baroclini* (per i quali cioè la pressione e la densità sono tra loro indipendenti) ha esposto una generalizzazione di tale teorema dimostrando che la derivata della circuitazione è uguale al numero dei solenoidi *isobari-isosteri* abbracciati dalla curva chiusa in movimento.

Per lo studio dei moti atmosferici neppure quest'ultimo teorema è sufficiente perchè nelle nostre misure riferiamo le velocità del vento alla terra, la quale non è fissa ma ruota con velocità angolare  $\omega$ . V. Bjerknes stesso si è perciò posto il problema di calcolare la relazione fra la circuitazione assoluta  $C_a$  e la circuitazione relativa  $C$  ed ha trovato che è

$$(1) \quad C_a = C + 2\omega F$$

dove  $F$  è la superficie limitata dalla proiezione della curva chiusa  $\Gamma$  sul piano dell'equatore terrestre. Da questa formula risulta

$$(2) \quad \frac{dC_a}{dt} = \frac{dC}{dt} + 2\omega \frac{dF}{dt}$$

(1) Lavoro eseguito all'Ufficio Presagi.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1932.

oppure, indicando con  $N$  il numero dei soleonidi isobari-isosteri abbracciati dalla  $\Gamma$ :

$$(3) \quad N = \frac{dC}{dt} + 2\omega \frac{dF}{dt}.$$

1. Abbiamo richiamato le precedenti nozioni perchè in un recente lavoro <sup>(1)</sup>, assai pregevole sotto molti altri rapporti, F. Baur verrebbe ad infirmare la validità della (1).

Infatti a p. 274 scrive:

« Kennern der Bjerknesschen Arbeit über die atmosphärische Zirkulation in der Meteorologischen Zeitschrift 1902 wird sofort auffallen, dass « der Koeffizient bei  $dF/dt$  in (15) <sup>(2)</sup>  $4\omega$  lautet statt wie in der entsprechenden Bjerknesschen Formel  $2\omega$ . Dieser Unterschied hat seinen Grund « darin, dass das, was Bjerknes ableitete, gar nicht die relative Zirkulationsbeschleunigung <sup>(3)</sup> ist ».

Ed a p. 276 scrive:

« Die relative Zirkulationsbeschleunigung längs einer Kurve  $\Gamma$  ist « gleich der absoluten Zirkulationsbeschleunigung vermindert um das vierfache Produkt aus dem Betrage der Winkelgeschwindigkeit der Erde und « der auf die Zeiteinheit bezogenen Änderung der Projektion der von  $\Gamma$  « umschlossenen Fläche auf die Äquatorebene ».

2. Che il calcolo di Bjerknes si riferisca effettivamente a ciò che noi abbiamo chiamato la circuitazione relativa, non vi è dubbio alcuno, e per convincersene non occorre avere a disposizione la citata Memoria di V. Bjerknes. Basta consultare per esempio il *Traité de Mécanique Rationnelle* di P. APPEL, vol. III, ed. III, Parigi 1921, al capitolo XXXVII, che è redatto dallo stesso Bjerknes.

Formule equivalenti alle (1), (2), (3) si trovano anche in M. EXNER, *Dynamische Meteorologie* (Wien 1925) a p. 134; J. JAUMOTTE, *Sur le mouvement des masses d'air dans l'atmosphère*, « Académie Royale de Belgique de la Classe des Sciences », serie 5<sup>a</sup>, tomo XV, n. 12, pp. 1018-1035; M. LOMBARDINI, *Sul moto delle masse d'aria nell'atmosfera*, « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », vol. XII, serie 6<sup>a</sup>, fasc. 3-4, 1930) pp. 114-119.

La dimostrazione della (1) si può ottenere immediatamente come segue. Sia  $u$  la velocità in  $P$  relativa alla terra,  $v$  la velocità assoluta,  $O$  un

(1) F. BAUR, *Die Formen der atmosphärischen Zirkulation in des gemässigten Zone*. « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Band 34 (Köppen - Band III) Lipsia 1931.

(2) Che coincide con la (3) eccetto nel coefficiente di  $\frac{dF}{dt}$ .

(3) Il BAUR, loc. cit., a p. 266 aveva definito la « Zirkulationsbeschleunigung » come derivata, rispetto al tempo, della circuitazione lungo una curva chiusa fluida.

punto dell'asse terrestre,  $\Gamma$  una curva chiusa,  $\Sigma$  una superficie limitata da essa. È

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \quad C_a = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \times d\mathbf{P} \quad C = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \times d\mathbf{P}$$

e per il teorema di Stokes, indicando con  $\mathbf{n}$  il vettore unitario relativo all'elemento superficiale  $d\sigma$

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times d\mathbf{P} = \int_{\Sigma} \text{rot}[\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})] \times \mathbf{n} d\sigma = 2\boldsymbol{\omega} \times \int_{\Sigma} \mathbf{n} d\sigma$$

Quindi <sup>(1)</sup>

$$C_a = C + 2\boldsymbol{\omega} \times \int_{\Sigma} \mathbf{n} d\sigma = C + 2\boldsymbol{\omega} F$$

serbando ad  $F$  il significato, che precedentemente le abbiamo attribuito, cioè di proiezione della  $\Sigma$  sul piano dell'equatore terrestre.

3. La discordanza tra il calcolo di F. Baur e quello degli altri autori dipende semplicemente dal fatto che il Baur a p. 273 e a p. 275 non tien conto che l'elemento curvilineo differenziale  $d\bar{s}$  varia nel tempo, benchè tale variazione lo stesso Baur abbia considerata nel calcolo esposto a p. 266. Soffermandoci a p. 273 e riportando tutte le notazioni di Baur (differenti da quelle della Scuola Italiana), troviamo scritto (il segno  $\times$  vuol dire qui prodotto vettoriale)

$$2 \int_{\Gamma} \left( \mathbf{w} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 2 \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{v}_f \cdot d\bar{\mathbf{s}}$$

essendo

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

mentre è esattamente

$$2 \int_{\Gamma} \left( \mathbf{w} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 2 \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{v}_f \cdot d\bar{\mathbf{s}} - 2 \int_{\Gamma} \mathbf{v}_f \cdot \frac{d}{dt} d\bar{\mathbf{s}}.$$

Si può dimostrare <sup>(2)</sup> che

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v}_f \cdot \frac{d}{dt} d\bar{\mathbf{s}} = \int_{\Gamma} \left( \mathbf{w} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \cdot d\bar{\mathbf{s}}$$

(1) Per lo sviluppo completo di quest'ultimo passaggio, cfr. p. 117 della nostra Nota citata.

(2) Cfr. nostra Nota citata a p. 116.

cioè che

$$2 \int_{\mathbf{r}} \left( \mathbf{w} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{v}_f \cdot d\mathbf{s}.$$

Questa modifica riconduce il calcolo di F. Baur alla consueta formula <sup>(1)</sup> sulla circuitazione relativa.

**Geofisica.** — *La periodicità della temperatura media annua in rapporto a quella delle macchie solari.* Nota di G. VIOLA, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica.** (Fisica teorica). — *Nuova teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità a geometrizzazione assoluta.* Nota di P. STRANEO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota mi pregio render conto di alcuni miei recentissimi studi intorno al problema unitario della fisica macroscopica, i quali mi hanno condotto ad una soluzione di esso che, per la sua massima generalità e la sua estrema semplicità mi pare possa esser la definitiva.

La teoria esposta l'anno passato <sup>(3)</sup> col lieve perfezionamento di quest'anno <sup>(4)</sup> risolve rigorosamente e nel modo più semplice il problema unitario come era stato posto da Weyl nel 1918.

L'attuale teoria risolve lo stesso problema, ma *nella sua impostazione più ampia datagli da Einstein dal 1928 in poi.* Una legge, ASSOLUTAMENTE geometrica, cioè espressa per mezzo dei soli elementi geometrici caratterizzanti la varietà quadridimensionale *spazio-tempo*, senza alcun intervento di elementi (tensori) definiti in base a considerazioni fisiche, governa TUTTI i fenomeni della fisica macroscopica, e contiene, come casi limiti particolari, *esattamente* le equazioni dell'elettrodinamica di Maxwell e, con un opportuno perfezionamento solo per quanto riguarda l'energia del campo, quelle della gravitazione di Einstein.

(1) Prendiamo quest'occasione per far notare, a scanso di equivoci, che il calcolo esposto nella nostra Nota precedente si presta a tener conto esattamente anche della accelerazione centrifuga  $\mathbf{j}$  della rotazione terrestre. Infatti, ove si volesse introdurre tale grandezza, questa comparirebbe solo nelle equazioni delle righe 6 e 9 di p. 115 e non figurerebbe per nulla in tutto il rimanente calcolo.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1932.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XIII, serie 6<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., 1931, pp. 364, 695, 770.

(4) Questi « Rendiconti », vol. XV, serie 6<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., 1932, p. 77.



BREVE RICHIAMO DEL PROBLEMA E DELLE SUE EVOLUZIONI.

1. Alla fine del 1915 Einstein era giunto alle sue famose equazioni gravitazionali. Esse esprimevano la legge cui doveva sottostare lo *spazio-tempo* quadridimensionale rappresentativo, che si supponeva riemanniano definibile per mezzo della forma

$$(1) \quad ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

perchè potessero trovar luogo in esso: a) le espressioni delle leggi della fisica in forma covariante per qualsiasi trasformazione del sistema di riferimento; b) una possibile rappresentazione del fenomeno *gravitazione*. La legge einsteiniana era notoriamente espressa dalla formula

$$(2) \quad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu},$$

nella quale  $G_{\mu\nu}$  indicava il tensore di Riemann contratto  $R_{\mu\nu}^\alpha{}_\alpha$ ,  $G$  il suo invariante e  $T_{\mu\nu}$  un tensore del second'ordine a divergenza nulla che, dal punto di vista fisico, si poteva interpretare come il tensore energetico nei vari punti dello *spazio-tempo*.

Essendo in ultima analisi tutti i termini a sinistra nelle equazioni (2) espressi per mezzo dei coefficienti  $g_{\mu\nu}$  della forma (1), si raggiungeva effettivamente una geometrizzazione del fenomeno gravitazione, il cui potenziale (einsteiniano) notoriamente coincideva col tensore fondamentale. Ma la legge conteneva pure a destra un elemento estraneo ai coefficienti  $g_{\mu\nu}$  della metrica, rappresentato dal tensore del second'ordine  $T_{\mu\nu}$  arbitrario all'infuori della sola condizione di essere a divergenza nulla. E appunto cotesto tensore si doveva poi scegliere in base a considerazioni fisiche.

In altri termini il fenomeno gravitazione era senza dubbio geometrizzato, ma la legge a cui esso, e quindi la geometrizzazione, doveva sottostare, dipendeva in ultima analisi ancora da elementi fisici.

2. Non sarà forse inutile a questo proposito ricordare che in assenza di qualsiasi forma di energia non costituita da quella potenziale di gravitazione di masse disgregate, vale a dire per  $T_{\mu\nu} = 0$ , le equazioni (2) si riducevano ovunque, come è notissimo alla più semplice

$$(3) \quad G_{\mu\nu} = 0.$$

Esse esprimevano allora una geometrizzazione infinitamente più profonda di quella espressa dalle (2), perchè nessuna considerazione non puramente geometrica interveniva nè nella loro posizione, nè nella loro eventuale integrazione. Solamente poi, a integrazione eseguita, si doveva

procedere alla interpretazione e valutazione delle funzioni arbitrarie sempre contenute nell'integrale generale; e ciò si faceva appunto in base ai dati fisici del problema da risolvere, con evidente analogia coi procedimenti ordinari relativi a problemi dipendenti da equazioni alle derivate parziali.

3. Weyl pose il problema di costruire una teoria di tutti i fenomeni fisici che costituisse una generalizzazione di quella di Einstein e la contenesse come caso particolare. Tale teoria doveva quindi comprendere in più la legge dei fenomeni elettromagnetici, legge che al limite doveva, almeno approssimativamente, coincidere colle equazioni di Maxwell.

Ben presto il problema posto da Weyl venne generalmente concepito come la ricerca di una geometrizzazione del potenziale elettromagnetico  $\psi_v$ , cioè di una sua rappresentazione per mezzo di un elemento fondamentale puramente geometrico, parallela a quella già conseguita per il potenziale gravitazionale per mezzo del tensore  $g_{\mu\nu}$ . Ma non vi ha alcun dubbio che quella geometrizzazione fu originariamente concepita, e per oltre un decennio più o meno felicemente perseguita, *nel senso meno ampio*, nello spirito delle equazioni (2), coll'intervento naturalmente anche di qualche altro ente tensoriale in qualche modo avvicinabile al tensore emisimmetrico  $\Psi_{\mu\nu}$  delle consuete equazioni di Maxwell

$$(4) \quad \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu} = \Psi_{\mu\nu}.$$

4. Così il problema unitario era in ultima analisi ricondotto a quello di ampliare opportunamente la nozione geometrica dello *spazio-tempo* oltre lo schema riemanniano, nel quale la si era sempre contenuta.

È superfluo ricordare come la nozione di trasporto per parallelismo introdotta da Levi-Civita, e la conseguente nozione di *connessione* degli spazi con le sue notevoli generalizzazioni, abbiano fornito lo strumento per tentar di scoprire, fra gli infiniti ampliamenti della nozione di spazio riemanniano, quello opportuno al ruolo fisico che gli si voleva imporre.

Ma come è noto i risultati ottenuti dai maggiori teorici non furono mai del tutto soddisfacenti. Furono tentati ampliamenti nei sensi più differenti — dall'ammissione di connessioni che introducevano nello *spazio-tempo* caratteri di indole affine, fino allora quasi estranei alla geometria e del tutto alla fisica — all'attribuzione allo spazio-tempo di un'ipotetica *quinta dimensione* — ma sempre senza riuscir a soddisfare le giuste esigenze del lato fisico della questione.

5. Fu in seguito a ciò che nel 1928 Einstein pensò di impostare il problema unitario in un altro modo, che si distingueva nettamente dai precedenti per due punti essenziali. Prima di tutto la *geometrizzazione avrebbe*

*dovuto esser assoluta*, cioè con esclusione *a priori* di qualsiasi tensore di origine fisica, secondo quanto abbiamo detto poc'anzi. Poi si sarebbe dovuto lasciare allo spazio-tempo il carattere di ammettere un *parallelismo assoluto*, al quale la nostra mente è euclideamente abituata.

Io ho subito considerata cotesta nuova impostazione del problema unitario come assai felice e promettente, pur escludendo nel modo più reciso le varie soluzioni che successivamente ne diede il suo illustre promotore.

Ormai lo stesso Einstein ha abbandonata la detta impostazione e si è posto per una nuova via del tutto differente, che lo ha condotto, attraverso alla considerazione di una connessione di indole più elevata, a una teoria unitaria a geometrizzazione assoluta, che formalmente contiene, come casi particolari, la teoria della gravitazione e quella di Maxwell. Ma a me pare evidente, per quanto l'illustre autore ha ripetutamente scritto, che la nuova via, tanto più astratta e lontana dalla nostra mentalità fisica, non sarebbe stata tentata se il problema unitario avesse potuto venir risolto nella sua forma più ampia secondo la via precedente.

Ed è appunto codesta soluzione, insperatamente semplice e piana che mi onoro di esporre.

#### LA NUOVA TEORIA UNITARIA.

6. Quando nell'anno passato essendomi convinto della possibilità di risolvere il problema di Weyl in seguito alle considerazioni geometriche e fisiche esposte nella prima delle mie Note, ne stavo cercando la soluzione formale, mi fu da varie parti amichevolmente consigliato di affrontare invece il problema più ampio posto da Einstein. Io preferii invece perseverare nello studio del problema più ristretto per due ragioni. Mi pareva in primo luogo non dovesse esser priva d'interesse la risoluzione di una questione invano dibattuta da ormai quattordici anni fra tanti valenti teorici; presentivo poi che la soluzione di quella prima questione più semplice avrebbe dovuto fornire qualche preziosa indicazione per poter affrontare il problema più complesso con maggior probabilità di successo. E fu proprio così! La causa prevalente dell'insuccesso dei tentativi precedenti fu, senza dubbio, la non conoscenza della soluzione del problema più ristretto. Mi permetto perciò di richiamarne il tratto essenziale.

7. Abbiamo detto che il problema di Weyl geometricamente si traduceva nella ricerca di un'opportuna connessione per lo spazio-tempo più ampia di quella di Levi-Civita  $L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu \nu \end{smallmatrix} \right\}$ , caratterizzante le varietà riemanniane.

La sola che risultò corrispondente allo scopo fu la connessione semi-simmetrica che coll'aggiunta di un inessenziale fattore  $1/2$  scrivo:

$$(5) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu}).$$

La legge che in quello spazio-tempo più ampio veniva a sostituire quella di Einstein era:

$$(6) \quad L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L_{g\mu\nu} = E_{\mu\nu},$$

ove  $E_{\mu\nu}$  era un tensore asimmetrico del second'ordine, soggetto ad alcune condizioni per renderlo atto al suo ruolo fisico. Scindendo le due parti nei loro costituenti simmetrici e emisimmetrici rispetto alle  $\mu, \nu$ , si ottenevano le equazioni di Einstein (2) e di Maxwell (4).

Il potenziale gravitazionale era così ancora rappresentato dal tensore metrico fondamentale  $g_{\mu\nu}$ , mentre il potenziale elettromagnetico  $\psi_{\nu}$  veniva, per la prima volta, convenientemente rappresentato da un vettore di torsione, come fu esposto e discusso.

Ciò premesso, come si può in quell'ordine di idee concepire il problema unitario completo?

8. Se supponiamo di conoscere il tensore  $E_{\mu\nu}$  e quindi le sue parti simmetrica e emisimmetrica  $-kT_{\mu\nu}$  e  $\Psi_{\mu\nu}$ , la connessione della varietà *spazio-tempo* risulterà essenzialmente determinata (a meno del gradiente di uno scalare per quanto riguarda il vettore  $\psi_{\nu}$ ) e conseguentemente sarà determinata la struttura, riemanniana con torsione, della varietà che indicheremo con  $V_4$ . Consideriamo ora un supplemento di connessione che, aggiunto alla (5), dia luogo a una nuova connessione  $\bar{L}_{\mu\nu}^{\alpha}$  a *parallelismo assoluto*. Ciò equivale, notoriamente a imporre alla nuova connessione di avere un tensore di curvatura nullo:

$$(7) \quad \bar{L}_{\mu\nu\rho}^{\alpha} = 0.$$

Cotesto supplemento di connessione è evidentemente in linea generale rappresentabile per mezzo di un tensore  $T_{\mu\nu}^{\alpha}$ . Ora essendo, come abbiamo detto, la connessione primitiva semplicemente *riemanniana con torsione* (secondo Cartan *connessione euclidea con torsione*), cioè priva di qualsiasi tensore simmetrico, il tensore di connessione supplementare potrà senz'altro esser supposto *emisimmetrico*. Indichiamolo con  $\Omega_{\mu\nu}^{\alpha}$ . Il fatto poi che nella connessione primitiva la torsione sia rappresentata da un così semplice tensore (il vettore che caratterizza la connessione emisimmetrica

di Schouten), permette di attendersi nella struttura di  $\Omega_{\mu\nu}^\alpha$  qualche rilevante semplificazione.

9. Il problema di determinare il tensore supplementare che trasforma una data connessione primitiva in una connessione a parallelismo assoluto, fu studiato da vari autori, ma in generale partendo da una connessione primitiva, o riemanniana, o affine (secondo la classificazione di Cartan, o *euclidea senza torsione*, o *metrica senza torsione*) e non da connessioni già dotate di torsione. Ma non esistono difficoltà sostanziali a partire da una connessione già provvista di torsione.

Il nostro problema è in fondo il seguente: determinare le proprietà essenziali del tensore  $\Omega_{\mu\nu}^\alpha$  della connessione

$$(8) \quad \bar{L}_{\mu\nu}^\alpha = L_{\mu\nu}^\alpha + \Omega_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \psi_\nu - \delta_\nu^\alpha \psi_\mu) + \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu}^\alpha,$$

perchè il tensore generale di curvatura sia identicamente nullo; eq. (7).

Il calcolo diretto, per quanto laborioso, non presenta difficoltà sostanziali.

Ma per ricondurre la questione a casi noti, conglobiamo per un momento tutti i tensori di torsione in un unico tensore; la (8) diverrà:

$$(9) \quad \bar{L}_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} [(\delta_\mu^\alpha \psi_\nu - \delta_\nu^\alpha \psi_\mu) + \Omega_{\mu\nu}^\alpha] = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + T_{\mu\nu}^\alpha.$$

Dovremo così determinare  $T_{\mu\nu}^\alpha$  in modo che sia soddisfatta la (7).

Ma dopo tale posizione possiamo considerare come primitiva la connessione riemanniana senza torsione e quindi valerci della nota regola <sup>(1)</sup> che il tensore supplementare debba soddisfare alla condizione

$$(10) \quad T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\mu\lambda\nu}, \quad T_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\alpha} T_{\mu\nu}^\alpha.$$

Ma per la (9) tale condizione si traduce nella seguente:

$$(11) \quad \Omega_{\mu\alpha\nu} + \Omega_{\alpha\mu\nu} + 2g_{\mu\alpha}\psi_\nu - g_{\mu\nu}\psi_\alpha - g_{\alpha\nu}\psi_\mu = 0,$$

la quale, se fossero nulle le  $\psi_\nu$ , esprimerebbe per le  $\Omega_{\mu\nu}^\alpha$  la regola (10), mentre, in presenza delle  $\psi_\nu$  ne esprime la generalizzazione per la torsione.

Moltiplicando per  $g^{\mu\lambda}$  e sommando per rapporto a  $\mu$ , si ottiene la condizione per noi fondamentale:

$$(A) \quad \Omega_{\lambda\nu}^\lambda = 0,$$

(1) E. BORTOLOTTI, *Parallelismi assoluti in una  $V_n$  riemanniana*, «Atti del R. Istituto Veneto», vol. 86, p. 255, 1927.



la quale, solo quando fosse  $\psi_v \equiv 0$  si trasformerebbe nella condizione più generale  $\Omega_{\lambda v}^\alpha = -\Omega_{av}^\lambda$ , che la comprende come caso particolare.

In conclusione la connessione che io adotto per lo *spazio-tempo* è quindi:

$$(S) \quad \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} [(\delta_\mu^\alpha \psi_\nu - \delta_\nu^\alpha \psi_\mu) + \Omega_{\mu\nu}^\alpha], \quad \Omega_{\alpha\nu}^\alpha = -\Omega_{\nu\alpha}^\alpha = 0.$$

D'altra parte, data l'emisimmetria di  $T_{\mu\nu}^\alpha$  e la composizione della (9), per note regole (v. p. es. EISENHART, *Non riemannian Geometry*, eq. 5,2, 5,3 e 6,2) si ha:

$$(I2) \quad \begin{cases} \bar{L}_{\mu\nu\rho}^\alpha = R_{\mu\nu\rho}^\alpha + T_{\mu\nu\rho}^\alpha, \\ T_{\mu\nu\rho}^\alpha = T_{\mu\rho;\nu}^\alpha - T_{\mu\nu;\rho}^\alpha + T_{\mu\rho}^\lambda T_{\lambda\nu}^\alpha - T_{\mu\nu}^\lambda T_{\lambda\rho}^\alpha, \end{cases}$$

ove con  $R_{\mu\nu\rho}^\alpha$  è, come di solito, indicato il tensore di curvatura di Riemann, e col segno ; la derivazione covariante rispetto alle  $g$ , cioè l'ordinaria derivazione covariante di Ricci.

10. Eseguendo le operazioni indicate nelle (I2), dato che si elidono due a due i prodotti di cui i fattori sono o due dei vettori  $\delta_\beta^\alpha \psi_\gamma$  o uno di essi e un  $\Omega_{\beta\gamma}^\alpha$ , si ottiene:

$$(I3) \quad \begin{aligned} \bar{L}_{\mu\nu\rho}^\alpha = & R_{\mu\nu\rho}^\alpha + \frac{1}{2} \left[ \delta_\mu^\alpha \left( \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\rho} \right) - \delta_\rho^\alpha \left( \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \psi_\lambda \right) + \right. \\ & \left. + \delta_\nu^\alpha \left( \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\rho} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \rho \end{matrix} \right\} \psi_\lambda \right) + \Omega_{\mu\rho;\nu}^\alpha - \Omega_{\mu\nu;\rho}^\alpha + \Omega_{\mu\rho}^\lambda \Omega_{\lambda\nu}^\alpha - \Omega_{\mu\nu}^\lambda \Omega_{\lambda\rho}^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Contraendo per  $\alpha = \rho$  abbiamo:

$$\bar{L}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu} \right) + \Omega_{\mu\alpha;\nu}^\alpha - \Omega_{\mu\nu;\alpha}^\alpha + \Omega_{\mu\alpha}^\lambda \Omega_{\lambda\nu}^\alpha - \Omega_{\mu\nu}^\lambda \Omega_{\lambda\alpha}^\alpha \right].$$

Ma, data l'emisimmetria del tensore  $\Omega_{\mu\nu}^\alpha$  rispetto agli indici  $\mu, \nu$  e la condizione (A), risultano identicamente nulli il primo e l'ultimo dei termini nelle  $\Omega$ . Si ha quindi:

$$(I4) \quad L_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu} \right) - \Omega_{\mu\nu;\alpha}^\alpha + \Omega_{\mu\alpha}^\lambda \Omega_{\lambda\nu}^\alpha \right].$$

L'ultimo tensore a destra, del second'ordine è *simmetrico* nelle  $\mu\nu$  e a 10 componenti distinte. Il penultimo, la divergenza di  $\Omega_{\mu\nu;\alpha}^\alpha$ , è *emisimmetrico*

e a 6 componenti distinte, come quello che lo precede. È poi facile verificare che per l'invariante di  $L_{\mu\nu}$  si avrà

$$(15) \quad L = G + \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\lambda}^{\lambda} \Omega_{\lambda}^{\alpha\alpha}.$$

11. Ciò premesso assumiamo come semplicissima legge fondamentale

$$(S \text{ bis}) \quad L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L g_{\mu\nu} = 0.$$

Essa, scissa nelle sue parti simmetrica e emisimmetrica ci dà le equazioni:

$$(A \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = - \left( \frac{1}{2} \Omega_{\mu\alpha}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} \Omega_{\alpha\lambda}^{\lambda} \Omega_{\lambda}^{\alpha\alpha} g_{\mu\nu} \right), \\ \frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Omega_{\mu\nu}^{\alpha}, \end{array} \right.$$

che evidentemente coincidono colle equazioni gravitazionali e colle equazioni di Maxwell quando si identifichi il tensore a destra della seconda col tensore delle forze elettromagnetiche  $\Psi_{\mu\nu}$ , e successivamente quello della prima col *tensore energetico generale*  $\Theta_{\mu\nu}$ , moltiplicato per la costante  $k$  della gravitazione.

La compatibilità di coteste posizioni è evidente. Si tratta in fondo di determinare le 24 componenti del tensore di torsione con indipendenza dal sistema di riferimento. Perciò dobbiamo porre fra di esse 20 equazioni. Le condizioni (A) ne forniscono 4. Le altre  $6 + 10$  sono rispettivamente date dalla

$$\Omega_{\mu\nu}^{\alpha} = \Psi_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad \frac{1}{2} \Omega_{\mu\alpha}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} \Omega_{\alpha\lambda}^{\lambda} \Omega_{\lambda}^{\alpha\alpha} g_{\mu\nu} = k \Theta_{\mu\nu}.$$

Dalla forma dell'ultimo tensore segue inoltre molto pianamente la sua scomposizione nel tensore energetico maxwelliano, nell'ordinario tensore energetico della materia e nel loro necessario complemento, il tensore energetico del campo, che, per quanto riguardava la sola gravitazione, la teoria einsteiniana introduceva solo *a posteriori* e in forma tensorialmente scorretta, come dimostrerò in una prossima Nota.

Ad ogni modo si potrebbe anche giungere esattamente alle equazioni einsteiniane consuete, cioè senza il nuovo tensore, assumendo come legge fondamentale

$$L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \Omega_{\mu\alpha}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha} = 0,$$

ciò che in fondo equivarrebbe a prescindere ancora *a priori* dall'energia intrinseca del campo.

12. Per ragioni di spazio debbo parimenti rinviare ad altra pubblicazione più diffusa molte considerazioni sulla portata e sull'interpretazione della teoria esposta *che presentano caratteri di inattesa semplicità*.

Ora mi permetto di accennare solamente all'essenza del divario fra questa teoria e quella tentata da Einstein nello stesso senso e poscia abbandonata.

In fondo l'eminente fisico partiva dalla connessione euclidea  $L_{\mu\nu}^{\alpha} = \Omega_{\mu\nu}^{\alpha}$  col tensore di torsione non sottoposto *a priori* ad alcun vincolo. Esso allora è notoriamente costituito da *tre* tensori irriducibili di rispettive 4, 4 e 16 componenti. L'ultimo di essi è quello che viene convenientemente utilizzato, unitamente alle  $g_{\mu\nu}$ , per il ruolo gravitazionale. Gli altri due, a 4 componenti, dovrebbero servire per il ruolo maxwelliano. Ma per la loro differentissima struttura ( $\Omega_{\alpha\nu}^{\alpha}$  e  $\Omega_{\alpha\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu\alpha} + \Omega_{\nu\alpha\mu}$ , questo ultimo con  $\alpha \neq \mu \neq \nu = 1, 2, 3, 4$ ) ciò non fu possibile. Io riesco invece perchè annullo il primo di questi tensori, per imporre allo *spazio-tempo* il parallelismo assoluto, e accosto la divergenza del secondo, per il ruolo maxwelliano, al tensore ad essa perfettamente omologo,  $\left( \frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right)$ .

È poi evidente che, salendo a connessioni di ordine più elevato e sopprimendo i tensori inutili, si debba poter risolvere *in infinite maniere* il problema unitario. Una di coteste soluzioni è appunto l'ultimissima di Einstein.

*Ma la soluzione esposta è senza alcun dubbio la più semplice possibile.*

**Fisica.** — *Uno spinterometro riproducibile per spettroscopia quantitativa.*  
Nota di A. OCCHIALINI e L. GALLINO, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi*. — VII. *Costante dielettrica e momento elettrico in soluzione acquosa*<sup>(1)</sup>. Nota di G. DEVOTO, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. CAMBI.

Il problema dei rapporti fra costante dielettrica e momento elettrico del soluto nei solventi polari non presenta — almeno per oggi — alcuna prospettiva di risoluzione per via teorica. La teoria di Debye che tanti risultati ha dato nei solventi non polari, non può essere in nessun modo, neppure in prima approssimazione, applicata ad esempio alle soluzioni acquose. I risultati di Hassel<sup>(3)</sup> lo hanno chiaramente provato.

In una Nota precedente<sup>(4)</sup> avevo già accennato ad un mezzo di affrontare la questione da un punto di vista puramente sperimentale: oggi comunico alcuni dei risultati ottenuti.

La possibilità di dedurre una relazione approssimata fra costante dielettrica e momento elettrico del soluto è data dalla esistenza in soluzione acquosa della forma anfotera polare per gli amminoacidi grassi. Bjerrum<sup>(5)</sup> ha dimostrato che per queste sostanze si può ritenere l'equilibrio fra forma normale e forma polare totalmente spostato verso quest'ultima:



Questo fatto ci permette di valutare con sicurezza il numero degli ioni anfoteri presenti in soluzione.

Ora ho potuto già da qualche tempo constatare<sup>(6)</sup> che quando si verificano le condizioni di Bjerrum, ad esempio nei vari  $\alpha$ -amminoacidi, l'influenza dei diversi sostituenti è di secondo ordine rispetto al fattore fondamentale braccio del dipolo (definito dalla distanza fra il gruppo amminico e l'ossidrilico carbossilico): ciò che sperimentalmente si deduce dall'influenza praticamente uguale che i più diversi  $\alpha$ -amminoacidi hanno sulla costante dielettrica dell'acqua.

Negli amminoacidi superiori l'influenza dell'allungamento del braccio

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta nel 20 marzo 1932.

(3) «Zeit. phys. Chem.», B. 8, 187 (1930).

(4) «Gazz. Chim. Ital.», 60, 528 (1930); 61, 906 (1931).

(5) «Zeit. phys. Chem.», 104, 147 (1923).

(6) «Gazz. Chim. Ital.», 60, 527 (1930).

del dipolo si fa sentire ampiamente, come si vede dai risultati che riferisco in modo sommario.

Come già nelle Note precedenti <sup>(1)</sup>, indico con  $\frac{d\epsilon}{dc}$  il coefficiente dielettrico ( $\epsilon$  costante dielettrica della soluzione,  $c$  concentrazione) che nelle soluzioni diluite si mantiene costante; i valori sono dati per lunghezze d'onda di circa 90 cm., temperatura di 25°.

Si ottiene dunque:	$\frac{d\epsilon}{dc}$
$\text{NH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$	+ 26
$\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$	+ 36
$\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{HSO}_3$	+ 41
$\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$	+ 51
$\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$	+ 63
$\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$	+ 73

Ora, come è noto dalle misure coi raggi X sul solido e dai dati di Langmuir in soluzione, l'introduzione nella catena degli acidi grassi di un gruppo  $-\text{CH}_2-$  porta ad un allungamento  $\Delta l$  della molecola di circa 1.3 Å. Assumendo lo stesso allungamento nella molecola dell'amminoacido, si ha nel passaggio all'omologo superiore, un incremento di momento elettrico

$$\Delta\mu = e.\Delta l = 4.77.10^{-10}. \quad 1.3.10^{-8} = 6.2.10^{-18} \text{ u. e. s.}$$

Per tale variazione nel momento molecolare, si ottiene un medio aumento nel coefficiente dielettrico di circa 11-12 unità.

Esiste dunque almeno in questi dipoli forti una netta proporzionalità tra coefficiente dielettrico e momento elettrico: e questo è confermato anche dalle precedenti misure sulla glicilglicina <sup>(2)</sup> che col suo coefficiente di + 70 si interpola proprio tra il  $\delta$ - e l' $\epsilon$ -amminoacido, come dalla lunghezza del dipolo si può prevedere.

Da questo punto di vista puramente sperimentale era anche interessante ricercare l'influenza sulla costante dielettrica dell'acqua di una sostanza a struttura — in soluzione — non polare. Ma in genere le sostanze non polari non sono solubili in acqua: composti ossigenati, pur simmetrici come l'idrochinone, non hanno momento elettrico nullo.

Una delle — credo poche — sostanze che si prestano allo scopo è la 2-5 diossopiperazina che con tutta probabilità ha una struttura non polare,

(1) «Gazz. Chim. Ital.», loc. cit.

(2) «Gazz. Chim. Ital.», 61, 907 (1930).



o, se polare, tuttavia compensata per simmetria. Essa ha un coefficiente dielettrico negativo: — 10.

Ora questo valore corrisponde, in prima approssimazione, a quello che si ottiene per estrapolazione dai coefficienti dielettrici degli amminoacidi, ammettendo la variazione lineare  $\mu, \frac{d\epsilon}{dc}$  accennata.

Per i dipoli forti, — in prima approssimazione, ripeto — le esperienze indicano questa proporzionalità: che se può apparire eccessivamente semplicista a chi è solito considerare quello che avviene nei solventi non polari, tuttavia sembra giustificabile dati gli elevatissimi momenti elettrici in giuoco.

Mi è stato obiettato recentemente<sup>(1)</sup> di aver tralasciato il tentativo di applicare la teoria di Debye a questi risultati; ma la fallacia della prova appare dalle cifre riportate: l'applicazione, inammissibile — insisto — della teoria, vorrebbe dei coefficienti dielettrici, per dei dipoli quali questi amminoacidi, di gran lunga superiori a quelli ottenuti sperimentalmente.

Purtroppo valori numerici di elevata precisione non si possono dare per la valutazione, malsicura in oggi, delle distanze fra i poli dell'ione anfotero; ma l'ordine di grandezza della relazione fra momento elettrico e coefficiente dielettrico è, dalle misure sopra riportate, indubbiamente definito.

**Chimica** (Chimica fisiologica). — *Sulla sostanza colorante dei bozzoli dei bachi da seta di razza verde Giapponese.* Nota di C. JUCCI e C. MANUNTA, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio F. BOTTAZZI.

Uno di noi studiando il comportamento ereditario del colore del sangue e del bozzolo nella discendenza di incroci tra razze gialle (Oro e Fossombrone) e razze bianche (Awojku) ha visto nella  $F_2$  verificarsi la scissione mendeliana in giallo e bianco nel rapporto 3 : 1. Ma i bianchi non sono sempre tutti candidi. In molte ovature, tra una maggioranza di bozzoli bianchi, se ne incontrano di bianco-verdastri, spesso con tutti i gradi di passaggio dallo spiccatamente verdastro al bianco sporco, al candido. Allevata nella  $F_3$  la discendenza, da due bianco verdastri se ne ottengono bozzoli bianchi, bianco-verdastri e talvolta qualche verde intenso.

Si presenta alla mente l'ipotesi che, dipendendo il colore del bozzolo, oltre che dal colore del sangue, da altri fattori — come il grado di capacità delle ghiandole serigene di assorbire i pigmenti del sangue — la comparsa di bozzoli bianco-verdastri nella  $F_3$  possa spiegarsi con una nuova combinazione dei fattori parentali, cioè p. es. il colore della razza Awojku e la ca-

(1) EBERT, « Berichte », 64, 679 (1931).

(2) Nella seduta del 6 marzo 1932.

pacità di assorbimento dei pigmenti della razza Oro e Fossombrone; o viceversa, il colore del sangue di queste e la capacità di assorbimento di quella.

Ma la sostanza colorante dei bianco-verdastri differisce solo quantitativamente o ben anche qualitativamente da quelle dei bozzoli di razza Oro e Gialla Indigena?

Se differisce anche qualitativamente, l'ipotesi accennata non regge e un'altra spiegazione s'impone.

Considerazioni di questo genere hanno spinto uno di noi allo studio della sostanza colorante dei bozzoli verdi di razza Giapponese. Queste razze verdi godettero un tempo di grande favore e furono, specie in Italia, tra le più allevate; ma oggi sono andate completamente in disuso.

Il marchese Sacconi Natali di Ascoli Piceno con squisita gentilezza ci ha fornito il seme di una razza giapponese verde, oltre a quello di altre razze speciali pure selezionate nel suo stabilimento.

Già il colore caratteristico di questi Verdi giapponesi e soprattutto l'essere in essi il pigmento disposto nell'interno del filo di seta, nel cilindro di fibroina, anziché all'esterno, nella corteccia di sericina come nelle altre razze, ci dice che probabilmente si tratta di un pigmento speciale. Nello stesso senso parlano le ricerche spettrofotometriche compiute in questo stesso laboratorio dalla dott. Duce, che trovano per gli estratti di bozzoli Verdi una curva di assorbimento spiccatamente diversa da quelle, assai simili tra loro, ottenute da estratti di bozzoli Oro o Gialli.

Le ricerche da noi intraprese allo scopo di isolare il pigmento caratteristico dei bozzoli Verdi e possibilmente individuarlo chimicamente sono tuttora in corso, ma ci permettono già di affermare che la sostanza colorante in questione è tutta diversa da quella che dà il color giallo dorato ai bozzoli delle altre razze.

Abbiamo incominciato coll'estrarre i bozzoli verdi nella soluzione alcoolica di carbonato di sodio, già impiegata nelle precedenti ricerche, colorimetriche e spettrofotometriche (1).

L'ebollizione prolungata dà una soluzione intensamente gialla; i bozzoli restano scolorati.

Invece bollendo a lungo con alcool a 95°, dai bozzoli Verdi si ottiene una soluzione verde molto chiara: una seconda prolungata estrazione dà una soluzione colorata solo assai lievemente.

Concentrando gli estratti per distillazione, la soluzione assume un bel color verdolino. I bozzoli restan gialli, d'un giallo un po' verdastro.

Vien l'idea che l'ebollizione in alcool abbia asportato un componente verde lasciando i pigmenti comuni delle altre razze gialle (carotinoidi).

Ma se si estraggono dei bozzoli in acqua distillata, dopo breve periodo

(1) V. «Rendic. Lincei», 1930-1, «Boll. Soc. Biolog. Sp.», 1930-1.

di ebollizione (una mezz'ora) i bozzoli — che non hanno ancora incominciato a disfarsi — appaiono completamente, o quasi, scolorati, mentre la soluzione acquosa è fortemente colorata in verdolino.

Dunque i bozzoli verdi non contengono un miscuglio di due sostanze coloranti (la verde e una gialla) e l'estratto giallo oro dei bozzoli verdi in soluzione alcoolica di carbonato di sodio sembra contenere un prodotto di trasformazione della sostanza verde. Anche la prolungata ebollizione in alcool finirebbe col portare a questa trasformazione che l'ebollizione in soluzione alcalina rapidamente produce.

Vien fatto di pensare che questo prodotto di trasformazione sia niente altro che un sale che la sostanza colorante verde forma cogli alcali.

Difatti aggiungendo a qualche centimetro di soluzione di « Verde » in acqua una goccia di potassa alcoolica, il colore passa dal verde chiaro al giallo-arancione più o meno verdastro.

La stessa reazione colorata si produce per l'aggiunta di potassa alla soluzione di « Verde » in alcool a 95°. Anzi in questo caso il viraggio del colore è seguito da una precipitazione di fiocchetti, grumi di color arancione, che lascia il liquido alcoolico completamente scolorato. La precipitazione avviene più rapidamente se si aggiunge alla soluzione alcoolica dell'etere. Evidentemente la sostanza (supposto sale del pigmento verde) è solubile in acqua e insolubile in etere.

Lo conferma il fatto che la soluzione di « Verde » in acqua per quanto alcalinizzata non dà precipitato. Nè pare contribuisca la concentrazione della soluzione: del resto se si va a concentrare, per ebollizione, la soluzione acquosa passa dal colore verde al giallo arancio: alterazione della sostanza e forse di natura diversa dalle suddescritte.

L'aggiunta di acidi minerali o anche di acido acetico alla soluzione di « Verde » in acqua o in alcool alcalinizzati, scolora istantaneamente e completamente la soluzione; nè il colore ricompare alcalinizzando.

La reazione gialla delle soluzioni di « Verde » per aggiunta di alcali non può esser attribuita che alla sostanza colorante verde.

Trattando con solfato di ammonio, per allontanare ogni traccia di sostanza proteica, l'estratto dealbuminato dà un colore meno intenso con alcali.

Ma questo dipende dal fatto che nell'operazione molta della sostanza colorante resta sul filtro. E del resto estraendo dei bozzoli bianchi (bianco bivoltino giapponese Secretain) la soluzione ottenuta dall'ebollizione in acqua e quella in alcool a 95°, rispettivamente, sono incolore e tali restano anche dopo aggiunta di alcali <sup>(1)</sup>.

(1) Invece estraendo con soluzione alcoolica di carbonato di sodio, il liquido è sensibilmente colorato in gialletto.

Si formano delle resine? Ma la soluzione alcoolica di carbonato di sodio bollita anche

La sostanza colorante (o il miscuglio di sostanze coloranti) dei bozzoli Giallo Indigeno (Fossombrone) si comporta molto diversamente.

L'ebollizione in acqua anche prolungata per giorni, sino allo spappolamento dei bozzoli, non porta in soluzione tracce apprezzabili di sostanza colorante.

L'ebollizione in alcool a 95°, benchè non bastino parecchie estrazioni, per vari giorni, a decolorare completamente i bozzoli, porta in soluzione i pigmenti. Questo non dimostra una scarsa solubilità dei pigmenti in alcool a 95°, ma una tenace aderenza dei medesimi al substrato proteico.

L'ebollizione in soluzione alcoolica di carbonato di sodio porta, con lo spappolamento della seta, a una estrazione completa e abbastanza rapida dei bozzoli. La soluzione è di un colore giallo oro.

La soluzione di Giallo in alcool a 95° — come quella in carbonato di sodio — non dà reazione colorata con gli alcali. E l'aggiunta di acidi la decolora, ma non istantaneamente, nè basta una traccia di acido a produrre l'effetto.

La soluzione alcoolica in carbonato di sodio sbattuta con vari solventi dei grassi non sembra cedere in misura apprezzabile la sostanza colorante se non al solfuro di carbonio. Questo si colora dapprima in rosa e poi in arancione rossastro intenso. Alla terza estrazione il solfuro di carbonio resta scolorato. Sembra ragionevole ammettere che si effettui così la separazione di pigmenti del gruppo delle carotine e pigmenti del gruppo delle xantofille. La natura carotinoide della frazione solubile in solfuro di carbonio è confermata dalla reazione verde con cloruro di ferro, reazione che finora non abbiamo ottenuto nettamente con la frazione solubile in alcool a 95°.

Anche l'estratto di Fossombrone in alcool a 95° sbattuto con solfuro di carbonio si ripartisce in due frazioni. Invece la soluzione, in alcool a 95° o in carbonato di sodio alcoolico, di « Verde » lascia il solfuro di carbonio completamente incolore.

Riassumendo: le caratteristiche principali di questo pigmento speciale dei bozzoli di Verde Giapponese sono:

1° solubilissimo in acqua (estraibile dai bozzoli per ebollizione; poco solubile (o almeno lentamente estraibile) in alcool a 95°<sup>(1)</sup>; dalla soluzione alcoolica non passa in etere nè in solfuro di carbonio.

2° dà con alcali dei sali gialli (solubili in acqua, insolubili in alcool a 95°).

a lungo, da sola, resta incolore. D'altra parte bollendo gli stessi bozzoli bianchi con acqua leggermente alcalinizzata, un 5/100 N, la soluzione resta incolore.

(1) Bollendo dei bozzoli verdi in alcool assoluto a lungo, la soluzione resta scolorata; ma l'aggiunta di alcali, producendo la reazione gialla, rivela la presenza di tracce del pigmento Verde.



Stiamo cercando di isolare e di individuare chimicamente questo nostro pigmento Verde per il quale proponiamo il nome di *bombiclorina* che saremo felici di abbandonare se ricerche ulteriori giungeranno ad identificare detta sostanza con una delle sostanze già individuate dalla chimica biologica nel regno vegetale o nell'animale. Forse non è inutile che arrischiiamo sin d'ora (semplicemente come ipotesi di lavoro, s'intende) la nostra impressione che la sostanza in questione abbia rapporti di affinità con sostanze coloranti di origine vegetale del tipo ossichetonico, come le due gialle, solubili in acqua, estratte dal legno di una moracca: la *Maclura aurantiaca*: morina, un tetraossiflavonolo, e *maclurina* un pentaossibenzo-fenone.

A sostanze del genere pare anche sia dovuto in buona parte l'ingiallimento autunnale delle foglie di molte piante (secondo le ricerche di Tswett).

Potrebbe darsi che da sostanze analoghe presenti nelle foglie del gelso, i bachi da seta di razza Verde derivino il pigmento, e non (come è stato da parecchi Autori supposto) dalla clorofilla<sup>(1)</sup>. Invece derivano, secondo ogni probabilità, dai carotinoidi della foglia del gelso (xantofille e carotine) i pigmenti gialli del bozzolo, come del sangue e delle uova, delle comuni razze di bachi da seta Oro cinese e Gialle Indigene.

(1) DUBOIS nel 1889 comunicò i risultati delle sue *Ricerche preliminari sui principii coloranti immediati della seta verde della « Saturnia yamamai »*. Estraeva i bozzoli in acqua bollente ottenendo una soluzione di un bel verde che per evaporazione dava depositi cristallini verde chiari della stessa natura di quelli di cui si dimostrava direttamente la presenza alla superficie dei fili dello strato esterno del bozzolo.

Dubois crede che questi cristalli siano della sostanza colorante verde che egli chiama *cloroyamamaina*. Ma è ben più verosimile che essi siano cristalli di sostanze uriche impregnati di pigmento, analogamente a quanto avea osservato Verson, come richiama il Gautier nella sua lunga polemica con Dubois. Secondo ogni probabilità questa sostanza colorante verde dei bozzoli di *yamamai*, sostanza che Levrat e Conte credettero una clorofilla, mentre Villard, allievo di Dubois, cercò di dimostrare il contrario, è la stessa da noi studiata nella razza Verde giapponese di *Bombyx mori*.



**Geologia.** — *Ricoprimento di terreni pliocenici nell'Appennino Reggiano.* Nota di M. ANELLI presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. P. VINCENSA DE REGNY.

È noto che la formazione gessosa messiniana, così largamente sviluppata nelle colline vogheresi e pavesi, si interrompe ad oriente dello sprone di Stradella per riapparire nelle alture di Vernasca e di Vigoleno (Piacenza); nel parmense affiora, tra Salsomaggiore e Tabiano, soltanto la piccola lente di Bargone. In tutta la provincia di Parma invece l'equivalente della formazione gessosa sembra rappresentato da un potente complesso di conglomerati e di arenarie oppure da marne più o meno sabbiose con fauna salmastra (*Neritina*, *Melania*, *Dreissensia*, *Cardium*). La stessa *facies* si continua nella porzione occidentale della provincia di Reggio; è solo nella valle del T. Campola, affluente del Crostolo, che ricompaiono i gessi, i quali assumono poi largo sviluppo nello Scandianese. Ad oriente di Scandiano si osserva di nuovo una lunga interruzione; però tra Scandiano ed il Secchia i gessi debbono essere presenti in profondità, come lo mostra la sorgente solforosa di Dinazzano <sup>(2)</sup>. Varcato il Secchia ricompare la *facies* conglomeratica, finché al di là del Panaro si sviluppa di nuovo la formazione gessosa.

Qualche volta la formazione messiniana ed i gessi ad essa corrispondenti sembrano sottoposti, in perfetta concordanza, alle argille piacentiane; sono numerosi però i fatti che ci starebbero ad indicare come la formazione messiniana sia stata profondamente disturbata prima che si effettuasse il deposito dei terreni pliocenici.

È certo ad ogni modo che quasi sul margine dell'Appennino e ad esso parallela, decorre una importante linea di dislocazione (quasi sempre coincidente col limite meridionale degli affioramenti di argille piacentiane), lungo cui sono spesso intruse lingue di argille scagliose, le quali appaiono così in contatto col piacentiano stesso. Si tratta di un contatto anormale ed è probabile che, almeno in molti casi, al disotto del pliocene giaccia la formazione messiniana; infatti, molto spesso, nelle immediate vicinanze del contatto compaiono lembi messiniani impigliati o inglobati nelle argille

(1) Nella seduta del 20 marzo 1932.

(2) Vedi in proposito anche: BELLUIGI, *Sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica Modenese*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. XI, Serie 6<sup>a</sup>, fasc. 8, aprile 1930; *Ancora sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica Modenese*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. XII, Serie 6<sup>a</sup>, fasc. 3-4, luglio 1930.

scagliose, lembi che io interpreto come frammenti strappati durante i movimenti orogenetici, per opera di queste ultime, dalle sottostanti formazioni in posto.

Io ho già descritto anzi a questo proposito<sup>(1)</sup>, un curioso fenomeno che si osserva nei pressi di Scandiano, fenomeno che credo opportuno ricordare ancora una volta perchè mi dà modo di modificare una mia precedente interpretazione.

Nel territorio tra il Crostolo ed il Secchia le argille scagliose compaiono in grandiose, desolate distese, le quali, andando verso valle, sembrano sorreggere la formazione messiniana, cui succede il potente complesso delle argille piacentiane e delle sabbie astiane affioranti in larga striscia nelle colline prospicienti la pianura.

Senonchè, quattro chilometri circa ad occidente di Scandiano e precisamente nella valle del T. Lodola, presso Borzano, si nota un brusco cambiamento e precisamente una brusca interruzione delle formazioni neogeniche. Infatti, mentre nel versante sinistro del Lodola alle argille scagliose succedono la formazione messiniana (con gessi sviluppatissimi), la piacentiana e l'astiana, nel destro tanto i terreni messiniani quanto quelli pliocenici scompaiono improvvisamente, lasciando il posto alle argille scagliose che si protendono sino alla pianura, dove sono coperte direttamente dal quaternario.

Questa scomparsa dei terreni sopra accennati si verifica in tutto il territorio compreso tra il T. Lodola ed il Tresinaro, che distano tra loro circa quattro chilometri. Soltanto ad oriente di quest'ultimo corso d'acqua, cioè nei colli sovrastanti a Scandiano, ricompaiono di nuovo gli affioramenti messiniani, piacentiani, astiani, piuttosto fortemente disturbati e sconvolti. La stessa lingua di argille scagliose che viene ad interrompere la continuità delle formazioni neogeniche presenta una curiosa caratteristica: mentre nel versante del Lodola manca di ogni traccia di terreni messiniani e pliocenici, nel versante del Tresinaro presenta numerose, estese lenti di gesso in essa inglobate. Queste lenti sono allineate da ONO a ESE e tale allineamento si trova sulla diretta prosecuzione dei gessi che affiorano regolarmente in posto tanto ad occidente (valli del Crostolo e del Lodola), quanto ad oriente nei colli di Scandiano e di Ventoso. E inglobati nelle argille scagliose stesse comparivano anche, presso la fattoria del Figno, in uno spaccato ora distrutto, alcuni banchi di ghiaie e di sabbie, probabilmente messiniane e lembi di argille azzurrognole.

Io avevo interpretato questi curiosi fenomeni come dovuti ad una imponente ruga di argille scagliose, la quale intrudendosi tra le formazioni neogeniche, le avrebbe in parte sollevate, in parte inglobate nella sua massa: i lembi della calotta neogenica sopraelevata sarebbero stati distrutti dagli agenti esterni.

(1) M. ANELLI, *Sopra alcune particolarità tettoniche dell'Appennino Emiliano*. «Giornale di Geologia», s. 2, vol. II, Bologna 1927.

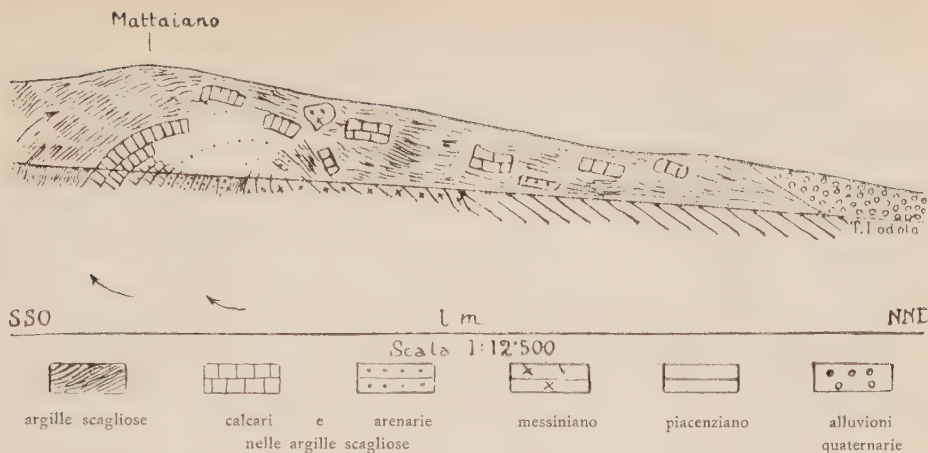
Senonchè alcune recenti osservazioni mi inducono a dare una spiegazione del tutto diversa.

Risalendo la Valle del Lodola si vedono affiorare nell'alveo, appena oltrepassate le alluvioni quaternarie di Borzano, le assise piacentiane con strati inclinati di una quarantina di gradi verso NE (inclinazione che si mantiene presso a poco costante per circa 500 m.), finchè nell'alveo e sul versante sinistro comincia a comparire la formazione messiniana (costituita di marne, di arenarie e di lenti gessose), i cui strati, dapprima inclinati più o meno fortemente verso NNE, finiscono per pendere di 50°-60° verso SSO accennando evidentemente ad un rovesciamento. Ed infatti poco dopo, in un bellissimo spaccato, sempre sul versante sinistro, le tipiche argille scagliose si addossano al messiniano; il piano di contatto è fortemente inclinato verso SSO; nelle immediate adiacenze, le arenarie messiniane odorano sentitamente di petrolio, analogamente a certe altre arenarie intercalate nelle argille scagliose, di cui si parlerà più avanti.

Nel versante destro invece è soltanto nella sua porzione basale che affiorano, per breve tratto, le argille piacentiane e i gessi, le prime presso Borzano, i secondi sotto a C. Gameda. Tutt'altrove il versante stesso è costituito di una formazione prevalentemente argillosa, caotica, in cui compaiono frammenti e lembi di arenarie e soprattutto di calcari. La stessa formazione, come ho già detto, costituisce tutto il contrafforte tra il Lodola ed il Tresinaro ed è coperta direttamente dalle alluvioni quaternarie propicienti la pianura.

Se noi proseguiamo a risalire la valletta partendo dal contatto tra le formazioni neogeniche e le argille scagliose, che qui si presentano col loro tipico aspetto di masse variegata con frammenti pirolusitici, vediamo succedere una fitta alternanza di argille e di sottili strati di calcare e di arenarie; questi ultimi contengono frustuli carboniosi (affatto simili a quelli che nella vicina valle del Crostolo affiorano presso i noti stillicidi di petrolio).

Succedono pochi banchi calcarei, poi ancora alternanze di argille e di straterelli arenacei e finalmente una pila di bancate calcaree e di marnoscisti; a tutto questo fa seguito una vasta distesa di argille scagliose. Gli strati sono per lo più raddrizzati e contorti con pendenza generale verso Sud: è da notare però che, a valle del contatto anormale già segnalato tra le argille scagliose e il messiniano, compare nel versante destro, a C. Gameda, nelle argille scagliose, un lembo di straterelli arenacei facente parte della formazione argillosa stessa, straterelli che pendono di una quarantina di gradi verso NNO. Inoltre le bancate di marnoscisti e di calcare, inclinate, come abbiám visto verso SSO, tendono gradatamente, nella porzione elevata del versante destro del Lodola (sempre a valle del contatto) a diventare quasi orizzontali, accennando anche ad assumere una inclinazione verso settentrione (vedi fig.).



Sezione semischematiche del versante destro del T. Lodola.

Il lembo messiniano inglobato dalle argille scagliose non compare affatto, come sembrerebbe dalla figura, nel versante del Lodola; affiora invece alquanto ad oriente nella valle del Tresinaro.

Le frecce indicano le probabili direzioni dei movimenti da cui furono interessate le argille scagliose.

In definitiva dal complesso delle osservazioni sembra di poter affermare che nel versante destro del Lodola, il quale presenta un netto contrasto con quello sinistro, le argille scagliose, slittando, sono venute a ricoprire la formazione gessosa e quella piacentina; questo fenomeno si verifica in tutto il contrafforte separante il Lodola dal Tresinaro. Nelle argille scagliose della valle del Tresinaro appaiono inglobate le lenti gessose già ricordate e appaiono ancora (come per esempio presso il Castello di Bagnolo) lembi di argille e di sabbie; in quelle del versante destro del Lodola si hanno invece, a valle del contatto già ricordato, lembi di alternanze di scisti argillosi, di arenarie e di calcari rosati (C. Gameda) oppure lembi di calcari e di marnoscisti, talora estesi, come a Mattaiano e a C. del Cavallaro.

Questi lembi rappresentano evidentemente la prosecuzione di quelle arenarie e di quei calcari, che appaiono più a monte regolarmente intercalati nelle argille scagliose e che sono stati trascinati da queste ultime nel loro slittamento verso settentrione venendo così a far parte della massa ricoprente le formazioni neogeniche.

Non mi sembra difficile dare una spiegazione delle cause che possono avere determinato il curioso ricoprimento ora descritto.

Lungo la grande linea di dislocazione parallela al margine dell'Appennino, che ho già altre volte illustrato e di cui ho fatto cenno nelle prime righe di questa Nota <sup>(1)</sup>, si osserva non raramente una certa tendenza delle argille scagliose ad accavallarsi sul pliocene.

(1) *Cenni geologici su Traversetolo ecc.* « Boll. Soc. Geol. It. », XXXIV, p. 123, 1915;



Il fatto per esempio è evidentissimo nella valle del Modolena, pochi chilometri ad occidente della regione ora descritta <sup>(1)</sup>.

Probabilmente nel territorio tra il Lodola ed il Tresinaro ha avuto luogo un avvallamento dei terreni messiniani e pliocenici, sui quali, sotto l'azione di una spinta proveniente da mezzogiorno, le argille scagliose sono venute a slittare trascinando con sè le assise arenacee e calcaree ad esse intercalate, che non potendo seguire il movimento, probabilmente piuttosto rapido, delle plastiche e scorrevoli masse argillose, si sono lacerate e ridotte a brandelli, mentre d'altra parte le argille scagliose riuscivano a strappare lembi dalle sottostanti formazioni neogeniche inglobandoli nella loro massa.

La distanza, che nel territorio tra il Lodola e il Tresinaro, intercede tra la grande dislocazione marginale e le prime alluvioni quaternarie costituenti le prime ondulazioni collinose, è di circa due chilometri, cosicchè il ricoprimento delle argille scagliose sulle assise messiniane e plioceniche si manifesta per una estensione per lo meno uguale a quella ora detta.

Non si può parlare, come è troppo facile intendere, di carreggiamento, fenomeno che si presuppone sempre effettuato a grande profondità e sotto un sovraccarico notevole di masse; con tutta probabilità si tratta di un ricoprimento avvenuto nelle zone superficialissime della crosta terrestre, direi anzi alla superficie, e da annoverarsi fra i tanti altri curiosi fenomeni presentati dalle argille scagliose, le quali, come ho già parecchie volte accennato, si comportano dal punto di vista meccanico, come delle vere e proprie masse magmatiche.

Non è da escludere che l'avvallamento dei terreni neogenici sia stato dovuto, in ultima analisi, al fatto che le sottostanti argille scagliose furono richiamate, direi quasi risucchiate dalla massa situata più a monte, che sotto l'azione della spinta, tendeva ad accavallarsi e a traboccare sulle formazioni neogeniche.

In altre parole si può supporre che il lento rigurgito, il trabocco delle masse che andavano a ricoprire, sia stato accompagnato da un graduale richiamo e perciò da una graduale asportazione delle argille scagliose giacenti più a valle al di sotto dei terreni messiniani e pliocenici, i quali erano così costretti a sprofondarsi.

Naturalmente l'avvallamento si accentuava man mano che la massa rigurgitata sovraincombente veniva a gravare col suo peso ed ebbe termine soltanto allorchè, cessata la spinta, si stabilì una condizione di equilibrio.

*Sulla presenza dell'Oligocene nel subappennino reggiano. Ib., XLII, p. 191, 1923; Tettonica dell'Appennino parmense e reggiano. Ib., XLII, p. 392, 1923.*

(1) M. ANELLI, *Sulla presenza dell'Oligocene ecc.* « Boll. Soc. Geol. It. », XLII, 1923, p. 190.



**Botanica.** — *Piante raccolte in Libia dalla " Missione Desio (1931) "*". Nota di R. PAMPANINI presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. DAINELLI.

I. — CIRENAICA.

La raccolta del 1930 si riferisce alla Sirtica. Sono otto specie: due della regione di el-Agheila - sulla via di Agedabia (*Thymelaea hirsuta*) e su quella di Marada (*Tragnum nudatum*) - e le altre sei tutte dell'oasi di Marada.

Mentre per la flora dell'oasi di Augila, e della carovaniera da Agedabia ad Augila, si hanno parecchie notizie (Pacho, 1825; Hamilton, 1853; Beurmann, 1862; Rohlfs, 1869 e 1879; e specialmente Krüger, 1928, e Patrizi-Montoro, 1931) <sup>(2)</sup> per le regioni più occidentali le indicazioni floristiche sono scarsissime.

Dell'oasi di Abu-Naim si conoscono cinque piante grazie a Rohlfs, il quale vi passò nel 1879 nel corso del suo viaggio da Tripoli a Cufra. Sono: *Albagi maurorum* Medic., *Nitraria tridentata* Desf., *Tamarix articulata* Vahl, *Tragnum nudatum* Del., *Zygophyllum album* L.

Per el-Harùg nel 1929 il colonnello E. De Agostini citò: *Anabasis articulata* Moq., *Cornulaca monacantha* Del., *Fagonia kabirina* Boiss., *Genista Saharæ* Coss., *Haloxylon articulatum* Bge., *Zilla macroptera* Coss.

Per l'oasi di Marada, infine, sono noti soltanto l'*Albagi maurorum* Medic. da Pacho, il quale nel 1825, nel suo viaggio attraverso la Cirenaica, giunse anche a quest'oasi; e l'*Ephedra alata* Decne. e lo *Zygophyllum album* L. da Beurmann, che nel 1862 vi sostò andando da Bengasi a Murzuk <sup>(3)</sup>.

Queste 12 piante, le sole note per la zona della Sirtica confinante con la Tripolitania, aumentano a 16 col manipolo del Prof. Desio, che è così costituito:

*Albagi maurorum* Medic.

*Cyperus levigatus* L. var. *distachyus* Coss. et DR.

*Juncus acutus* L.

*Nitraria tridentata* Desf.

*Phragmites vulgaris* Crép. - (ster.).

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) R. PAMPANINI, *Prodromo della flora cirenaica*, Forlì, 1930; G. LUSINA, *Le piante raccolte dal Marchese S. Patrizi-Montoro nell'interno della Cirenaica* (« Annali di Botanica », vol. XIX, p. 340, 1931).

(3) R. PAMPANINI, op. cit.

*Tamarix nilotica* Bge. (?). — (ster.).

raccolte nell'oasi di Marada dal 14 al 19 novembre.

Inoltre:

*Thymelaea hirsuta* Endl. — Fra Agheila e Agedabia, 23 novembre.

*Traganum nudatum* Del. — Hatiet-es-Some, 21 novembre.

\*  
\* \*

Nell'estate del 1931 il Prof. Desio raccolse altre nove piante a Cufra e più al sud.

Per l'arcipelago delle oasi di Cufra le notizie floristiche, iniziatesi con l'indicazione data da Fresnel nel 1846 dell'*Acacia arabica* Willd. nell'oasi di Tazerbo, per la flora spontanea si limitano alle 13 specie raccolte o segnalate da Rohlf s nel 1879 e — oltre all'indicazione dell'*Acacia arabica* osservata a Cufra dal capitano medico G. Brezzi (1929)<sup>(1)</sup> — alle 14 specie raccolte nella primavera del 1931 dal Marchese S. Patrizi-Montoro e dal Sig. C. Confalonieri<sup>(2)</sup>. Sono in tutto 23 specie, le quali con le piante del Prof. Desio salgono ora a 24.

Qui egli raccolse:

*Acacia arabica* Willd. — El Giof.: nei giardini; 5 agosto;

*Cressa cretica* L. — Tobat di Giof: terreno sabbioso, salato; abbastanza frequente; 8 agosto;

*Ephedra alata* Decne. — Tazerbo; 19 settembre;

*Fimbristylis ferruginea* Vahl—El Giof: Buma; terreno umido, sabbioso frequente;

*Juncus maritimus* Lam. var. *arabicus* Aschers. et Buchen. — El Giof.: terreno di « sebcha » salato e acquitrinoso; abbastanza frequente; 5 agosto. — Tazerbo; 19 settembre.

Notevole è la *Fimbristylis ferruginea*. È nuova per la Libia anche come genere, ed a Cufra ha ora la sua stazione più occidentale-settentrionale<sup>(3)</sup>.

Più al sud, proprio al confine con l'Egitto e col Sudan inglese, raccolse altre quattro specie, particolarmente interessanti per la località tanto lontana. Sono:

*Acacia arabica* Willd. — Valle di Archenu: terreno sabbioso-ghiaioso siliceo; rara; 18 agosto;

(1) R. PAMPANINI, op. cit.

(2) G. LUSINA, *Aggiunte alla flora delle oasi di Cufra* (« Annali di Botanica », vol. XIX, p. 423, 1931).

(3) Cfr. G. E. POST, *Flora of Syria, Palestine and Sinai*, p. 831. Beirut, Syria, 1883; R. MUSCHLER, *A Manual Flora of Egypt*, pp. 176-177. Berlin, 1912; THISELTON-DYER W. T., *Flora of Tropical Africa*, VIII, p. 417. London, 1902.

*Cassia obovata* Collad. — Gebel Aneàt, versante meridionale: valle dell'Ain Prensi; terreno sabbioso, detritico, siliceo; rara; 20 agosto;

*Fagonia kabirina* Boiss. — Valle di Archenu: terreno sabbioso-ghiaioso, siliceo; poco frequente; 18 agosto;

*Heliotropium undulatum* Vahl — Gebel Archenu: terreno detritico e sabbioso-ghiaioso, siliceo; raro; 8 agosto.

La *Cassia obovata* è nuova per la Cirenaica anche come genere; la *Fagonia kabirina* per la Cirenaica era nota solo dell'el-Harùg (Sirtica) (De Agostini, 1929); l'*Heliotropium undulatum* finora in Cirenaica era stato raccolto soltanto a Giarabub (Desio, 1927).

## II. — TRIPOLITANIA.

Nel viaggio a Cufra il Prof. Desio raccolse una diecina di piante anche lungo la via che dall'oasi di Marada entra nel Fezzan, e passando per Zella, el-Fogha e Temissa giunge a Uau el-Chebìr dove piega nuovamente ad oriente dirigendosi a Cufra.

È un manipolo sottile, ma pur interessante; non tanto perchè la povertà della flora del Fezzan rende utile anche un contributo lieve, quanto perchè proviene dai territori orientali, che sono i meno noti. La via occidentale di Ghadames è stata battuta a preferenza della via di Sokna, ed anche dopo l'occupazione italiana le prime raccolte sono state in direzione di quella <sup>(1)</sup>.

Per il Fezzan orientale la prima notizia floristica risale a Pacho (1825), il quale raccolse, o indicò, a Temissa l'*Alhagi maurorum* Medic. Seguirono: Richardson (1846), Barth (1850), Duveyrier (1861) nel ritorno a Tripoli da Murzuk; Vogel (1853) e Nachtigal (1869) nel viaggio inverso; inoltre Beurmann nel 1862, proveniente dalla Cirenaica e diretto a Murzuk; e finalmente Rohlf's, quando, nel marzo del 1879 partito da Sokna entrò nella Cirenaica per la via di Zella <sup>(2)</sup>. Ma è un insieme di notizie e di raccolte esiguo.

Le undici piante del Prof. Desio quasi tutte della regione di Uau el-Chebìr sono:

*Aerva tomentosa* Forsk. (*A. javanica* Wight) var. *Bovei* (Webb) C. B. Clarke (1909) <sup>(3)</sup> — Uau el-Chebìr: Dor el-Gussa; 5 ottobre;

*Aristida plumosa* L. — Uau el-Chebìr: Dor el-Gussa; 5 ottobre;

*Cassia obovata* Collad. — Uau el-Chebìr; Dor el-Gussa; 5 ottobre;

*Daemia cordata* M. B. — Uau el-Chebìr; Dor el-Gussa, 5 ottobre;

(1) R. PAMPANINI, *Le piante raccolte nel 1930 dalla Contessa Onorina Bargagli-Petrucchi nel Gebel tripolitano e nella regione di Ghadames* (« Archivio botanico », vol. VII, p. 101, 1931).

(2) E. DURAND et G. BARRATTE, *Florae libycae prodromus*, Genève, 1910.

(3) THISELTON-DYER W. T. op. cit., VI, I, p. 38.

*Fagonia arabica* L. — Fra Uau e Temissa, 7 ottobre;  
*Fagonia kahirina* Boiss. — Uau el-Chebîr; Dor el-Gussa, 5 ottobre;  
*Francoeuria crispa* Coss. — Uau el-Chebîr; Garet Tuila, 4 ottobre;  
« Serir » presso el-Fogha, 14 ottobre;  
*Hyosciamus muticus* L. — Fra Uau e Temissa, 8 agosto;  
*Nitraria tridentata* Desf. — Uau el-Chebîr; Hatiet Maarûf, 26 settembre;  
*Phragmites vulgaris* Crép. var. *isiacus* Coss. et D. R. — Uau el-Chebîr;  
Hatiet Maarûf, 26 settembre;

*Tamarix nilotica* Bge. — Fra Uau e Temissa, 8 agosto.

Finora non erano state segnalate del Fezzan orientale: *Cassia obovata*, *Aristida plumosa*, *Fagonia arabica*, *Fagonia kahirina*, e *Francoeuria crispa*. La *Tamarix nilotica* è nuova per il Fezzan e la Tripolitania. Così pure l'*Aerva tomentosa* var. *Bovei*, anche come genere; come varietà, poi, è nuova per l'intera Libia.

*Hyosciamus muticus* è pure nuovo per la Libia, ed è interessante anche perchè con questa stazione, la quale è ora la più occidentale della sua area, che prima si arrestava alle oasi di Siva e di Omm el-Segheir, la flora libica acquista un notevole elemento orientale, che si stende dall'India all'Egitto <sup>(1)</sup>.

### III.

#### Riassumo.

Queste raccolte del Prof. A. Desio constano di 31 esemplari, i quali si riferiscono a 20 generi ed a 21 specie: 19 esemplari con 16 specie per la Cirenaica, 12 esemplari con 11 specie per la Tripolitania.

Sono nuovi:

per la Libia 1 genere, 1 specie ed 1 varietà (*Fimbristylis*, *Hyosciamus muticus*, *Aerva tomentosa* var. *Bovei*);

per la Cirenaica 1 genere (*Cassia*);

per la Tripolitania 1 specie (*Tamarix nilotica*).

Sono interessanti per la località:

per la Cirenaica: *Fagonia kahirina* ed *Heliotropium undulatum*;

per la Tripolitania: *Aristida plumosa*, *Cassia obovata*, *Fagonia arabica*, *Fagonia kahirina* e *Francoeuria crispa*.

(1) G. E. POST, op. cit., p. 570; E. DURAND et G. BARRATTE, op. cit., p. 176; R. MUSCHLER, op. cit., p. 853.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 3 aprile 1932 (anno X)*

*Presidenza del prof. sen. A. GARBASSO*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica** (Analisi). — *Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa. Nota* <sup>(1)</sup> del Socio F. SEVERI.

La Nota del FUBINI, presentata in questa stessa seduta e che l'A. ha avuto la cortesia di comunicarmi, m'induce a non differire ulteriormente la pubblicazione della dimostrazione del teorema, di cui il FUBINI dà una interessantissima estensione, e ch'io mi ero limitato ad enunciare l'anno scorso in questi « Rendiconti » (1° sem., p. 804), riservandomi d'inquadrarlo in ricerche più ampie, tuttora inedite, sulle funzioni analitiche di più variabili.

1. Il teorema cui alludo è questo:

*Se una funzione analitica  $f(x, y)$  di una variabile reale  $x$  e di una variabile complessa  $y (= y_1 + iy_2)$  è olomorfa sul contorno di un campo (tridimensionale)  $S$ , circondato da una superficie chiusa  $\sigma$ , essa è olomorfa anche nell'interno del campo.*

Suppongo, per semplicità, che  $\sigma$  sia una superficie dello spazio  $(x, y_1, y_2)$  segata lungo una sola linea chiusa non intrecciata e regolare  $l$

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1932.



(eventualmente ridotta ad un punto), da ogni piano (caratteristico)  $x = \text{cost.}$ , che la incontri. Sia  $M$  l'insieme degli eventuali punti singolari e lacunari della funzione, interni ad  $S$ . Poichè  $M$  è perfetto, nell'ipotesi del teorema nessun punto di  $\sigma$  è di accumulazione per  $M$ , onde è possibile determinare qualche piano  $x = a'$  attraversante  $S$  e non incontrante  $M$ , sicchè  $M$  giaccia tutto da una banda di questo piano. Sia  $x = a''$  un altro piano attraversante  $S$ , situato, rispetto al precedente, dalla banda opposta di  $M$ .

Le sezioni  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  dei detti piani con  $S$  e la zona staccata sopra  $\sigma$  dalla striscia spaziale compresa fra i due piani paralleli, costituiscono complessivamente una superficie chiusa,  $\sigma_0 + \sigma' + \sigma''$ , tale che sovr'essa e all'interno dello spazio  $S'$  da essa contornato, la data funzione  $f$  è olomorfa.

Ciò posto, costruiamo la funzione

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(x, t)}{t - y} dt,$$

ove  $l$  è la linea sezione di  $\sigma$  con un piano  $x = \text{cost.}$  che incontri  $S$ . S'intende che le varie  $l$  son percorse, sopra i singoli piani paralleli che le contengono, in un verso concorde. Per un dato  $x$ , la variabile complessa  $t$  percorre la linea  $l$ .

La funzione  $\varphi(x, y)$  è olomorfa rispetto ad  $x, y$  in ogni punto *interno* ad  $S^{(1)}$  e siccome, quando  $x$  varia nell'intervallo fra  $a'$ ,  $a''$ , estremi inclusi, la  $f(x, y)$  è olomorfa su tutta la superficie sezione di  $S$  con quel piano, così, in forza del teorema di CAUCHY,  $\varphi(x, y)$  è olomorfa non soltanto nell'interno di  $S'$ , ma anche sul contorno, e coincide in tutto  $S'$  con  $f(x, y)$ . Pertanto le  $f, \varphi$  coincidono in un campo a tre dimensioni e quindi dovunque (a meno di discontinuità artificiali della  $f$ , che si posson sempre supporre rimosse). Insomma  $f$  è prolungabile all'interno di  $S$  per mezzo di una funzione olomorfa.

E così il teorema è dimostrato.

Se il campo  $S$  non soddisfa all'ipotesi semplificatrice adottata, si potrà, in condizioni di ampia generalità, dividerlo in un numero finito di campi, in cui l'ipotesi stessa sia soddisfatta.

Il teorema di HARTOGS (Münch. Sitzungsber., 1906) relativo ad una  $f(x, y)$  analitica delle variabili complesse  $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$ , si ottiene come conseguenza immediata del precedente, considerando le sezioni del campo quadridimensionale  $\Gamma$ , ove è data  $f$ , cogli iperpiani  $x_2 = \text{cost.}$  passanti pei punti interni a  $\Gamma$ .

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. — La dimostrazione esposta è applicabile *anche se si sa soltanto che  $f$  è olomorfa nei punti di una calotta aperta  $\sigma_1$ , separata da una*

(1) Il fatto è elementare. Ved. p. es. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, II Bd., I Lief., II Aufl., 1929, p. 16.

superficie del tipo  $\sigma$  considerato, mediante un piano caratteristico. Allora  $f$  risulta olomorfa in tutto lo spazio circondato da  $\sigma_1$  e dalla sezione  $\sigma'_1$  di  $S$  con quel piano. Non occorre cioè di sapere *a priori* che  $f$  è olomorfa nell'interno di  $\sigma'_1$ . Si ricade così nel tipo di *campo aperto* considerato dal FUBINI.

In particolare se una funzione analitica  $f(x, y)$ , di una variabile reale  $x$  e di una variabile complessa  $y$ , è olomorfa nei punti di una superficie illimitata del tipo di un paraboloide, segata secondo campi chiusi semplicemente connessi dai piani  $x = \text{cost.}$  che l'attraversano, essa è olomorfa in ogni punto (proprio) interno al campo aperto circondato dalla superficie.

Queste conclusioni son applicabili ad ogni funzione reale  $u(x, y_1, y_2)$ , armonica in  $y_1, y_2$  e analitica in  $x$ , che sia olomorfa sopra  $\sigma_1$ , perchè ogni tal funzione è parte reale di una funzione analitica in  $x, y$  olomorfa sopra  $\sigma_1$ , come risulta dal teorema del n. 22 della mia Memoria: *Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche* («Memorie della R. Accademia d'Italia», 1931-32). La dimostrazione del FUBINI ha però il pregio di non uscire dall'ambito reale.

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. — All'ipotesi del teorema principale di questa Nota si può sostituire l'ipotesi meno restrittiva che la  $f(x, y)$  data sul contorno  $\sigma$  di  $S$ , sia continua sopra  $\sigma$  e olomorfa nei punti di contatto dei piani caratteristici tangenti a  $\sigma$ , senza che il ragionamento cessi di valere.

Analogamente dicasi della calotta  $\sigma_1$ , di cui all'osservazione precedente: basta cioè che la funzione data sia continua nella calotta e olomorfa nel punto ove  $\sigma_1$  è toccata da un piano caratteristico.

2. Dal teorema dimostrato scende la soluzione del problema di Dirichlet per le funzioni analitiche di una variabile reale  $x_1$  e di una variabile complessa  $y$ . Invero, il mio metodo di passaggio dal reale al complesso, applicato ad una funzione olomorfa del punto della superficie  $\sigma$ , consente (vedi la mia Nota lincea citata, n. 8, p. 802) di risolvere subito il problema locale di CAUCHY, costruendo una funzione di  $x_1, y$  olomorfa attorno ad un pezzo di  $\sigma$  ed avente ivi per traccia la data funzione. Il che del resto equivale a ricostruire in questo caso la soluzione data dal LEVI-CIVITA al problema di CAUCHY per una funzione analitica  $f(x, y)$  di due variabili complesse  $x, y$  ( $x = x_1 + ix_2$ ), la quale appunto fornisce come traccia sull'iperpiano  $x_2 = 0$  la costruenda funzione di  $x_1, y$ . Le due cose si equivalgono, perchè nessun pezzo di  $\sigma$  è caratteristico. (Le sole superficie caratteristiche contenute in  $x_2 = 0$  son i piani  $x_1 = \text{cost.}$ ). Le soluzioni inerenti ai singoli pezzi di  $\sigma$  son poi elementi di una stessa funzione analitica di  $x_1, y$ , perchè due distinte funzioni di  $x_1, y$ , olomorfe in uno stesso campo tridimensionale, posson coincidere al più nei punti di una linea. (Viceversa lungo ogni linea regolare della  $S$ ,  $x_2 = 0$ , coincidono infinite funzioni

olomorfe di  $x_1, y$ ). Fanno eccezione i due punti (semplici)  $P, Q$  dove  $\sigma$  è toccata da piani caratteristici  $x_1 = \text{cost.}$  Nell'intorno di  $P$  o di  $Q$  non è infatti possibile di risolvere, rispetto ad  $\bar{y} (= y_1 - iy_2)$ , l'equazione di  $\sigma$ , scritta sotto la forma  $\Theta(x_1, y, \bar{y}) = 0$ . (Ved. il n. 25 della mia citata Memoria: *Contributi, ecc.*). Perciò occorre che la funzione data  $f(x_1, y, \bar{y})$ , olomorfa su  $\sigma$ , soddisfaccia a particolari condizioni nei punti  $P, Q$ . Per es., se  $\sigma$  è la superficie sferica  $x_1^2 + y\bar{y} = 1$ , occorrerà che  $f\left(x_1, y, \frac{1-x_1^2}{y}\right)$  resti olomorfa anche in  $x_1 = \pm 1, y = 0$ . Allora, in forza del teorema del n. 1, la  $f\left(x_1, y, \frac{1-x_1^2}{y}\right)$  sarà olomorfa in tutto  $S$  e subordinerà su  $\sigma$  la funzione data.

*È dunque possibile costruire una (ed una sola) funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa, la quale sia olomorfa in tutto il campo  $S$  e subordini sul contorno  $\sigma$  di  $S$ , una data funzione olomorfa del punto di  $\sigma$ . Basta all'uopo che quest'ultima funzione soddisfaccia a talune semplici condizioni nei punti di  $\sigma$  dove il piano tangente è caratteristico.*

Per la traccia sul contorno di una funzione reale armonica, olomorfa in  $S$ , non si richiede invece nessuna condizione (ved. il n. 23 della mia Memoria: *Contributi, ecc.*).

**Matematica.** — *Di una classificazione dell'equazioni lineari del second'ordine alle derivate ordinarie fondata sulle relazioni ricorrenti.* Nota<sup>(1)</sup> del CORRISP. P. BURGATTI.

1. Data un'equazione lineare del second'ordine della forma

$$(1) \quad E_n(y) = y'' + Qy' + R_n y = 0,$$

ove  $Q$  è funzione della sola variabile  $x$  e  $R_n$  funzione di  $x$  e di un numero  $n$  variabile con discontinuità, cioè per incrementi finiti, esistono sempre delle relazioni ricorrenti fra le soluzioni  $y_n$  di  $E_n(y) = 0$  e le  $y_{n+1}$  di  $E_{n+1}(y) = 0$ ; ma in massima è difficile determinarle. Per dimostrare questo ci si può limitare a considerare la sola relazione ricorrente del tipo

$$(2) \quad f(x, n) y'_n - \varphi(x, n) y_n = a_n y_{n+1}, \quad (a_n = \text{cost.})$$

che permette di passare da una  $y_n$  a una  $y_{n+1}$ , giacchè tutte le altre si deducono combinando questa e la sua derivata con l'equazione differenziale.

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1932.

Considerando  $E_n$  come un operatore, dall'ovvia relazione

$$E_n = E_{n+1} + (R_n - R_{n+1}),$$

si ottiene

$$(3) \quad \begin{cases} E_{n+1}(\varphi y_n) = E_n(\varphi y_n) + (R_{n+1} - R_n)\varphi y_n \\ \phantom{E_{n+1}(\varphi y_n)} = 2\varphi' y_n' + [\varphi'' + Q\varphi' + (R_{n+1} - R_n)\varphi] y_n. \end{cases}$$

Analogamente si ha

$$\begin{aligned} E_{n+1}(f y_n') &= E_n(f y_n') + (R_{n+1} - R_n) f y_n' \\ &= f E_n(y_n') + (f'' y_n' + 2f' y_n'') + Qf' y_n' + (R_{n+1} - R_n) f y_n'; \end{aligned}$$

cosicchè utilizzando la (1) e la sua derivata per eliminare  $y_n'''$  e  $y_n''$ , si trova dopo qualche riduzione

$$(4) \quad E_{n+1}(f y_n') = [f'' - (Qf)' + (R_{n+1} - R_n)f] y_n' - (2f' R_n + f R_n') y_n.$$

Ora, affinchè il primo membro della (2) sia una soluzione di  $E_{n+1}(y) = 0$  occorre che la differenza di (3) e (4) risulti identicamente nulla. Si hanno perciò le condizioni

$$(I) \quad \begin{cases} 2\varphi' = f'' - (Qf)' + (R_{n+1} - R_n)f \\ -(2f' R_n + f R_n') = \varphi'' + Q\varphi' + (R_{n+1} - R_n)\varphi. \end{cases}$$

Esse definiscono le funzioni  $f$  e  $\varphi$  quando sian noti i coefficienti della (1); ma, come si vede, la loro determinazione dipende in massima da un problema che supera in difficoltà l'integrazione della (1).

Constatato questo, ci si può proporre il problema inverso, e cioè *determinare l'equazioni del tipo (1) tali che fra le soluzioni di  $E_n(y) = 0$  e quelle di  $E_{n+1}(y) = 0$  sussista una relazione ricorrente della forma (2) data a priori*. Diremo per brevità «*equazioni che ammettono una relazione ricorrente (2) data a priori*».

Anche questo problema è difficile in tutta la sua generalità, ma lo si può opportunamente limitare considerando i casi più tipici.

Si perviene così a una interessante classificazione dell'equazioni del tipo (1). A questa appunto è dedicata la Comunicazione che mi onoro di presentare all'Accademia.

2. Supponiamo che  $\varphi$  sia una costante dipendente da  $n$  e che  $f$  dipenda dalla sola  $x$ . In questo caso esiste sempre un cambiamento di variabile che lascia alla (1) la forma presupposta e riduce la (2) alla forma

$$(II) \quad y_n' + c_n y_n = a_n y_{n+1}.$$

È sempre sottinteso che  $y_{n+1}$  non significa già la stessa  $y_n$  cambiato  $n$  in  $n+1$ , ma semplicemente una soluzione di  $E_{n+1}(y) = 0$ . Però in molti casi la  $y_{n+1}$  potrà avere cotesto significato.

Tutte l'equazioni (I) che con un cambiamento di variabile ammettono una relazione ricorrente della forma (II) si diranno *appartenenti alla prima classe*.

Sia invece  $\varphi$  funzione anche di  $x$  e la  $f$  della sola  $x$ . Con un opportuno cambiamento di variabile si potrà ridurre la (2) alla forma

$$(III) \quad y'_n + \varphi(x, n) y_n = a_n y_{n+1},$$

pur rimanendo la (I) del tipo presupposto. Ebbene tutte l'equazioni (I) che con un cambiamento di variabile ammettono una relazione ricorrente (III) si diranno *appartenenti alla seconda classe*.

Sia ancora  $\varphi_n = c_n$ , ma  $f$  della forma  $b_n f_1(x) + f_2(x)$ , ove  $b_n$  dipende solo da  $n$ . Col cambiamento di variabile

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{f_1}$$

la relazione ricorrente (2) si riduce alla forma

$$(IV) \quad (b_n + \psi(x)) y'_n + c_n y_n = a_n y_{n+1},$$

rimanendo la (I) del tipo voluto. L'equazioni riducibili ad ammettere una relazione ricorrente della forma (IV) si diranno *appartenenti alla terza classe*.

Tutte le altre equazioni che non ammettono relazioni ricorrenti riducibili alle forme precedenti formeranno la *quarta classe*. Sono certamente le più numerose; ma l'equazioni più note agli analisti per la loro importanza appartengono alle altre classi.

Per stare nei casi più interessanti supporremo che la  $R_n$  dipenda razionalmente da  $n$ .

3. Cerchiamo l'equazioni della prima classe. Poniamo nelle (I)  $f = 1$ ,  $\varphi = c_n$  (costante); si ottengono le relazioni

$$R_{n+1} - R_n = Q' \quad , \quad -R'_n = c_n (R_{n+1} - R_n).$$

Si deduce

$$R'_n = -c_n Q',$$

e quindi

$$R_n = -c_n Q + a_n$$

$$R_{n+1} = -c_{n+1} Q + a_{n+1},$$



Ne segue

$$-(c_{n+1} - c_n)Q + (a_{n+1} - a_n) = Q'.$$

Poichè  $Q$  dipende soltanto da  $x$ , questa non è possibile se non risulta

$$c_{n+1} - c_n = -h, \quad a_{n+1} - a_n = k,$$

essendo  $h$  e  $k$  costanti indipendenti da  $n$ . Per l'ipotesi fatta su  $R_n$ , dovremo porre

$$c_n = -hn + m, \quad a_n = kn + l;$$

cosicchè la precedente diventa

$$hQ + k = Q',$$

da cui

$$Q = -\frac{k}{h} + \frac{ce^{bx}}{h},$$

e quindi

$$R_n = c \left( n - \frac{m}{h} \right) e^{bx} + q.$$

L'equazione differenziale ha dunque la forma

$$y'' + \frac{1}{h}(ce^{bx} - k)y' + \left[ \left( n - \frac{m}{h} \right) ce^{bx} + q \right] y = 0,$$

ed ammette la relazione ricorrente

$$y'_n + (hn - m)y_n = ay_{n+1}.$$

Conviene eseguire la trasformazione

$$h\xi = ce^{bx} + p.$$

Si trova

$$(5) \quad (h\xi - p)y'' + (\xi - p_1)y' + \left( n - \frac{m}{h} + \frac{q}{h\xi - p} \right) y = 0,$$

e la relazione ricorrente

$$(5') \quad (h\xi - p)y'_n + (hn - m)y_n = ay_{n+1}.$$

Concludiamo pertanto che la prima classe è formata dall'equazioni riducibili alla forma (5).

4. Passiamo alla ricerca dell'equazioni appartenenti alla seconda classe. Ponendo nelle (I)  $f = 1$ , si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} 2\varphi' &= R_{n+1} - R_n - Q' \\ -R'_n &= \varphi'' + Q\varphi' + (R_{n+1} - R_n)\varphi. \end{aligned}$$

Dalla prima si deduce

$$2\varphi = -Q + \Phi_{n+1} - \Phi_n + c_n = -Q + \lambda_n,$$

posto

$$\Phi_n = \int R_n dx;$$

talchè sostituendo nell'altra e integrando risulta

$$Q' + \frac{Q^2}{2} - \lambda'_n - \frac{\lambda_n^2}{2} = 2R_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n,$$

ossia, per le posizioni fatte,

$$(6) \quad 2Q' + Q^2 - 2(\Phi'_{n+1} + \Phi'_n) - (\Phi_{n+1} - \Phi_n + c_n)^2 = \varepsilon_n;$$

equazione mista alle derivate ordinarie e alle differenze finite, la cui generale soluzione non par facile a determinarsi.

Facciamo il caso di  $c_n = 0$ . Posto  $2Q' + Q^2 = f(x)$ , vediamo di soddisfarla ponendo

$$(6') \quad \Phi_n = N_n \psi(x) + \chi(x).$$

Si ottiene

$$2(N_{n+1} + N_n)\psi' + (N_{n+1} - N_n)^2\psi^2 = f(x) - 4\chi' - \varepsilon_n;$$

dove il secondo membro è la differenza di una funzione della sola  $x$  e di una della sola  $n$ . Ci si persuade facilmente che tale equazione non può sussistere se non è

$$(7) \quad \psi' = k\psi^2 - a^2$$

con  $k$  e  $a$  costanti indipendenti da  $n$ . E poichè sostituendo risulta

$$[2k(N_{n+1} + N_n) + (N_{n+1} - N_n)^2]\psi^2 - 2\varepsilon^2(N_{n+1} + N_n) = f - 4\chi' - \varepsilon_n,$$

dovrà essere

$$(8) \quad 2k(N_{n+1} + N_n) + (N_{n+1} - N_n)^2 = h$$

e quindi

$$(8') \quad h\psi^2 = 2Q' + Q^2 - 4\chi' + m. \quad (m = f(n))$$

Le (7) e (8') definiscono le funzioni  $\psi$  e  $\chi$ , mentre la (8), equazione alle differenze finite, definisce  $N_n$ .

Si ha poi

$$\begin{aligned} 2\varphi &= -Q + (N_{n+1} - N_n)\psi \\ R_n &= \Phi'_n = N_n\psi' + \chi', \end{aligned}$$

ossia per le precedenti

$$R_n = \left(N_n - \frac{h}{4k}\right)\psi' + \frac{1}{4} \left\{ 2Q' + Q^2 - \frac{h\epsilon^2}{k} + m \right\}.$$

Conviene scegliere come forma canonica di quest'equazioni quella che ne risulta mediante la trasformazione

$$y = \lambda\chi, \quad \lambda = e^{-\frac{1}{2} \int Q dx}.$$

Con ciò si fa sparire il secondo termine e si trova

$$R_n = \left(N_n - \frac{h}{k}\right)\psi' + \left(m - \frac{h}{k}a^2\right), \quad \varphi = \frac{1}{2}(N_{n+1} - N_n)\psi;$$

cosicchè concludiamo che *appartengono alla seconda classe l'equazioni riducibili alla forma*

$$(9) \quad \chi'' + \left[\left(N_n - \frac{h}{k}\right)\psi' + m - \frac{h}{k}a^2\right]\chi = 0,$$

ove (si ricava dalla (7))

$$(9') \quad \left| \begin{aligned} \psi &= \frac{a}{\sqrt{k}} \frac{1 + ce^{2\sqrt{k}ax}}{1 - ce^{2\sqrt{k}ax}} \quad \text{per } a \neq 0 \\ \psi &= \frac{1}{l - kx} \quad \text{per } a = 0. \end{aligned} \right.$$

Appartengono a questo tipo l'equazione di Bessel

$$\left(a = l = 0, \quad k = h = -1, \quad Q = \frac{1}{x}, \quad N_n = n^2\right),$$

quella di L egendre

$$(a = \sqrt{-1}, \quad h = m = 0, \quad k = -1, \quad N_n = n(n+1), \quad c = 1),$$

ed altre che generalizzano queste due.

5. La ricerca dell'equazioni della seconda classe, che sono forse le più interessanti come si rileva dagli esempi portati, non è esaurita dalle considerazioni precedenti, mancando la risoluzione generale della (6). Si può ottenere un altro risultato specializzando *a priori* la forma di  $\varphi$ . Per esempio, se si pone  $\varphi = N_n + \chi(x)$ , ove  $N_n$  dipende solo da  $n$ , si trae dalla prima delle (I)

$$2\chi' + Q' = R_{n+1} - R_n$$

e quindi

$$R_n = n(2\chi' + Q') + b;$$

cosicchè la 2<sup>a</sup> delle (5) diventa

$$\chi'' + Q\chi' + (2\chi' + Q')(N_n + \chi) = -n(2\chi'' + Q'),$$

che integrata dà

$$\chi' + Q\chi + \chi^2 + 2N_n\chi + N_nQ = -2n\chi' - nQ' + \varepsilon_n.$$

Scrivendola sotto la forma

$$N_n(2\chi + Q) + n(2\chi' + Q') = \varepsilon_n - f(x),$$

si vede che non può verificarsi se non si pone

$$2\chi + Q = b, \quad \text{oppure} \quad N_n = ln + m.$$

Il primo caso è da scartarsi, altrimenti  $R_n$  risulta indipendente da  $n$ . Nel secondo caso si ha

$$n[l(2\chi + Q) + 2\chi' + Q'] + m(2\chi + Q) = \varepsilon_n - f(x),$$

la quale richiede che sia

$$l(2\chi + Q) + (2\chi' + Q') = b \quad (\text{cost})$$

$$m(2\chi + Q) = -f(x) + k = -(\chi' + Q\chi + \chi^2) + k.$$

Posto  $2\chi + Q = F(x)$ , quest'equazioni diventano

$$(10) \quad F' + lF = m, \quad mF + \frac{F^2 - Q^2}{2} + \frac{F' - Q'}{2} = k.$$

Da queste si deduce

$$F = \frac{b}{l} + ce^{-lx}$$

$$\frac{1}{2}\left(Q' + \frac{Q^2}{2}\right) = mF + \frac{F^2}{4} + \frac{F'}{2} - k = p + qe^{-lx} + \frac{c^2}{4}e^{-2lx},$$

ove  $p$  e  $q$  sono arbitrarie. Dopo ciò risulta

$$(11) \quad \begin{cases} R_n = -\ln ce^{-lx} + b \\ \varphi = \ln - \left( \frac{Q}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{c} + ce^{-lx} \right) \right). \end{cases}$$

Quantunque  $Q$  soddisfi a un'equazione di Riccati non riducibile in massima a quadratura, si può trovare la forma esplicita della corrispondente equazione differenziale operando la nota sostituzione

$$y = \lambda \chi, \quad \lambda = e^{-\frac{1}{2} \int Q dx}.$$

Infatti l'equazione si riduce, come è noto, a

$$\chi'' + \left( R_n - \frac{Q'}{2} - \frac{Q^2}{4} \right) \chi = 0,$$

che per le formule precedenti diventa

$$\chi'' + \left( \frac{c^2}{4} e^{-2lx} + ae^{-lx} + b \right) \chi = 0.$$

Ed eseguendo infine il cambiamento di variabile

$$e^{-lx} = \xi$$

si riduce a

$$(12) \quad \xi^2 \chi'' + \xi \chi' + \frac{1}{l^2} \left( \frac{c^2}{4} \xi^2 + a\xi + b \right) \chi = 0.$$

Dunque anche l'equazioni riducibili a questa forma (12) appartengono alla seconda classe. Ammettono la relazione ricorrente

$$\xi \chi'_n - \left[ \ln - \frac{b}{l} - \left( \frac{Q}{2} + c\xi \right) \right] \chi_n = a_n \chi_{n+1}.$$

In particolare prendendo  $b = k$ ,  $m = l$ , le (10) sono soddisfatte da  $F = -Q$  con  $Q$  soddisfacente all'equazione

$$Q' + lQ = -k.$$

Si ricava

$$Q = \left( \frac{c}{l} e^{-lx} - b \right) \frac{1}{l}, \quad \chi = -Q, \quad R_n = cne^{-lx} + b.$$

L'equazione differenziale con la trasformazione

$$-l\xi = ce^{-lx} - r$$



diventa

$$(13) \quad (r - l\xi) y'' + \left( \frac{r-k}{l} - l - \xi \right) y' + \left( n + \frac{h}{r - l\xi} \right) y = 0;$$

molto simigliante all'equazioni della prima classe, eppure non riducibile a quelle in quanto ammettono una relazione ricorrente di tipo diverso. Se qui si fa  $h = 0$ ,  $k = r$ , si ottengono quell'equazioni con coefficienti lineari che ammettono soluzioni polinomiali, delle quali ho fatto uno studio in una Nota recente <sup>(1)</sup>.

6. La determinazione in forma esplicita dell'equazioni appartenenti alla terza classe non pare conseguibile. Se si pone nelle (I)  $\phi = c_n$ , la seconda equazione può essere scritta nella forma

$$-(f^2 R_n)' = c_n (R_{n+1} - R_n) f,$$

dalla quale eliminando  $R_{n+1} - R_n$  mediante la prima e poi integrando si ottiene

$$f^2 R_n = c_n (f' - Qf) + \varepsilon_n.$$

La prima delle (I) dà poi

$$R_{n+1} - R_n = (Qf' - f'') \frac{1}{f}.$$

Se ora è  $f = b_n + \psi(x)$ , si può porre

$$Qf' - f'' = Q\psi' + \psi'' = F(x), \quad R_n = F(x) H_n,$$

e si ha

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{b_n + \psi}$$

$$H_n = \frac{c_n (\psi' - Q\psi) - c_n b_n Q + \varepsilon_n}{F(x) (b_n + \psi)^2}.$$

Questo sistema assai complicato offre le condizioni affinchè l'equazione appartenga alla terza classe.

Malgrado le difficoltà che ho accennate, mi pare che la classificazione qui prospettata dell'equazioni del tipo (1) fondata sulla forma della relazione ricorrente (2) possa essere di qualche utilità nel loro studio.

(1) « Ann. della Scuola Normale Sup. di Pisa », serie II, vol. I, 1931.

**Matematica (Analisi).** — *Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs ed uno del Severi.* Nota <sup>(1)</sup> del CORRISP. G. FUBINI.

È noto il teorema dell'Hartogs <sup>(2)</sup>: Una funzione analitica delle variabili complesse  $x + iy, z + it$ , olomorfa nei punti del contorno di un dominio limitato dello spazio a 4 dimensioni  $(x, y, z, t)$  è olomorfa anche nei punti interni.

Ancora più espressivo è il teorema enunciato senza dimostrazione dal Severi <sup>(3)</sup>: Una funzione analitica della variabile complessa  $x + iy$  e della variabile reale  $z$ , olomorfa nei punti del contorno di un dominio limitato dello spazio a tre dimensioni  $(x, y, z)$  è olomorfa anche nei punti interni.

Questo teorema si può considerare come un caso particolare di una proposizione molto più generale, valida anche per campi aperti e relativa alle soluzioni di una equazione differenziale del tipo ellittico. Ma, per maggior chiarezza, procediamo per gradi.

Sia  $D$  un dominio limitato da una superficie  $S$  e da un piano  $z = \text{cost.}$  nello spazio  $(x, y, z)$ . Tale piano sia per es. il piano  $z = 0$ , e la  $S$  appartenga al semispazio  $z \geq 0$ . Sia  $k$  il massimo valore che la  $z$  assume in un punto di  $D$  e di  $S$ . Per semplicità supporremo in più che ogni piano  $z = a = \text{cost.}$  con  $0 < a \leq k$  tagli  $D$  in un campo piano semplicemente connesso (che per  $a = k$  si può ridurre ad un solo punto); (è facile però persuadersi che questa condizione si può rendere assai meno restrittiva). Sia  $\Gamma$  il campo aperto, che si deduce da  $D$  sopprimendo i punti del piano  $z = 0$ . Vale allora il teorema:

*Se  $u(x, y, z)$  è una funzione reale armonica in  $x, y$  ed analitica in  $z$ , olomorfa nei punti di  $S$ , essa è olomorfa in tutto il campo APERTO  $\Gamma$  <sup>(4)</sup>. Noi ammettiamo cioè che per ogni punto  $A$  di  $S$  esista un intorno  $\alpha$  tale che la  $u$  sia olomorfa nei punti di  $\alpha$ , che sono interni a  $\Gamma$ . Tutti questi intorni riempiranno uno straterello  $\Sigma$  compreso tra  $S$  ed una superficie  $S'$  interna a  $D$ . Noi abbiamo pertanto ammesso che la  $u$  sia olomorfa nei punti di  $\Sigma$ . Sia  $b$  il massimo valore della  $z$  per un punto di  $S'$ ; sarà  $0 < b < k$ .*

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) HARTOGS, « Münch. Sitzungsber. », t. 36.

(3) SEVERI, questi « Rendiconti », 1° semestre 1931.

(4) Si noti l'analogia di questi domini e di quelli che si presentano nello studio delle equazioni paraboliche.

Consideriamo in  $\Gamma$  la funzione  $U(x, y, z)$  armonica in  $x, y$ , cioè soddisfacente alla

$$(1) \quad \Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

che nei punti di  $S$  assume gli stessi valori della funzione data  $u$ . E, per un momento, ammettiamo in via provvisoria che, oltre ad essere analitica in  $x, y$  (cioè che segue dalla armonicità), sia anche olomorfa in  $z$ .

Noi proveremo che in  $\Sigma$  è  $U = u$ , e che quindi la  $u$  è prolungabile in modo olomorfo a tutto il campo  $\Gamma$ , come si doveva dimostrare. Ciò è evidente per quel dominio  $\sigma$  contenuto in  $\Sigma$ , che è limitato dai piani  $z = h, z = k$ . Infatti su ogni piano  $z = a = \text{cost.}$  con  $h < a < k$ , le  $U, u$  sono funzioni armoniche in  $x, y$  che prendono valori uguali nei punti comuni a tale piano ed alla superficie  $S$ . E, poichè si può passare da un punto qualsiasi  $A$  di  $\sigma$  ad un punto  $B$  qualunque di  $\Sigma$  con una spezzata tutta contenuta in  $\Sigma$  e formata da lati paralleli agli assi coordinati, basterà prolungare analiticamente  $U = u$  lungo una tale spezzata, per dimostrare l'asserto che  $U = u$  è nullo in tutto  $\Sigma$ .

Ma ritorniamo sul punto che in via provvisoria abbiamo ammesso, e che può sembrare intuitivo se la  $S$  è una superficie analitica; se la  $S$  non fosse tale, potremmo pensare di sostituirla un'altra superficie analitica tutta contenuta in  $\Sigma$ . Sembra però più rigoroso e completo procedere nel modo seguente. La uguaglianza  $U = u$  è già stata dimostrata per i punti di  $\sigma$  (per cui  $h < z < k$ ). Consideriamo ora un cilindro con le generatrici parallele all'asse delle  $z$ , limitato dai piani  $z = h_1$  e  $z = k_1$  con  $0 < h_1 < h < k_1 < k$ , tale che il suo contorno laterale sia tutto interno allo strato  $\Sigma^{(1)}$ . Costruiamo la funzione  $V$ , armonica nella intersezione di tale volume cilindrico con uno qualsiasi dei piani  $z = a = \text{cost.}$  con  $h_1 < a < k_1$ , che sul contorno di tale sezione coincida con  $u(x, y, z)$ . Ciò equivale a costruire su una delle basi del cilindro una funzione armonica che sul contorno assume i valori  $u(x, y, z)$  dipendenti in modo analitico non solo dalle  $x, y$ , ma anche dai valori di un parametro  $z$  variabile da  $h_1$  a  $k_1$ . È immediata conseguenza delle formole di Green che la  $V$  sarà analitica in  $z$ . Come sopra si dimostrerà la  $V = u$  per quella parte  $\sigma_1$  del nostro cilindro che è compresa tra i piani  $z = h$  e  $z = k_1$  e se ne dedurrà prolungando analiticamente lungo una parallela all'asse delle  $z$ , che  $V$  è il prolungamento analitico (olomorfo) della  $u$  in tutto il cilindro considerato. Con una successione di cilindri analoghi, ciascuno dei quali ha una parte comune col precedente (così come il cilindro testè considerato aveva una parte in comune con  $\sigma$ ), si dimostra la prolungabilità della  $u$  in modo analitico e olomorfo a tutto il campo  $\Gamma$ .

(1) Si può anche imporre che il contorno delle basi sia una linea analitica o si possa scomporre in un numero finito di archi analitici.

È evidente che il precedente teorema è immediatamente estendibile dalle funzioni armoniche in  $(x, y)$ , cioè soddisfacenti alla (1), alle soluzioni  $u$  di un'altra qualsiasi equazione  $E(u) = 0$  del tipo ellittico (ciò che assicura l'analiticità della  $u$  nelle  $x, y$ ), purchè per tale equazione si possa definire (per i campi da noi considerati) un problema al contorno, per cui valgano i teoremi di esistenza e di unicità, e per cui sia vero che, se i dati al contorno sono funzioni analitiche delle  $x, y$  e di un parametro  $\zeta$ , anche la funzione che risolve il problema considerato è analitica in  $\zeta$  (almeno nel caso che il contorno sia scomponibile in un numero finito di linee analitiche). Queste condizioni, verisimilmente assai poco restrittive, non escludono nè le equazioni non lineari, nè le equazioni totalmente ellittiche di ordine superiori al secondo; e il loro studio accurato può essere oggetto di utili ricerche future. Si potrebbero anche studiare equazioni, i cui coefficienti dipendono analiticamente dalla  $\zeta$ , totalmente ellittiche nel dominio considerato (e nel suo contorno) (che pertanto si possono considerare, volendo, come paraboliche nelle tre variabili  $x, y, \zeta$ ). Le generalizzazioni iperspaziali non presentano difficoltà.

**Matematica.** — *Su alcuni sviluppi nuovi del calcolo operatorio funzionale.*  
Nota del Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica** (Ottica astronomica). — *Sulla pretesa realtà della contrazione di Lorentz e sulla determinazione del moto assoluto della Terra.*  
Nota<sup>(1)</sup> del Corrisp. M. LA ROSA.

In questi ultimi anni il prof. Courvoisier, dell'Osservatorio di Babelsberg, ha pubblicato alcune interessanti ricerche astronomiche secondo le quali resterebbe provata « la realtà fisica » della famosa contrazione di Fitz Gerald-Lorentz, e verrebbe misurato il moto assoluto della Terra nello spazio. Sarebbe infatti venuta in luce, dai risultati di certe misure, una deformazione della crosta terrestre, che dovrebbe ritenere imputabile alla famosa contrazione per effetto di un moto traslatorio, comune a tutti i corpi della Galassia, che sarebbe diretto verso un punto molto vicino a « Cappella » con una velocità di circa 600 Km/sec.

Non occorre spendere parola per segnalare l'importanza di tali ricerche, sia per il valore che hanno questi risultati per se stessi, e sia per i presupposti teorici che esse riaffermano; presupposti che ci riporterebbero alla concezione di un universo sospeso in un *mezzo* fisico in quiete assoluta, costituente riferimento universale.

Ora senza voler prendere posizione in merito all'attendibilità dei risultati delle osservazioni in parola, e tanto meno in merito alla possibilità di un ritorno a posizioni teoriche, ritenute come definitivamente sorpassate, credo opportuno richiamare l'attenzione dei fisici e degli astronomi, sopra un argomento, che mi sembra contrario all'ammissibilità — nel terreno concreto dei fatti — della famosa ipotesi della contrazione; argomento che ebbi occasione di sfiorare, in un mio scritto di molti anni sono, e su cui non credetti allora conveniente di fermarmi, poichè la teoria della relatività, fin dalla sua prima formulazione, aveva tolto ogni valore di realtà concreta alla contrazione in parola.

In occasione di un esame sui fondamenti sperimentali del 2° principio della « relatività ristretta » (dal quale fui condotto a suggerire la convenienza di ripetere l'esperienza di Michelson con luce estra-terrestre, come fu fatto in seguito da Tomascheck e da Dayton G. Miller) calcolai il ritardo  $\tau$  con cui i due fasci di luce si propagherebbero nell'apparato di Michelson, quando lungo i due bracci di esso, invece di trovarcisi l'aria (o meglio *l'etere libero*), vi fossero stati opportunamente introdotti due mezzi materiali di natura differente<sup>(2)</sup>.

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) Cfr. M. LA ROSA, *Sui fondamenti sperimentali del 2° principio ecc.* « N. C. », s. VI, v. III, 1912.

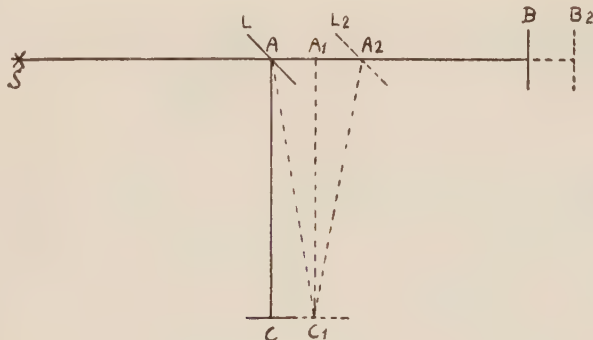


Per comodità di chi legge, riproduco sommariamente il calcoletto:

Siano  $d_1$  e  $d_2$  le lunghezze dei due bracci dello strumento,  $n_1$  ed  $n_2$  gli indici assoluti dei due mezzi (al riposo), e sia  $v$  la velocità di traslazione dello strumento, diretta secondo il braccio  $d_1$ . Secondo la teoria di Lorentz (riferimento assoluto) le onde provenienti da una sorgente in quiete con il mezzo, dovrebbero impiegare per propagarsi dal punto A (vedi figura) dello apparato di Michelson allo specchio B, lungo il braccio  $d_1$ , il tempo dato dalla relazione:

$$t_1 = \frac{d_1 + vt_1}{c_1 + \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} v} = \frac{d_1}{c_1} \left( 1 + \frac{v}{n_1^2 c_1} + \frac{v^2}{n_1^4 c_1^2} + \dots \right)$$

dove  $c_1 = c/n_1$  è la velocità della luce nel mezzo d'indice  $n_1$ , (nello stato di riposo) mentre  $c_1 + \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} v$  è, com'è noto, quella della luce nel mezzo in moto.



Analogamente il tempo del viaggio di ritorno da B ad A è dato da

$$t_2 = \frac{d_1 - vt_2}{c_1 - \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} v} = \frac{d_1}{c_1} \left( 1 - \frac{v}{n_1^2 c_1} + \frac{v^2}{n_1^4 c_1^2} - \dots \right)$$

Sicchè, limitandoci ai termini di 2° ordine, si ha, per l'andata ed il ritorno il tempo  $t'$  dato dalla seguente relazione:

$$t' = 2 \frac{d_1}{c_1} \left( 1 + \frac{v^2}{n_1^4 c_1^2} \right).$$

Per la propagazione lungo il braccio orientato normalmente alla traslazione abbiamo che, le onde partite dal punto A della laminetta L, sono trascinate lateralmente dal mezzo materiale con la velocità  $\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2} v$ . Esse quindi re-

stano sempre più indietro rispetto a tutto l'apparecchio, che cammina con la velocità  $v$ , e dal quale dunque si vedranno allontanare con la velocità  $\frac{v}{n_2}$ .

Affinchè le onde partite da A vadano, dopo riflessione sullo specchio C a ritrovare il punto A bisogna, dunque, che percorrano in andata il cammino  $AC_1$  ed in ritorno il cammino eguale  $C_1 A_2$ , dove:

$$CC_1 = AA_1 = A_1 A_2 = \frac{v}{n_2} t'_1,$$

essendo  $t'_1$  il tempo del viaggio da A a  $C_1$ . Ora evidentemente questo tempo dovrà risultare legato alla velocità di propagazione delle onde lungo  $AC_1$  e  $C_1 A_2$  (cioè  $c_2 = \frac{c}{n_2}$ ) ed alla lunghezza  $d_2$  del braccio, dalla relazione:

$$c_2^2 t'^2_1 = \frac{v^2}{n_2^4} t'^2_1 + d_2^2$$

che si giustifica subito guardando la figura, e da cui si deduce (dentro il 2° ordine in  $v/c$ ):

$$t'_1 = \frac{d_2}{c_2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c_2^2 n_2^4} \right).$$

Per l'andata ed il ritorno si richiederà evidentemente un tempo  $t''$  doppio di questo.

Se si suppone che i due cammini ottici, al riposo, siano stati scelti uguali, cioè se si suppone:

$$n_1 d_1 = n_2 d_2 = \delta$$

il ritardo  $\tau = t' - t''$  ci verrà dato da:

$$\tau = \frac{\delta v^2}{c^3} \frac{2 n_2^2 - n_1^2}{n_1^2 n_2^2}.$$

Esso nel caso in cui fosse  $n_1 = n_2 = 1$  si riduce a  $\tau = \frac{\delta v^2}{c^3}$  che è appunto quel ritardo che verrebbe compensato dalla famosa contrazione del braccio parallelo alla traslazione secondo il rapporto  $\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) : 1$ . Nel caso generale, perchè il compenso possa aver luogo occorrerebbe ammettere che la contrazione avvenga nel rapporto

$$\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \frac{2 n_2^2 - n_1^2}{n_1^2 n_2^2} \right) : 1$$

ciò che mette in imbarazzo la famosa ipotesi.

Infatti, poichè il ritardo risulta funzione degli indici di rifrazione, il cercarne il compenso nella contrazione del braccio orientato secondo la traslazione, ci porterebbe a questa conclusione: che lasciando inalterato tutto l'apparato di Michelson (forma, struttura, natura di tutte le sue parti, ecc.), lasciando inalterato anche il mezzo disposto lungo quel braccio, e *cambiando solo il mezzo* incontrato dalle onde *lungo il braccio normale* (ciò che potrebbe farsi semplicemente introducendo liquidi differenti in un tubo opportunamente disposto) dovrebbe automaticamente *cambiare la contrazione del braccio parallelo a v*, ed in misura tale da adattarsi al nuovo mezzo introdotto, conformemente al rapporto sopra scritto.

**Fisica.** — *Sull'effetto Hallwachs dei composti di elementi a duplice valenza.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. A. POCHETTINO.

Le ricerche su l'effetto Hallwachs nelle soluzioni acquose di elettroliti non sono numerose. In corrispondenza a  $\lambda < 0.200 \mu$  le misure risultano molto difficili per l'effetto proprio dell'acqua che, mentre fino a  $\lambda = 0.200 \mu$  può considerarsi come praticamente nullo, si fa sentire poi fortemente ed è molto variabile per le alterazioni, di natura ancora poco nota, che subisce la superficie dell'acqua stessa sotto l'azione dell'irraggiamento <sup>(2)</sup>. In corrispondenza a  $\lambda$  comprese fra 0.350 e 0.230, l'effetto fotoelettrico esterno delle soluzioni acquose di elettroliti è generalmente piccolissimo <sup>(3)</sup>; fanno eccezione le soluzioni di ferrocianuro potassico <sup>(4)</sup>, le quali presentano un effetto abbastanza ragguardevole che, secondo Zimmermann <sup>(5)</sup>, non sarebbe dovuto ai ferrocianurioni della soluzione, bensì alle molecole del sale in quanto il prussiato giallo allo stato solido presenta un effetto molto maggiore di quello della sua soluzione satura e se si fa retrocedere la ionizzazione di una soluzione di questo sale con l'aggiunta di cloruro potassico, l'effetto aumenterebbe di intensità. D'altra parte l'effetto Hallwachs delle soluzioni dei ferrocianuri di Sodio, di Litio e di Potassio presentano effetti quasi uguali, mentre, sempre secondo Zimmermann, le soluzioni dei corrispondenti ferricianuri non presentano alcun effetto.

È noto inoltre come, all'infuori dei metalli, non molto numerose siano le sostanze che presentano un effetto Hallwachs notevole; fra esse sono particolarmente degne di nota: il cloruro ferroso, l'ossido e il cloruro

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) OBOLENSKY, « Ann. d. Phys. », 39, p. 961, 1912.

(3) WIEN, *Harms*. « Handb. d. Exper. Physik. », 23, II parte, p. 1374.

(4) POOLE, « Phil. Mag. », 45, p. 895, 1923.

(5) ZIMMERMANN, « Ann. d. Phys. », 80, p. 329, 1926.

ramosi, l'ossido stannoso <sup>(1)</sup>. Se si tien conto che in tutti questi casi c'è sempre un elemento (il Fe, il Cu, lo Sn) che, sotto l'influenza della luce <sup>(2)</sup>, è capace di cambiare la valenza assumendone una maggiore e che in quei composti che hanno l'effetto in guisa più marcata, quell'elemento ha sempre la valenza più bassa, vien fatto di domandarsi se questo effetto fotoelettrico non sia connesso con il fenomeno fotochimico cui essi possono soggiacere alla luce. Se un tale punto di vista fosse giusto, tutte le soluzioni di questi composti (ed anche i composti stessi allo stato solido) in cui un elemento, sia esso allo stato di ione o entri a far parte di uno ione complesso, è capace di aumentare alla luce la propria valenza, dovrebbero presentare l'effetto Hallwachs in modo più marcato dei composti corrispondenti in cui quell'elemento ha la valenza più alta e ciò indipendentemente dalla natura dell'altro ione e, se l'elemento sensibile fa parte di uno ione complesso, indipendentemente dalla valenza di questo. Allora effetto fotoelettrico esterno e fotoossidazione sarebbero forse da considerarsi come legati fra loro o addirittura come aspetti diversi di uno stesso fenomeno.

Guidato da questo concetto, ho studiato l'effetto Hallwachs nelle soluzioni di composti in cui uno stesso elemento si presenta con valenza diversa e si sa che l'elemento stesso cambia di valenza alla luce; così ho studiato le soluzioni di ferrocianuro e rispettivamente di ferricianuro potassico, di calomelano e di sublimato corrosivo, di cloruro ramoso e di cloruro ramico, di cloruro stannoso e di cloruro stannico, di solfato ferroso e di solfato ferrico, di manganato e di permanganato potassico. La sorgente luminosa usata fu una lampada Gallois (in quarzo) a vapori di mercurio; il metodo di osservazione fu il solito usato in questi casi, non sto quindi a descriverlo. Osservo soltanto che per ottenere risultati sufficientemente concordanti per poter paragonare con sicurezza il comportamento delle varie coppie di sostanze, ho usate alcune precauzioni e precisamente: ho operato con la sostanza in esame collocata in un recipiente chiuso onde evitare che l'ozono, che sempre si forma intorno alle lampade a mercurio, agisse per suo conto; non ho mai fatte misure se non dopo che la lampada era accesa da almeno dieci minuti; ho avuto sempre cura di illuminare superfici di aree rigorosamente uguali; ho eliminato nelle parti dell'apparecchio materiali a effetto fotoelettrico sensibile; ho usato sempre, sia nel caso di soluzioni che nel caso dei solidi, superfici fresche e non le ho mai irraggiate per più di 5 minuti al massimo; la velocità di scarica dell'elettrometro fu sempre osservata fra gli stessi potenziali (fra 350 e 300 Volta). La distanza fra la superficie del composto studiato e la rete a terra fu sempre di 4 mm; noto infine che non c'era pericolo che, sotto

(1) DIMA, « Compt. Rend. », 156, p. 1366, 1913.

(2) PLOTNIKOW, « Lehrbuch der Photochemie ». III Parte, Berlino 1920.

l'azione della luce, si formasse ozono nell'apparecchio perchè la luce stessa doveva attraversare, per giungere dalla lampada alla sostanza esaminata, circa 50 cm. di aria.

I risultati delle misure sono i seguenti, ove l'effetto Hallwachs, relativo sempre a soluzioni sature, misurato dalla velocità di scarica dell'elettrometro, è riferito in unità arbitrarie, essendosi posto uguale a 1000 quello per il ferrocianuro potassico allo stato solido:

{ Ferrocianuro potassico	300	{ Manganato potassico	7	{ Cloruro stannoso	8
{ Ferricianuro        »	15	{ Permanganato       »	5	{       »       stannico	2
{ Cloruro mercurioso	20	{ Cloruro ramoso	300	{ Solfato ferroso	19
{       »       mercurico	9	{       »       ramico	25	{       »       ferrico	7

Ora siccome si sa <sup>(1)</sup> che alla luce lo  $\text{Sn}^{\text{II}}$  si trasforma in  $\text{Sn}^{\text{IV}}$ , il  $\text{Fe}^{\text{II}}$  si trasforma in  $\text{Fe}^{\text{III}}$ , il  $\text{Hg}^{\text{I}}$  in  $\text{Hg}^{\text{II}}$  e che il cloruro ramoso si trasforma in cloruro ramico, sembrerebbe giustificata l'ipotesi su esposta. Ma il comportamento del permanganato e del manganato potassico, del ferro e del ferricianuro potassico vi contraddicono perchè generalmente il Manganese alla luce tende a diminuire di valenza <sup>(2)</sup> e d'altra parte alla luce il ferrocianuro potassico subisce una trasformazione che non può ricondursi allo schema su citato. Viceversa si osserva nei composti studiati <sup>(3)</sup> che l'effetto fotoelettrico è sempre maggiore nel composto in cui l'elemento a doppia valenza ha la valenza più bassa. Mi sono proposto allora di vedere se questa fosse una regola generale e, lasciando da parte le soluzioni, mi sono limitato a studiare i sali allo stato solido, finemente polverizzati, perchè in generale presentano un effetto Hallwachs più cospicuo e anche per evitare che la diversa solubilità mascherasse la relazione che cercavo. Riporto qui senz'altro l'elenco delle sostanze studiate con a fianco l'effetto osservato, nella solita misura relativa; avverto che basta l'interposizione sul cammino dei raggi di una lamina di mica di 0.02 mm. di spessore per ridurre l'effetto del 90-95 %:

(1) PLOTNIKOW, loc. cit., pp. 314, 328, 458.

(2) PLOTNIKOW, loc. cit., p. 395.

(3) I prodotti puri mi furono gentilmente dati dal collega prof. G. Ponzio, al quale mi è grato dovere porgere qui i miei più vivi ringraziamenti.



Fe bivalente		Fe trivalente		Hg monovalente		Hg bivalente	
Ferrocianuro potassico	1000	Ferricianuro potassico	38	Cloruro mercurioso	2	Cloruro mercurico	1,8
» di Piombo	453	» di Piombo	53	Rodanato »	2	Rodanato »	0
Cloruro ferroso	15	Cloruro ferrico	2	Bromuro »	1	Bromuro »	0
Solfato »	7	Solfato »	4	Solfato »	3	Solfato »	0,1
Fosfato »	3	Fosfato »	1				
As trivalente		As pentavalente		Pb bivalente		Pb tetravalente	
Trisolfuro di Arsenico	26	Pentasolfuro d'Arsenico	2	Protossido	750	Perossido	375
Triossido »	1	Pentossido »	0				
Arsenito di Zinco	2,3	Arseniato di Zinco	0,2	Ur tetravalente		Ur esavalente	
				Ossido nero	5	Ossido rosso	0,5
Cu monovalente		Cu bivalente		Sb trivalente		Sb pentavalente	
Cloruro ramoso	30000	Cloruro ramico	5	Triossido	5	Pentossido	0,5
Ossido ramoso	8300	Ossido »	700				
Sn bivalente		Sn tetravalente		Mn bivalente		Mn tetravalente	
Cloruro stannoso	16	Cloruro stannico	2	Protossido	58	Biossido	23
Ossido »	2	Ossido »	1,8				
				Mn esavalente		Mn eptavalente	
				Manganato potassico	75	Permanganato	7

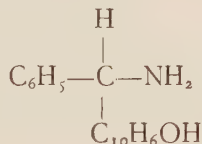
— 508 —

Dati questi risultati, è chiaro che alla questione, se l'effetto Hallwachs e un eventuale processo di ossidazione fotochimica siano intimamente legati fra loro, non sembra potersi rispondere affermativamente in quanto il comportamento fotochimico in molti dei composti studiati appare in netta contraddizione con quell'ipotesi e di più in parecchie coppie le proprietà

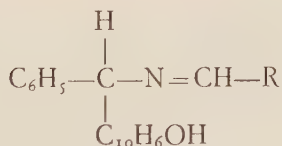
fotochimiche sono contraddittorie. Così, mentre in generale alla luce gli ioni  $Mn^{III}$  e  $Mn^{VII}$  hanno la tendenza a trasformarsi rispettivamente negli ioni  $Mn^{II}$  e  $Mn^{VI}$ , l'idrossidato manganoso <sup>(1)</sup> alla luce si trasforma in manganico; mentre il calomelano tende a trasformarsi alla luce in sublimato corrosivo, questo tende <sup>(2)</sup> a sua volta, sempre alla luce, a trasformarsi nel primo, cosicchè, illuminando del cloruro mercurioso, deve stabilirsi un equilibrio il cui andamento non è noto; e lo stesso avviene <sup>(3)</sup> per il cloruro ramoso e per il cloruro ramico. Viceversa, lasciando per ora da parte la questione del perchè si notino differenze così notevoli di comportamento tra gruppo e gruppo, risulta in modo affatto generale che nelle varie coppie di composti analoghi *ha sempre effetto Halkwachs maggiore quello in cui l'elemento a valenza variabile ha la valenza più piccola* e ciò indipendentemente dal segno dello ione in cui l'elemento stesso compare.

**Chimica.** — *Costituzione chimica e potere rotatorio. Derivati delle aldeidi cloro- e bromo-benzoiche* <sup>(4)</sup>. Nota <sup>(5)</sup> del CORRISP. M. BETTI e di P. PRATESI.

Per mezzo di una estesa serie di ricerche eseguite da uno di noi impiegando i derivati aldeido-aminici dei  $\beta$ -naftol-fenil-amino-metano otticamente attivo (destrogiro):



tutti del tipo:



(nel quale  $=\text{CH}-\text{R}$  rappresenta il residuo di una aldeide), si poteva dalla rotazione polarimetrica osservare desumere il carattere chimico più o meno « elettropositivo » o « elettronegativo » del residuo aldeidico  $=\text{CH}-\text{R}$  contenuto rispettivamente in ognuno dei composti. E d'altra parte, riferen-

(1) PLOTNIKOW, loc. cit., p. 395.

(2) PLOTNIKOW, loc. cit., p. 458.

(3) PLOTNIKOW, loc. cit., p. 328.

(4) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Bologna.

(5) Presentata nella seduta del 3 aprile 1932.

dosi (per desumere per altra via il carattere chimico dei singoli residui aldeidici) alla così detta « costante di dissociazione » degli acidi carbossilici ad esse aldeidi corrispondenti, si poteva scoprire una *relazione quantitativa* fra le due serie dei valori, e cioè fra il dato polarimetrico  $[M]$  da una parte e la costante degli acidi ( $K$ ) dall'altra, relazione che permetteva anche di calcolare uno dei valori desumendolo dall'altro <sup>(1)</sup>.

Questa relazione fu messa anche in maggior evidenza ed ulteriormente sviluppata mediante successive ricerche, che furono in parte comunicate al Convegno promosso dalla Faraday Society tenuto a Londra nell'aprile del 1930 per trattare appunto di questioni riguardanti il potere rotatorio ottico <sup>(2)</sup>.

Un risultato di singolare interesse in questo indirizzo di ricerche è stato quello ora ottenuto per mezzo dei derivati delle aldeidi cloro- e bromobenzoiche, perchè fa vedere che si trovano rispecchiate nei valori del potere rotatorio anche le anomalie che talora si manifestano nei valori della costante di dissociazione.

Come è noto, il cloro viene considerato come più elettronegativo del bromo e questo dello jodio:



ciò che sta in relazione anche colla posizione dei tre elementi nel sistema periodico.

Ora Ostwald nelle sue classiche ricerche sull'energia degli acidi organici <sup>(3)</sup> aveva rilevato (loc. cit., p. 256) la strana singolarità che dei due acidi o-cloro- e o-bromo-benzoico il secondo è più energico del primo, come si può dedurre dal valore delle rispettive costanti di dissociazione:

Acido benzoico	$K = 0.006$
Acido o-clorobenzoico	» 0.132
Acido o-bromobenzoico	» 0.145

In questi composti il bromo farebbe dunque aumentare più del cloro il carattere elettronegativo del residuo unito al gruppo carbossilico.

Era pertanto interessante esaminare se la incongruenza che si verifica nella costante di dissociazione di questi due acidi trovasse riscontro anche nei dati polarimetrici dei derivati aldeido-aminici corrispondenti. Sono state perciò preparate le aldeidi ed i derivati di queste col  $\beta$ -naftol-fenil-amino-metano destrogiro ed abbiamo difatti potuto constatare che nei deri-

(1) V. « Memorie della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Classe di Sc. Fisiche, serie VIII, tomo III, p. 39 (1926).

(2) M. BETTI, « Transactions of the Faraday Society », XXVI, p. 337 (1930).

(3) « Zeitschr. für physikal. Chem. », 3, p. 170 e sg. (1889).

vati o-sostituiti è il composto bromurato che ha carattere più elettronegativo di quello clorurato (e che perciò fa spostare di più verso le rotazioni sinistrogire il valore del potere rotatorio):

Derivato benzalico	$[M]_D = + 373^{\circ}.1$
» o-clorobenzalico	» = — 128 <sup>o</sup> .4
» o-bromobenzalico	» = — 308 <sup>o</sup> .7.

Viceversa, nel caso dei derivati m-cloro e m-bromo sostituiti e di quelli p-cloro e p-bromo sostituiti, nei quali anche per gli acidi il carattere elettronegativo del cloro risulta maggiore di quello del bromo:

Acido benzoico	K = 0.006	Acido benzoico	K = 0.006
» m-bromobenzoico	» = 0.0137	» m-bromobenzoico	» = 0.0065
» m-clorobenzoico	» = 0.0155	» m-clorobenzoico	» = 0.0093

anche i dati polarimetrici conducono alla stessa conclusione; cioè il derivato clorurato è quello più negativo e perciò fa spostare di più il valore del potere rotatorio verso le rotazioni sinistrogire (pur senza raggiungerle):

Derivato benzalico	$[M]_D = + 373^{\circ}.1$
» m-bromobenzalico	» = + 280 <sup>o</sup> .9
» m-clorobenzalico	» = + 255 <sup>o</sup> .9

Derivato benzalico	$[M]_D = + 373^{\circ}.1$
» p-bromobenzalico	» = + 348 <sup>o</sup> .1
» p-clorobenzalico	» = + 282 <sup>o</sup> .2

La corrispondenza è quindi perfetta, ciò che non è senza importanza poichè elimina il dubbio che l'anomalia presentata nella costante di dissociazione dagli acidi o-alogenati dipenda o da non completa purezza dei composti o comunque da errori sperimentali. Ora la conferma conseguita per mezzo del dato polarimetrico mostra che nella condizione di quei composti il bromo è effettivamente più elettronegativo del cloro. Potrebbe essere interessante indagare la ragione di tale singolare comportamento, tanto più che questo fatto si ripete anche in qualche altro composto, come ricerche in corso ci hanno già permesso di intravedere.

Il *d.β-naftol-fenil-amino-metano* fu preparato seguendo il metodo già descritto da uno di noi in precedenti pubblicazioni <sup>(1)</sup>.

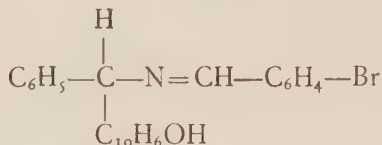
(1) « Gazzetta Chim. Ital. », 31, I, 384; 36, II, 392; « Organic Syntheses », 9, 60, (1929).

I derivati delle aldeidi-cloro-benzoiche con questa base erano pure stati già preparati, studiati e descritti da uno di noi <sup>(1)</sup>.

I derivati delle aldeidi-bromo-benzoiche sono stati espressamente preparati per lo scopo della presente ricerca.

L'aldeide o-bromobenzoica, che non si trova in commercio, fu preparata seguendo le indicazioni di Stuart ed Elliot <sup>(2)</sup>, cioè trattando l'o-bromotoluene sciolto nel solfuro di carbonio con cloruro di cromile e decomponendo con acqua il composto formatosi. È un liquido oleoso che bolle a 230° e si solidifica a 21°.

Il derivato dell'aldeide o-bromo-benzoica colla base otticamente attiva:



fu preparato sciogliendo a mite calore gr. 2.7 della d-base (1 mol.) in 80 cc. di alcool ed aggiungendo poi alla soluzione gr. 2 (1 mol.) di aldeide. Col raffreddamento e col riposo si formò un abbondante precipitato di sottili aghi bianchissimi che purificati ancora una volta dall'alcool bollente fondevano a 157°. Il composto è assai solubile nel benzene freddo.

Analisi: Gr. 0.2482 di sost. dettero cc. 6.38 di azoto secco a 22° e 758 mm.

N % Trovato 2.97

Calcolato per  $\text{C}_{24}\text{H}_{18}\text{ONBr}$  3.36.

Potere rotatorio: una soluzione benzenica all'1.36 % in peso, della densità  $D_{40}^{20} = 0.882$ , esaminata in un tubo lungo 2 dm. dette:

$$\alpha_D = -1^{\circ},78 \quad \text{da cui} \quad [\alpha]_D = -74^{\circ},2 \quad \text{e} \quad [M]_D = -308^{\circ},7.$$

Il composto presenta il fenomeno della polirotazione. La soluzione fatta a freddo, appena preparata dava  $\alpha_D = -4^{\circ},10$ , dopo 24 ore  $-1^{\circ},78$ . La soluzione preparata a freddo, scaldata all'ebollizione per alcuni minuti e raffreddata bruscamente dava  $\alpha_D = -0^{\circ},70$  e dopo tre ore  $-1^{\circ},78$ .

L'aldeide m-bromobenzoica fu pure preparata riducendo, secondo le indicazioni contenute nella bibliografia <sup>(3)</sup>, l'aldeide m-nitrobenzoica con cloruro stannoso, diazotando e trattando poi con bromuro rameoso. Distillando quindi in corrente di vapore si ha l'aldeide sotto forma di liquido denso, oleoso, che odora di mandorle amare (P. E. 215°-216° a 716 mm).

(1) « Gazzetta Chim. Ital. », 46, I, 202, 203; 53, 425.

(2) « Journ. Chem. Soc. », 53, 804.

(3) EINHORN e GERNSHEIM, « Lieb. Ann. », 284, 141; MILLER e ROHDE, « Berichte », 23, 1890.



Il derivato dell'aldeide *m*-bromobenzoica colla base otticamente attiva fu ottenuto operando come per quello dell'aldeide *o*-sostituita. Già dal liquido tiepido si separa un abbondante precipitato di aghi setacei bianchi che si purificano dall'alcool. P. F. 136°. Il composto è solubile a freddo nel benzene.

Analisi: Gr. 0.2180 di sost. dettero cc. 7.02 di azoto secco a 28° e 755 mm.

N % Trovato 3.62      Calcolato per  $C_{24}H_{18}ONBr$  3.36.

Potere rotatorio: una soluzione benzenica all'1.15 % in peso, della densità  $D_4^{20} = 0.8757$  esaminata in un tubo lungo 2 dm. dette:

$$\alpha_D = + 1^\circ.36 \text{ da cui } [\alpha]_D = + 67^\circ.52 \text{ e } [M]_D = + 280^\circ.9.$$

Anche questo composto presenta il fenomeno della polirotazione.

L'aldeide *p*-bromobenzoica fu ottenuta secondo il metodo di G. Errera<sup>(1)</sup>. Si prepara prima l'etere *p*-bromo-benzil-etilico ( $Br-C_6H_4-CH_2-O-C_2H_5$ ) trattando con bromo il cloruro di benzile e facendo bollire con potassa alcoolica il bromuro di *p*-bromobenzile così formatosi. L'etere per azione dell'acido nitrico a freddo fornisce l'aldeide ( $Br-C_6H_4-CHO$ ) che si purifica mediante il composto bisolfittico. Si ottiene come un liquido denso, oleoso, dall'odore di mandorle amare, che per raffreddamento cristallizza. Pura fonde a 56°.

Il derivato dell'aldeide *p*-bromobenzoica colla base otticamente attiva fu ottenuto in modo analogo ai due precedentemente descritti. È solubile a freddo nel benzene. Si cristallizza sciogliendolo a caldo nell'alcool, dal quale si ottiene in aghi bianchi splendenti che fondono a 155°.

Analisi: Gr. 0.2341 di sost. dettero gr. 0.5923 di  $CO_2$  e gr. 0.0990 di  $H_2O$

C % Trovato	69.00	Calc. per $C_{24}H_{18}ONBr$	69.23
H %      »	4.70	»                      »	4.33.

Potere rotatorio: una soluzione benzenica all'1.827 % in peso, della densità  $D_4^{20} = 0.883$ , esaminata in un tubo lungo 1 dm. dette:

$$\alpha_D = + 1^\circ.35 \text{ da cui } [\alpha]_D = + 83^\circ.68 \text{ e } [M]_D = + 348^\circ.1;$$

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 17, 206 (1887).

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica** (Analisi). — *Sulle equazioni differenziali lineari complete a coefficienti costanti*. Nota di U. BROGGI, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. BERZOLARI.

1. Si dimostrò altrove, e si deduce immediatamente da ciò che, se  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sono costanti,  $A_p \neq 0$ , e

$$\frac{1}{1 + A_1 t + \dots + A_p t^p} = 1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$$

è anche

$$\begin{aligned} \alpha_1 + A_1 &= \alpha_2 + \alpha_1 A_1 + A_2 = \dots = \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} A_2 + \dots + A_{p-1} = 0 \\ \alpha_{p+n} + \alpha_{p+n-1} A_1 + \dots + \alpha_n A_p &= 0 \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

che le  $p$  trascendenti intere

$$\psi_{r+1}(t) = \frac{t^r}{r!} + \alpha_1 \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$(1) \quad L(y) = y^{(p)} + A_1 y^{(p-1)} + \dots + A_p y = 0 \quad (2).$$

Ove poi si ponga

$$\varphi_h(t) = \psi_h(t) - \alpha_1 \psi_{h+1}(t) - \dots - \alpha_{p-h} \psi_p(t) \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

si trova essere

$$y(t) = c_0 \varphi_1(t) + c_1 \varphi_2(t) + \dots + c_{p-1} \varphi_p(t)$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) U. BROGGI, *Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*, « Rend. Ist. Lomb. » (2) LXIII (1930), pp. 1047-1050.

la soluzione della (1) definita dalle condizioni iniziali

$$y_0 = c_0, \quad y'_0 = c_1, \dots, y_0^{(p-1)} = c_{p-1}$$

È infatti

$$\varphi_b^{(h)}(0) = 1, \quad \varphi_b^{(k)}(0) = 0$$

se  $k < p$  e  $h = k$ .

Le formule che danno la derivata  $n$ -esima di una funzione di funzione permettono di definire  $\alpha_n$  esplicitamente in funzione di  $n, A_1, A_2, \dots, A_p$  e pertanto di determinare il raggio  $r$  di convergenza della serie  $1 + \alpha_1 t + \dots$ .

2. Sia  $\rho$  il raggio di convergenza di

$$\beta_0 + \beta_1 t + \dots = \frac{1}{A_p + A_{p-1}t + \dots + t^p}$$

e designi  $\varphi(t)$  una funzione data univocamente in un intervallo reale  $a < t < b$ , nel quale essa ha derivate a destra ed a sinistra di ordine arbitrario ed è limitata colle sue derivate, per le quali vale uniformemente in  $(a, b)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi^{(n)}(x)|} < \rho.$$

$$v(t) = \beta_0 \varphi(t) + \beta_1 \varphi'(t) + \dots$$

è in  $(a, b)$  soluzione dell'equazione differenziale

$$(2) \quad L(y(t)) = \varphi(t)$$

poichè

$$(3) \quad L(v(t)) = A_p \beta_0 \varphi(t) + (A_p \beta_1 + A_{p-1} \beta_0) \varphi'(t) + \dots = \varphi(t)$$

e la serie  $\beta_0 \varphi(t) + \beta_1 \varphi'(t) + \dots$  converge.

Se  $\varphi(t)$  è una funzione intera, ed essendo  $k < \rho$  è

$$|\varphi(t)| < c e^{(k+\varepsilon)|t|}$$

dove  $\varepsilon > 0$  è arbitrariamente piccolo, un teorema di Schürer permette di affermare che  $v(t)$  è l'unica funzione intera soddisfacente la condizione

$$|v(t)| < c_1 e^{(k+\varepsilon)|t|}$$

soluzione della (2)<sup>(1)</sup>.

(1) Cfr. F. SCHÜRER, *Eine gemeinsame Methode zur Behandlung gewisser Funktionalgleichungsprobleme*, « Ber. der Kgl. Sächs. Ges. der Wissenschaften zu Leipzig » (Math. Phys. Kl.), vol. 70 (1918), pp. 217-218.

3. Si ottiene in particolare, se

$$\varphi(t) = e^{kt}$$

$$v(t) = e^{kt} (\beta_0 + \beta_1 k + \dots).$$

La serie fra parentesi converge, ed ha il valore  $\frac{1}{P(k)}$ , se  $|k| < \rho$ . Ma è evidente che, qualunque sia  $|k|$  e sempre che  $k$  non sia radice di  $P(t)$

$$\frac{e^{kt}}{P(k)}$$

è un integrale della (2) nel caso supposto. Se, più generalmente

$$\varphi(t) = e^{kt} \psi(t)$$

e  $\psi(t)$  è infinitamente derivabile, si ottiene dalla (3) ove si raggruppino i termini contenenti  $\psi(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\dots$

$$w(t) = e^{kt} \left[ \frac{\psi(t)}{P(k)} + \frac{1}{1!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)'_k \psi'(t) + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)''_k \psi''(t) + \dots \right].$$

Come l'esempio  $\psi(t) \equiv 1$  dimostra,

$$u(t) = \frac{\psi(t)}{P(k)} + \frac{1}{1!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)'_k \psi'(t) + \dots$$

può convergere quando  $v(t)$  (che  $w(t)$  contiene come caso particolare, corrispondente a  $k=0$ ) diverge. E poichè

$$\frac{1}{P(t+k)} = \frac{1}{P(k)} + \frac{1}{1!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)'_k t + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)''_k t^2 + \dots$$

$u(t)$ , ove converga, è un integrale dell'equazione

$$(4) \quad P(k)y + \frac{1}{1!} P'(k)y' + \dots + \frac{1}{p!} P^{(p)}(k)y^{(p)} = \psi(t).$$

La sostituzione di  $u(t) = e^{-kt} w(t)$  ad  $y$  nel primo membro della (4) lo trasforma in

$$L(w(t)) = e^{kt} \psi(t) = \varphi(t).$$

4. Ma ove, ad esempio, sia  $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ , la serie (3)

$$(5) \quad \frac{\beta_0}{t} - \frac{\beta_1 \cdot 1!}{t^2} + \frac{\beta_2 \cdot 2!}{t^3} - \dots$$

diverge per ogni valore di  $t$  poichè è finito il raggio della sua serie associata  $\beta_0 - \beta_1 t + \beta_2 t^2 \dots$  sviluppo della reciproca del polinomio  $P(-t)$ . L'integrale

$$(6) \quad b(t) = \int_0^{\infty} e^{-tu} \frac{du}{P(-u)}$$

converge invece in  $R(t) > 0$  se  $P(t)$  non ha radici reali negative, e definisce una soluzione  $b(t)$  dell'equazione

$$L(y) = \frac{1}{t}.$$

È infatti, poichè come è noto dalla teoria delle funzioni determinanti <sup>(1)</sup>

$$b^{(s)}(t) = (-1)^s \int_0^{\infty} e^{-tu} u^s \frac{du}{P(-u)} \quad (s = 1, 2, \dots)$$

$$L(b(t)) = \int_0^{\infty} e^{-tu} P(-u) \frac{du}{P(-u)} = \frac{1}{t};$$

l'integrale di Laplace (6) somma cioè nel caso supposto la serie divergente (5), che ne costituisce lo sviluppo formale.

È ora evidente che se  $\varphi(t)$  è una funzione determinante di generatrice  $\psi(t)$

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{-tu} \psi(u) du$$

il risultato anteriore può venire generalizzato:

$$(7) \quad v(t) = \int_0^{\infty} e^{-tu} \frac{\psi(u)}{P(-u)} du$$

è soluzione dell'equazione

$$L(y) = \varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{-tu} \psi(u) du$$

in tutti i casi nei quali l'integrale al secondo membro della (7) converge. La condizione che  $P(t)$  non abbia radici reali negative cessa di essere ne-

(1) Cfr. ad es. S. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, I, cap. XVI, p. 317.



cessaria: basta che  $\frac{\psi(t)}{P(-t)}$  sia limitata ed integrabile in ogni tratto finito dell'intervallo  $(0, \infty)$ .

Ove  $\varphi(t)$  sia regolare all'infinito, e lo sviluppo

$$\varphi(t) = \frac{\gamma_0}{t} + \frac{\gamma_1 \cdot 1!}{t^2} + \frac{\gamma_2 \cdot 2!}{t^3} + \dots$$

converga pertanto per valori abbastanza grandi di  $|t|$ , la serie sempre divergente

$$\frac{\beta_0 \gamma_0}{t^2} + \frac{(\gamma_1 \beta_0 - \beta_1 \gamma_0) \cdot 1!}{t^3} + \frac{(\gamma_2 \beta_0 - 2 \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_0) \cdot 2!}{t^4} + \dots$$

soluzione formale di

$$L(y) = \frac{\gamma_0}{t} + \frac{\gamma_1 \cdot 1!}{t^2} + \frac{\gamma_2 \cdot 2!}{t^3} + \dots$$

viene sommata dall'integrale (7).

5. È noto dalla teoria delle funzioni determinanti che l'integrale di Laplace

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tu} f(u) du$$

converge in un semipiano  $R(x) > \alpha$ , ( $\alpha \leq \infty$ ), che l'ascissa di convergenza od ordine  $\alpha$  della funzione generatrice  $f(u)$ , è minore od uguale

$$\overline{\lim} \frac{1}{u} \log \int_0^\infty f(v) dv$$

e che  $F(t)$  definisce un ramo monodromo di funzione analitica regolare in tutto il semipiano di convergenza, contorno escluso<sup>(1)</sup>. Ed è pure noto che è possibile di prolungare analiticamente la funzione  $F(t)$  fuori del semipiano  $R(x) > \alpha$ , andando da 0 ad  $\infty$  lungo semirette non coincidenti col semiasse reale positivo<sup>(2)</sup>.

È noto parimenti che se la funzione generatrice è indefinitamente derivabile in ogni tratto finito dell'intervallo d'integrazione, con derivate finite limitate integrabili in tali tratti e di ordine finito, essa è sviluppabile in

(1) Cfr. ad es. PINCHERLE, op. cit., cap. cit.

(2) Cfr. S. PINCHERLE, *Sull'inversione degli integrali def.* in « Mem. della Soc. It. delle Scienze », III, XV (1908), pp. 20-21.

serie di fattoriali, convergente in un semipiano  $R(x) > \beta$ , e prolungabile analiticamente fuori di esso <sup>(1)</sup>.

Sviluppabile in serie di fattoriali è pertanto la funzione  $b(t)$  definita dalla (6). Può dimostrarsi che lo è la funzione  $v(t)$ , definita dalla (7), ove lo sia  $\varphi(t)$ . Ove poi  $\psi(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \dots$  sia una funzione intera, si presenta naturale lo sviluppo

$$\delta_0 b(t) - \delta_1 b'(t) + \delta_2 b''(t) - \dots$$

che converge per  $R(t) > 0$ , se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\delta_n b^{(n)}(t)|} < 1$ .

**Matematica.** — *Relazione fra le curvature di due linee corrispondenti in una rappresentazione conforme.* Nota di A. MASOTTI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corresp. U. CISOTTI.

1. Sia

$$(1) \quad z' = f(z)$$

la relazione che stabilisce una corrispondenza conforme fra due aree  $C$  e  $C'$ , appartenenti rispettivamente ai piani delle variabili complesse  $z = x + iy$  e  $z' = x' + iy'$ ;  $f$  è simbolo di funzione analitica. Siano  $l$  ed  $l'$  due linee corrispondenti. Ci proponiamo di determinare una relazione fra le curvature delle linee  $l$  ed  $l'$  in due punti corrispondenti  $P$  e  $P'$  (dove la corrispondenza conforme è supposta regolare).

Prese sopra  $l$  ed  $l'$  due origini per gli archi in due punti corrispondenti  $A$  ed  $A'$ , e orientate le linee  $l$  ed  $l'$  in modo che se  $P$  percorre  $l$  in senso positivo anche il corrispondente  $P'$  percorra  $l'$  in senso positivo, siano orientate le tangenti a queste linee nel senso degli archi crescenti, e siano orientate le normali in modo che, in ciascun punto, la coppia della tangente e della normale (orientate) sia congruente alla coppia degli assi cartesiani. Siano allora  $1/r$  ed  $1/r'$  le curvature di  $l$  ed  $l'$  in  $P$  e  $P'$ , sicchè  $|r|$  e  $|r'|$  saranno i raggi di curvatura negli stessi punti. Sia infine

$$(2) \quad \mu = \left| \frac{dz'}{dz} \right|$$

il modulo della rappresentazione conforme di  $C$  sopra  $C'$ . Ciò premesso, sussiste la relazione:

(1) Cfr. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, (1926), cap. 6, V.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

$$(3) \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{r} - \frac{d \log \mu}{dn} \right),$$

nella quale  $\mu$  è valutato in P, e la derivata è valutata in P e secondo la normale positiva in P alla linea  $l$ ; posto

$$(4) \quad \mu' = \frac{1}{\mu} = \left| \frac{d\chi}{d\chi'} \right|,$$

la precedente assume la forma:

$$(5) \quad \frac{1}{r'} = \frac{\mu'}{r} + \frac{d\mu'}{dn}.$$

Alla facile constatazione di queste formule è dedicato il § 2. Il § 3 contiene alcune osservazioni che dalle formule stesse immediatamente derivano.

2. Sia  $s$  l'ascissa curvilinea di un punto P di  $l$ , e sia  $s + ds$  ( $ds > 0$ ) quella di Q, punto di  $l$  infinitamente vicino a P; sia  $s'$  l'ascissa curvilinea del punto P' di  $l'$ , corrispondente di P, e sia  $s' + ds'$  ( $ds' > 0$ ) quella di Q', corrispondente di Q; sarà dunque, in P:

$$(6) \quad \mu = \frac{ds'}{ds}.$$

Posto

$$(7) \quad \frac{d\chi'}{d\chi} = \mu e^{i\tau},$$

sarà, in ogni punto della linea  $l$ ,

$$(8) \quad \tau = \theta' - \theta,$$

se  $\theta$  e  $\theta'$  denotano gli angoli che le tangenti (orientate) in due punti corrispondenti di  $l$  ed  $l'$  formano con gli assi delle ascisse, sui rispettivi piani. Segue dalla (8) che

$$(9) \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta'}{ds} - \frac{d\theta}{ds}.$$

Ora, con le notazioni indicate nel § 1:

$$(10) \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r},$$

e

$$(11) \quad \frac{d\theta'}{ds} = \frac{d\theta'}{ds'} \frac{ds'}{ds} = \frac{\mu}{r'}.$$

Anche il primo membro della (9) si può esprimere mediante  $\mu$ , perchè, essendo  $\log \mu$  e  $\tau$  funzioni armoniche associate, sussiste l'eguaglianza:

$$(12) \quad \frac{d\tau}{ds} = - \frac{d \log \mu}{dn},$$

se la normale  $n$  alla linea  $l$  è orientata nel modo dianzi descritto. Dalla (9), tenendo conto delle (10), (11) e (12), discende la (3).

3. a) Siano  $l_1$  ed  $l_2$  due linee di  $C$ , tangenti in  $P$ , orientate in modo di aver comune, in  $P$ , la coppia della tangente e della normale (orientate);  $1/r_1$  e  $1/r_2$  siano le loro curvature in  $P$ ; dette  $l'_1$  ed  $l'_2$  le linee corrispondenti di  $C'$ , esse saranno tangenti nel punto  $P'$  corrispondente di  $P$ , ed avranno in questo punto le curvature  $1/r'_1$  e  $1/r'_2$  date dalle formule:

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{d \log \mu}{dn} \right) \quad , \quad \frac{1}{r'_2} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{d \log \mu}{dn} \right)$$

in ambo le quali  $\mu$  è valutato nel punto  $P$ , e la  $d \log \mu / dn$  è valutata in  $P$ , secondo la comune normale positiva delle linee  $l_1$  ed  $l_2$ . Segue dalle precedenti che

$$(13) \quad \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Se, in particolare,  $1/r_1 = 1/r_2$ , anche  $1/r'_1 = 1/r'_2$ : quindi si constata che se le due linee  $l_1$  ed  $l_2$  hanno comune, nel punto  $P$ , il cerchio osculatore, anche le linee  $l'_1$  ed  $l'_2$  godono, nel punto  $P'$ , della medesima proprietà. Questo risultato era attendibile, perchè una rappresentazione conforme conserva l'ordine del contatto fra due linee<sup>(1)</sup>.

b) L'area  $C$  sia un cerchio di raggio unitario, e sia  $l$  la circonferenza che lo limita. Sia  $C'$  un'area semplicemente connessa, limitata dalla linea  $l'$ , rappresentata in modo conforme sul cerchio  $C$ . Se  $l$  è orientata in modo che un osservatore che la percorre in senso positivo lascia  $C$  alla sua sinistra, anche  $l'$  risulta orientata nello stesso modo, e le normali positive sono quelle interne. È dunque  $r = 1$ , e la curvatura di  $l'$  risulta, per la (3) e per la (5), così espressa:

$$(14) \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{\mu} \left( 1 - \frac{d \log \mu}{dn} \right) = \mu' + \frac{d\mu'}{dn}.$$

(1) V. ad es. JULIA, *Éléments de Géométrie Infinitésimale*, ch. I, sect. I, § 12 (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

Se l'area  $C'$  fosse rappresentata in modo conforme sulla regione del piano esterna ad una circonferenza  $l$  di raggio unitario, sarebbe  $r = -1$ , e la curvatura di  $l'$  sarebbe così espressa:

$$(15) \quad \frac{1}{r'} = -\frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{d \log \mu}{dn} \right) = -\mu' + \frac{d\mu'}{dn};$$

in questa formula  $n$  indica la normale esterna alla circonferenza  $l$ .

c) Se la linea  $l$  è una retta, sicchè  $1/r = 0$ , la curvatura della linea  $l'$  risulta

$$(16) \quad \frac{1}{r'} = -\frac{1}{\mu} \frac{d \log \mu}{dn} = \frac{d\mu'}{dn},$$

e la condizione caratteristica affinchè anche  $l'$  sia una retta è che, lungo  $l$ ,

$$(17) \quad \frac{d\mu'}{dn} = 0.$$

d) È noto che la relazione lineare

$$(18) \quad \chi' = \frac{a\chi + b}{c\chi + d} \quad (\text{con } ad - bc \neq 0),$$

fa corrispondere alle circonferenze (incluse le rette) del piano  $\chi$  le circonferenze (incluse le rette) del piano  $\chi'$ . Con l'aiuto della (5) si può dimostrare che alla circonferenza  $l$  del piano  $\chi$  che ha il centro nel punto di affissa  $p + iq$  e raggio  $R$  corrisponde, sul piano  $\chi'$ , una circonferenza  $l'$  che ha per raggio

$$(19) \quad R' = \left| \frac{ad - bc}{\Delta c^2} \right| R,$$

dove

$$(20) \quad \Delta = (k \cos \alpha + p)^2 + (k \sin \alpha + q)^2 - R^2,$$

$k$  ed  $\alpha$  essendo il modulo e l'argomento del rapporto  $d/c$  (1).

(1) Si deduce dalla (18) che

$$\frac{d\chi'}{d\chi} = \frac{ad - bc}{(c\chi + d)^2},$$

e quindi, per la (4):

$$\mu' = \left| \frac{c^2}{ad - bc} \right| \left| \chi + \frac{d}{c} \right|^2.$$

Posto  $d/c = ke^{i\alpha}$ , e  $\chi = p + iq + \rho e^{i\sigma}$ , si ha:

$$\mu' = \left| \frac{c^2}{ad - bc} \right| \{ (p + k \cos \alpha + \rho \cos \sigma)^2 + (q + k \sin \alpha + \rho \sin \sigma)^2 \},$$



e) Nell'area C abbia luogo un movimento irrotazionale di un velo liquido, e sia  $\varphi$  il potenziale cinetico, sia  $\psi$  la funzione di corrente;  $\varphi + i\psi$  è notoriamente funzione analitica di  $z$ , ed è chiamata il potenziale complesso del movimento. Se poniamo

$$(21) \quad z' = \varphi + i\psi,$$

il modulo  $\mu$  competente a questa rappresentazione conforme di C sul piano del potenziale complesso si identifica, in ogni punto di C, col modulo V della velocità del liquido in quel punto <sup>(1)</sup>. Pertanto, si deduce dalla (3):

$$(22) \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{dn} = \frac{1}{r} - \frac{V}{r'}.$$

Se, in particolare, la linea  $l$  è una linea di flusso, su di essa  $\psi$  assume valore costante, sicchè la linea  $l'$  che ad essa corrisponde sul piano del potenziale complesso è una retta parallela all'asse delle ascisse, e nella (22) si dovrà porre  $1/r' = 0$ ; si ha allora la formula:

$$(23) \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{dn} = \frac{1}{r},$$

e sopra  $l$ , dove  $\rho = R$ ,

$$\mu' = \left| \frac{c^2}{ad - bc} \right| \{ (p + k \cos \alpha + R \cos \sigma)^2 + (q + k \sin \alpha + R \sin \sigma)^2 \}.$$

Si ha poi che, sopra  $l$ , designando  $n$  la normale interna ad  $l$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu'}{dn} &= - \left( \frac{\partial \mu'}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = \\ &= - \left| \frac{2c^2}{ad - bc} \right| \{ (p + k \cos \alpha + R \cos \sigma) \cos \sigma + (q + k \sin \alpha + R \sin \sigma) \sin \sigma \}. \end{aligned}$$

Dalla (5), ove si porrà  $r = R$ , discende, in virtù delle due precedenti, che

$$\frac{1}{r'} = \frac{c^2}{ad - bc} \left| \frac{\Delta}{R} \right|$$

è la curvatura della circonferenza  $l'$ ;  $\Delta$ , che è definito dalla (20), risulta positivo o negativo a seconda che il punto del piano  $z$  che ha l'affissa  $-d/c$  (a cui corrisponde il punto all'infinito del piano  $z'$ ) è esterno o interno alla circonferenza  $l$ ; lo stesso segno ha  $1/r'$ . Ne discende, pel raggio  $R'$  della circonferenza  $l'$ , la formula (19). — La (19) era già nota: v. FORSYTH, *Theory of Functions of a Complex Variable*, p. 627 (III ed., Cambridge, University Press, 1918).

(1) V. ad es. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, § 31 e seg. (Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1921-22).

che è nota<sup>(1)</sup>. La medesima formula vale se la linea  $l$  è una linea equipotenziale, e, più in generale, se lungo la linea  $l$  sussiste una relazione lineare (a coefficienti costanti) fra il potenziale cinetico e la funzione di corrente.

**Matematica (Topologia).** — *Sulla topologia dei domini di uno spazio ad  $n$  dimensioni.* Nota di J. REY PASTOR, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio F. SEVERI<sup>(3)</sup>.

1. *Alberi generatori di un recinto.* Chiamiamo dominio o recinto  $R_n$  di un  $S_n$  euclideo un insieme finito e connesso di punti di  $S_n$ , avente un interno (cioè contenente qualche  $n$ -sfera). Il contorno  $C_{n-1}$  di  $R_n$  consta dei punti che son di accumulazione tanto per punti esterni, quanto per punti interni al dominio.

Reticolato  $S_n$  cogli iperpiani  $x_i = \pm ma$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), ove  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son coordinate ortogonali di punto ed  $a$  un numero assegnato, lo  $S_n$  resta diviso in  $n$ -cubi; e siccome, fissato un punto  $O$  interno ad  $R_n$ , esiste una  $n$ -sfera di raggio abbastanza piccolo tutta interna ad  $R_n$ , scegliendo  $a$  sufficientemente piccolo, esisterà un parallelepipedo, che chiameremo *nucleo*, di centro  $O$ , formato da  $n$ -cubi interni.

Aggiungiamo al nucleo successivamente, ad uno ad uno, i cubi interni; che sono adiacenti, con una o più faccie, al poliedro di volta in volta formato; limitandoci però, in ogni stadio della costruzione, ad aggiungere quei cubi le cui faccie di adiacenza col poliedro precedente, formano una  $(n-1)$ -cella. I cubi che di mano a mano si devono aggiungere son caratterizzati dalla proprietà che in ciascuno di essi è libera la faccia opposta ad una  $F$ , adiacente al poliedro già formato. Invero, se è soddisfatta questa condizione, la  $(n-1)$ -superficie di adiacenza del cubo col poliedro è certamente una  $(n-1)$ -cella, perchè ogni faccia comune al cubo ed al poliedro è incidente ad  $F$  secondo un  $(n-2)$ -spigolo. Esauriti gli  $n$ -cubi suddetti,

(1) RAMSEY, *Hydrodynamics*, p. 65, es. 35 (2° volume del *Treatise on Hydromechanics* di BESANT e RAMSEY. II ed., London, Bell, 1920). Estensioni di questa formula si troveranno nelle Note: MASOTTI, *Sopra una notevole classe di moti piani permanenti di un liquido perfetto* (« Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », Anno LXXIX, 1927, pp. 125-128), e *Decomposizione intrinseca del vortice e sue applicazioni* (« Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LV, 1927, pp. 869-874).

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) Per la terminologia e per taluni concetti che qui si usano ved. SEVERI, *Conferenze di geometria algebrica*, Bologna, Zanichelli, 1930; oppure le lezioni sulla topologia tenute dal predetto Autore all'Università di Buenos Aires, nel 1930, e stampate a cura di quella Università.

il poliedro formato costituisce un  $n$  complesso, analogo agli alberi lineari (il quale può studiarsi, come faremo poi, mediante questi): lo chiameremo un  $n$ -albero  $A_n$  generatore del dominio dato  $R_n$ . Chiameremo poi *chiave* di  $A_n$  ogni  $n$ -cubo interno ad  $R_n$ , che siasi dovuto tralasciare nella formazione dell'albero, pel fatto che possiede con questo una  $(n - 1)$ -superficie di adiacenza non connessa o multiplamente connessa.

Il contorno dell'albero è infine formato da celle, che chiameremo *periferiche*, cioè da celle di adiacenza con cubi periferici (cubi contenenti punti del contorno  $C_{n-1}$  di  $R_n$ ) o da celle di adiacenza con chiavi.

2. *Contorni degli alberi.* Sia  $P$  un punto interno ad  $R_n$  ed  $OP$  sia un arco (di linea di Jordan semplice) interno ad  $R_n$ , che congiunga  $P$  con  $O$ . Indichiamo inoltre con  $d$  la *deviazione* <sup>(1)</sup> di  $OP$  da  $C_{n-1}$ ; sicchè è  $d > 0$ .

Se assumiamo  $a < \frac{d}{\sqrt{n}}$ , qualora l'arco  $OP$  non abbia alcuno de' suoi punti in una chiave, si può asserire che  $P$  è contenuto in  $A_n$ .

Invero, se  $P$  fosse esterno ad  $A_n$ , l'arco  $OP$  avrebbe una parte  $MP$  esterna ad  $A_n$ . Ma poichè il cubo adiacente ad  $A_n$ , che contiene il punto  $M$ , è formato da punti interni ad  $R_n$ , in quanto le distanze de' suoi punti da  $M$  son minori di  $a\sqrt{n} < d$ , così quel cubo dovrebbe appartenere ad  $A_n$  o esser chiave: contrariamente al supposto.

Per definizione, i punti interni alle chiavi di  $A_n$  sono interni ad  $R_n$  e non appartengono ad  $A_n$ . Però *triseccando* il reticolato (cioè assumendo come intervallo costante fra iperpiani paralleli consecutivi  $a' = a : 3$ ), siccome, secondo il n. 1, ogni chiave possiede due faccie opposte di adiacenza con  $A_n$ , ciascuno dei due parallelepipedi estremi, nei quali la chiave considerata si divide mediante i due iperpiani intermedi fra le due faccie, viene a possedere una faccia di adiacenza con  $A_n$  e la opposta (interna alla chiave) libera. Si conclude che i cubi della nuova rete, che riempiono quei parallelepipedi, vanno aggregati all'albero, e lo spigolo delle nuove chiavi resta così ridotto alla terza parte. Una chiave può anzi, come tale, sparire addirittura dopo la trisezione, pel fatto che nella nuova rete essa viene ad esser riempita (percorrendo altri cammini) in conseguenza dell'aggiunta di nuovi cubi, che soddisfacciano alla condizione del n. 1.

Se si ripete la trisezione un numero sufficiente  $k$  di volte, cioè si assume  $a_1 = a : 3^k$ , si ottiene un albero  $A_n^1$  il quale contiene all'interno non

(1) *Deviazione* di due insiemi chiamiamo l'estremo inferiore delle distanze delle coppie di punti dei due insiemi. In tedesco, dai cultori della teoria degli insiemi, si usano le parole « Abstand » o « Entfernung », che non traduciamo colla parola distanza, per non confondere questa nozione coll'altra di *distanza* di due insiemi (estremo superiore degli estremi inferiori delle distanze di ciascun punto di ognuno dei due insiemi dai punti dell'altro), che è stata introdotta dal SEVERI ed usata in vari suoi lavori.

soltanto le faccie di adiacenza di  $A_n$  colle sue chiavi, ma anche le faccie periferiche, giacchè, se la deviazione da  $C_{n-1}$  di una faccia di un cubo della rete interna ad  $A_n$ , è  $d$ , basta che risulti  $a_1 < d$ , affinchè i nuovi cubi adiacenti ad essa appartengano al nuovo albero. Passando similmente dall'albero  $A_n^i$  ad un albero  $A_n^{i+1}$ , e così proseguendo, si perviene al risultato:

*L'albero  $A_n^i$  è interno all'albero  $A_n^{i+1}$  ed il contorno di  $A_n^i$  si compone di una o più varietà poliedriche  $B_{n-1}^i$  (che chiameremo periferiche), formate da faccie periferiche e da celle poliedriche (in numero  $\geq 0$ ) di adiacenza con chiavi.*

3. *Tagli di un dominio.* Quando  $j$  cresce indefinitamente, fissato un punto qualunque  $P$  interno ad  $R_n$ , si posson presentare due casi:

1° — Giunge un momento in cui un albero della successione contiene  $P$ , così che  $P$  è contenuto pure in tutti gli alberi successivi.

2° — Il punto  $P$  appartiene sempre ad una chiave, qualunque sia  $j$ .

In quest'ultimo caso, le coppie di iperpiani paralleli a due faccie opposte non libere di una chiave iniziale, i quali dividono internamente gli  $n$ -cubi chiave, che derivano a mano a mano da quella, col processo di trisezione, tendono ad un iperpiano limite (come si vede facendo una sezione nel campo di variabilità dell'unica coordinata variabile). Lo iperpiano limite contiene manifestamente  $P$ . Può però accadere che la chiave possenga varie coppie di faccie opposte di adiacenza, sicchè risulteranno tanti iperpiani limiti quant'è il numero di queste coppie ed il punto  $P$  sarà vincolato a giacere sopra un certo spazio lineare  $S_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) ad essi comune. Pertanto: *Se da un dominio  $R_n$  si escludono i punti situati in certi spazi lineari  $S_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ), ognuno dei punti rimanenti interni al dominio, da un certo  $j$  in poi, appartiene a tutti gli alberi  $A_n^j$ .*

Chiameremo tagli o pareti queste varietà costituite da punti eccezionali ed appartenenti a spazi lineari di dimensione non superiore ad  $n-1$ .

4. *Deformazione radiale degli alberi di un dominio.* Per ridurre gli alberi del dominio a tipi normali, procederemo per deformazioni (isotopie) successive, che permetteranno di diminuire ad uno ad uno il numero dei cubi componenti.

Sia per es. un cubo  $K_n$  con una sola faccia  $K_{n-1}$  di adiacenza con un poliedro qualunque  $P_n$ , costituito da  $n$ -cubi di una rete: se  $O$  è un punto interno al cubo  $K_n'$  di  $P_n$  adiacente a  $K_n$ , comunque  $O$  sia prossimo alla faccia di adiacenza  $K_{n-1}$ , sempre accade che i segmenti  $OP_0$  proiettanti da  $O$  i punti  $P_0$  delle faccie libere di  $K_n$ , determinano sopra la faccia  $K_{n-1}$  non libera, un  $(n-1)$ -complesso omeomorfo al complesso delle faccie stesse. Se  $P'_0$  è la proiezione di  $P_0$  ed applichiamo la trasformazione radiale per similitudine, che lascia invariati i raggi  $OP_0$ , subordinando su ciascuno di essi la similitudine di centro  $O$  e di rapporto  $OP : OP'_0$ , il po-



liedro formato da  $K_n$ , cui si aggiunga la piramide  $OK_{n-1}$ , resta ridotto per deformazione isotopica alla piramide stessa, senza che si modifichino le faccie di questa che proiettano il contorno di  $K_{n-1}$ . Risulta così un omeomorfismo tra il poliedro  $P_n + K_n$  ed il poliedro  $P_n$ .

Si osservi che il punto  $O$  può sostituirsi con un altro punto interno a  $P_n$ , ma non situato nel cubo adiacente a  $K_n$ . Però in tal caso il segmento rettilineo, contenente i punti  $O, P_o, P'_o$ , andrà sostituito con una spezzata contenente i detti punti, alla quale si applicherà la medesima riduzione proporzionale delle lunghezze. Il procedimento è altresì applicabile se  $K_n$  è un poliedro, somma di cubi, il quale abbia con  $P_n$  una faccia di adiacenza e un'altra libera.

5. *Riduzione dei dominii a forma normale.* Nella deformazione, che muta  $A_n^1$  in  $A_n^o$ , il dominio  $A_n^o$  si muta in un insieme  $R_n^o$  interno ad  $A_n^o$ . Nella deformazione, che muta  $A_n^2$  in  $A_n^1$ , senza modificare  $A_n^o$ , l'albero  $A_n^1$  trasformasi in un insieme che contiene all'interno  $A_n^o$  ed è contenuto in  $A_n^1$ ; quest'insieme, nella nuova deformazione di  $A_n^1$  in  $A_n^o$ , si muta in un insieme  $R_n^1$  che contiene  $R_n^o$  ed è contenuto in  $A_n^o$ . Così proseguendo, il nucleo  $A_n^o$  viene decomposto in una somma di insiemi  $\sum_0^{\infty} (R_n^{j+1} - R_n^j)$ , che corrispondono omeomorficamente ai dominii anulari  $A_n^{j+1} - A_n^j$ .

Gli insiemi  $R_n^j$  son dominii, come risulta da ciò che si è detto nel definire la deformazione radiale; però non è necessario usufruire di questa proprietà per stabilire gl'infiniti omeomorfismi fra le parti componenti del nucleo  $A_n^j$  (dominii anulari) e i dominii anulari  $A_n^{j+1} - A_n^j$ , la cui somma forma il dominio dato  $R_n$ , escludendo i tagli effettuati lungo gli spazi  $S_m$  (n. 3).

Siccome ogni punto di  $R_n$ , non giacente su nessuno di questi  $S_m$ , appartiene a tutti gli alberi, da un certo in poi, se  $A_n^{j+1}$  è il primo albero, che contiene tal punto, questo giace nel dominio anulare  $A_n^{j+1} - A_n^j$  e possiede un omologo nell'anello corrispondente. Reciprocamente, ogni punto del nucleo appartiene ad uno degl'insiemi in cui il nucleo stesso è stato decomposto, oppure a due consecutivi. Ma siccome gli omeomorfismi fra due anelli consecutivi e i loro omologhi coincidono nell'insieme comune ai due anelli, la corrispondenza così stabilita fra i punti interni al nucleo e i punti interni a  $R_n$ , esclusi i tagli, è un omeomorfismo. Si conclude che:

*Dato in  $S_n$  un qualunque dominio finito  $R_n$ , se da esso si escludono i punti di certi tagli operati lungo un numero finito o infinito di spazi lineari, di dimensione al più uguale ad  $n - 1$ , l'insieme dei restanti punti interni al dominio è sempre omeomorfo all'interno di un  $n$ -cubo (o  $n$ -sfera).*



**Matematica.** — *Sur les lignes de plus grande pente de la fonction de Green.* Nota di P. ROCHER, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Le présent travail étend aux espaces euclidiens à plus de trois dimensions le fait que l'arc de plus grande pente de la fonction de Green, allant du pôle A à un point quelconque B du domaine, ne dépend pas symétriquement de A et B. M. G. Bouligand avait signalé <sup>(2)</sup> que cette dissymétrie existe déjà pour l'espace à trois dimensions, contrairement à ce qui se produit dans le cas du plan, où la ligne précédente est une géodésique (en se bornant aux domaines plans simplement connexes). Après avoir rappelé ses résultats essentiels, je montrerai que son principe de recherche, fondé sur la considération du cas où le pôle tend vers la frontière du domaine (n. 5) fournit encore la conclusion dans les espaces supérieurs. J'attire en outre l'attention (n. 4) sur une particularité intéressante de calcul qui permet de retrouver ce fait dans le cas de  $n = 3$ . Enfin, au n. 3, je rencontre des problèmes d'intégration effective, dont une suggestion de M. E. Lainé m'a permis de pousser la résolution plus loin qu'on pouvait l'espérer à première vue.

Tout d'abord, le cas d'un domaine plan simplement connexe, dont la frontière n'est pas réduite à un point, se ramène par représentation conforme à celui d'un demi-plan. Pour le demi-plan  $y > 0$ , les lignes de p. g. p. de la fonction de Green sont les géodésiques de

$$I_1 = \int_y^* ds$$

intégrale dont le minimum absolu est fourni par l'arc de cercle orthogonal à  $x'x$ , allant du pôle  $A_1$  à un point  $B_1$  du même demi-plan. Si l'on revient au domaine initial, l'arc de plus grande pente de la fonction de Green joignant le pôle A à un point B sera un nouvel arc géodésique relatif à l'intégrale I transformée de  $I_1$ , car ce nouvel arc donne encore le minimum absolu de I. C'est de cette propriété que M. Bouligand déduit, pour  $n = 2$ , la symétrie des arcs relativement à A et B. En effectuant la représentation conforme du plan sur une surface analytique, à un domaine simplement connexe du plan correspond un domaine simplement connexe sur la surface, et la

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) « Nouvelles Annales de Mathématiques », 6<sup>e</sup> série, t. II, Mai 1927, pp. 148-149.

fonction de Green pour l'équation de Laplace devient une fonction analogue pour l'équation de Beltrami relative à la surface. Les arcs de p. g. p. de cette nouvelle fonction jouissent manifestement de la même propriété de symétrie.

2. Pour prouver la dissymétrie à partir de  $n = 3$ , il suffit d'un cas particulier. Le plus simple est celui d'un demi-espace.

La recherche des lignes de plus grande pente de la fonction de Green  $G_n$  se ramène immédiatement au problème plan suivant.

*On considère deux axes rectangulaires  $ox, oy$ . Soient  $r, r'$  les distances d'un point quelconque  $M$  de leur plan aux deux points  $A(0, a)$  et  $A'(0, -a)$ . Trouver les lignes de plus grande pente de la fonction*

$$(1) \quad g_n = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{r'^{n-2}}$$

lignes qui s'identifient dans ce plan avec les lignes de p. g. p. de  $G_n$ .

3. L'équation différentielle, en coordonnées bipolaires, des lignes de niveau de  $g_n$  s'écrit

$$(2) \quad \frac{dr}{r^{n-1}} - \frac{dr'}{r'^{n-1}} = 0.$$

Pour obtenir les trajectoires orthogonales de lignes définies par une telle équation différentielle, le calcul montre qu'il suffit de remplacer respectivement  $dr$  et  $dr'$  par les quantités

$$\begin{aligned} (r^2 + r'^2 - 4a^2) dr - 2rr' dr' \\ 2rr' dr - (r^2 + r'^2 - 4a^2) dr'. \end{aligned}$$

L'équation des lignes de p. g. p. de  $g_n$  s'écrit donc

$$(3) \quad \frac{(r^2 + r'^2 - 4a^2) dr - 2rr' dr'}{r^{n-1}} = \frac{2rr' dr' - (r^2 + r'^2 - 4a^2) dr}{r'^{n-1}}$$

ou encore

$$(3') \quad \frac{[(r + r')^2 - 4a^2] (dr + dr')}{r^{n-1} + r'^{n-1}} = \frac{[(r - r')^2 - 4a^2] (dr - dr')}{r^{n-1} - r'^{n-1}}.$$

Il suffit de poser

$$(r + r')^2 = u, \quad (r - r')^2 = v, \quad 4a^2 = \alpha$$

pour la mettre sous les formes suivantes :

$$n \text{ impair} \quad \frac{u P_{\frac{n-3}{2}}(u, v) dv}{v - \alpha} = \frac{Q_{\frac{n-1}{2}}(u, v) du}{u - \alpha}$$

$$n \text{ pair} \quad \frac{P_{\frac{n-2}{2}}(u, v) dv}{v - \alpha} = \frac{P_{\frac{n-2}{2}}(v, u) du}{u - \alpha}$$

les polynômes P et Q étant homogènes du degré indiqué en indice.

En particulier pour  $n = 3$  et  $n = 4$  on a :

$$(4) \quad 2 \frac{dv}{du} = \frac{v - \alpha}{u - \alpha} \left( 1 + \frac{v}{u} \right)$$

$$(5) \quad \frac{(3u + v) dv}{v - \alpha} = \frac{(3v + u) du}{u - \alpha}.$$

Pour  $n = 3$  on obtient donc une équation de Riccati, ayant deux solutions évidentes, et après retour aux coordonnées  $r$  et  $r'$ , on écrit l'équation des lignes de p. g. p. de

$$g_3 = \frac{1}{AM} - \frac{1}{A'M}$$

sous la forme

$$(6) \quad \left( \frac{1}{AM} + \frac{1}{A'M} \right) [\overline{AA'}^2 - (AM - A'M)^2] = c^{te}.$$

Dans le cas de  $n = 4$ , on peut, avec M. E. Lainé, appliquer une méthode que j'ai noté la possibilité d'étendre aux équations de la forme plus générale

$$(7) \quad \frac{au + bv + c}{v - \alpha} dv = \pm \frac{av + bu + c}{u - \alpha} du$$

$a, b, c$  désignant trois constantes.

Posons :

$$u - \alpha = x, \quad v - \alpha = y$$

l'équation (5) peut alors s'écrire

$$(5') \quad (3x + y) x dy - (3y + x) y dx + 4\alpha (x dy - y dx) = 0$$

et on vérifie que cette équation admet (comme en admettrait (7')) un facteur intégrant  $F$  commun à chacun de ses membres. Pour l'équation (5')

$$F = (x - y)^{-3} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, les lignes de p. g. p. de  $g_4$  ont une équation qu'on peut écrire

$$(8) \quad \lambda \mu \left[ \overline{AA'}^2 \left( \frac{1}{\overline{AM}^2} + \frac{1}{\overline{A'M}^2} \right) + 2 - \frac{\overline{AM}^2}{\overline{A'M}^2} + \frac{\overline{A'M}^2}{\overline{AM}^2} \right] - 4 \overline{AA'}^2 \log \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} = c^{te}$$

où on a posé

$$\lambda = \sqrt{(\overline{AM} + \overline{A'M})^2 - \overline{AA'}^2}$$

$$\mu = \sqrt{(\overline{AM} - \overline{A'M})^2 - \overline{AA'}^2}.$$

4. Pour montrer la propriété annoncée dans le cas de  $n = 3$ , on peut calculer l'angle  $\theta$  de la tangente en  $A$  à la ligne  $L_{AB}$  (ligne de p. g. p. relative à  $A$  comme pôle et qui passe par  $B$ ) en utilisant l'égalité, vérifiée au second ordre près (quand  $M \rightarrow A$ ):

$$MA' = AA' - MA \cos \theta.$$

En portant cette valeur dans l'équation (6) on obtient  $\cos \theta$ .

En calculant, d'autre part, l'angle  $\theta_1$  de  $AA'$  et du gradient de  $g_3$  ( $B, M$ ) pris en  $A$ , on voit que, si  $AB$  est parallèle à  $x'x$ ,  $\cos \theta_1$ , à l'encontre de  $\cos \theta$ , s'exprime irrationnellement en fonction de  $BA, B'A, AA'$ . Les directions de la tangente et du gradient ne peuvent donc coïncider, ce qui prouve la dissymétrie <sup>(1)</sup>.

5.  $n > 3$ . Si  $L_{AB}$  se confond avec  $L_{BA}$ , la ligne  $L_{AB}$  admet nécessairement un axe de symétrie parallèle à  $AA'$ .

En effet la ligne  $L'_{AB}$  symétrique de  $L_{AB}$  par rapport à  $AA'$  est encore une ligne  $L_A$ . D'autre part, si  $A$  et  $B$  sont sur une même parallèle à  $x'x$ , les lignes  $L_B$  se déduisent des lignes  $L_A$  par la translation  $AB$ . La ligne déduite de  $L'_{AB}$  par la translation  $AB$  est donc la ligne  $L_{BA}$ . Cette ligne est évidemment symétrique de  $L_{AB}$  par rapport à la parallèle à  $AA'$  qui passe par le milieu de  $AB$ . Si  $L_{AB}$  et  $L_{BA}$  se confondent,  $L_{AB}$  sera encore symétrique de  $L_{BA}$  par rapport à cette droite, qui sera ainsi axe de symétrie pour les deux courbes confondues.

(1) Par contre, dans le cas  $n = 2$ , *symétrie* va de pair avec *rationalité*, dans le calcul correspondant.

Supposons maintenant que  $AA'$  tende vers zéro. Cette transformation n'altère évidemment pas la symétrie que posséderaient les lignes  $L_A$ .

Les lignes de plus grande pente de  $g_n$  sont alors celles des limites de

$$(8) \quad \frac{1}{AA'} \left( \frac{1}{AM^{n-2}} - \frac{1}{A'M^{n-2}} \right) \quad \text{ou} \quad \left[ \frac{1}{AA'} \log \frac{A'M}{AM}, \text{ si } n = 2 \right].$$

Ces fonctions ont pour limite quelque soit  $n \geq 2$

$$(9) \quad \frac{\cos \varphi}{OM^{n-1}}$$

en appelant  $O$  le point vers lequel tendent  $A$  et  $A'$ , et  $\varphi$  l'angle de  $OM$  et de  $Oy$ .

L'équation des lignes de p. g. p. de la fonction (9) se calcule aisément et s'écrit en coordonnées polaires  $\left( \rho, \omega = \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ :

$$(10) \quad \rho = 2R \cos^{n-1} \omega$$

$R$  désignant une constante arbitraire.

Si  $n$  est impair cette équation représente une ligne qui admet  $Oy$  pour axe de symétrie, et comme  $\rho$  est une longueur bornée, cette ligne ne peut admettre d'autre axe de symétrie (sans quoi, elle en admettrait une infinité).

Si  $n$  est pair on vérifie aisément que cette ligne n'admet d'axe de symétrie parallèle à  $Oy$  que pour  $n = 2$  seulement.



**Matematica.** — *Sur l'existence de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche.* Nota di RUY LUIS GOMES, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Soit S une surface fermée et  $\mu$  une fonction intégrable des paramètres qui fixent la position d'un point M' sur cette surface.

On entend par potentiel de simple couche, étalée sur la surface S avec la densité  $\mu$ , l'intégrale

$$V(P) = \int_S \frac{\mu}{r'} d\sigma$$

$r'$  étant la distance du point P, intérieur à S, à un point quelconque M' de S.

Si nous représentons maintenant par  $\bar{n}$  la normale intérieure en un point M de la surface S, la dérivée de V suivant  $n$ , au point P, aura pour exprexion

$$\frac{dV}{dn} = \int_S \mu \frac{\cos \psi_1}{r'^2} d\sigma,$$

$\psi_1$  étant l'angle de la normale  $\bar{n}$  avec la direction PM'. Mais si le point P coïncide avec M lui-même cette intégrale devient

$$I = \int_S \mu \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma,$$

$r$  étant la distance de M à un point quelconque M' de S ed  $\psi$  l'angle de la normale  $\bar{n}$  avec la direction MM'.

Or, nous nous proposons de démontrer l'existence de cette intégrale en supposant que:

1) la densité  $\mu$  est une fonction continue au point M ou, du moins, existe la limite de  $\mu_{M'}$ , quand M' tend vers M;

2) M est le centre d'une petite région  $\gamma$  de S qu'on peut représenter par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

(1) Nella seduta del 20 marzo 1932.

F étant une fonction continue ainsi que ses dérivées premières qui ne sont jamais nulles à la fois;

3) la fonction F admet aussi des dérivées secondes limitées sur toute la région  $\gamma$ .

Aucune de ces hypothèses n'exige, donc, que les dérivées secondes de F soient continues, mai tout simplement limitées.

Notre but même, en rédigeant cet article, est de montrer qu'on peut se passer de l'hypothèse de la continuité des dérivées secondes<sup>(1)</sup> de la fonction pour s'assurer l'existence de l'intégrale

$$\int_S \mu \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma,$$

la densité  $\mu$  vérifiant la condition 1).

2. Moyennant l'hypothèse 1) à chaque point  $M'$  du voisinage  $\gamma$  de M on peut faire correspondre la normale positive dont les cosinus sont

$$\omega' F'_{x'}, \quad \omega' F'_{y'}, \quad \omega' F'_{z'},$$

en posant

$$F'_{x'} = F'_x(x', y', z'), \dots$$

$$\omega' = \omega(x', y', z') = \frac{1}{\sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}}.$$

Et si nous représentons par  $\theta$  l'angle des deux normales - au point M et au point  $M'$  - nous aurons:

$$\sin^2 \theta = (\omega \omega')^2 [(F'_x F'_{y'} - F'_{x'} F'_y)^2 + \dots].$$

Or, A, B, C, ... étant certaines valeurs des dérivées secondes, le théorème de la moyenne nous permet d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_x = F'_{x'} + A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') \\ F'_y = F'_{y'} + A_1(x - x') + B_1(y - y') + C_1(z - z') \\ F'_z = F'_{z'} + A_2(x - x') + B_2(y - y') + C_2(z - z'), \end{array} \right.$$

et il s'en suit, par exemple,

$$F'_x F'_{y'} - F'_{x'} F'_y = H(x - x') + K(y - y') + L(z - z')$$

(1) GOURSAT, *Analyse*, III, 1923, pp. 281-282.

avec

$$H = AF'_{y'} - A_1 F'_{x'}, \dots$$

Donc, en faisant

$$x - x' = r\alpha, \quad y - y' = r\beta, \quad z - z' = r\gamma$$

il viendra

$$E'_x F'_{y'} - F'_{x'} F'_y = M_r, \quad F'_x F'_{z'} - F'_{z'} F'_x = M_1 r, \quad F'_y F'_{z'} - F'_{z'} F'_y = M_2 r,$$

avec

$$M = H\alpha + K\beta + L\gamma, \dots$$

En tenant compte de ces résultats et en représentant par  $k$  la limite supérieure de  $\omega'$ , nous pouvons donc écrire <sup>(1)</sup>

$$\sin \theta < k^2 r / \sqrt{M^2 + M_1^2 + M_2^2} = r l^2,$$

avec  $l$  bornée sur toute la région  $\gamma$ , parce qu'il en est ainsi de  $H, K, L$  (hypothèse 3°) et par suite de  $M, M_1$  et  $M_2$ . Cette inégalité obtenue, l'existence de l'intégrale s'en suit presque immédiatement.

En effet, si nous faisons correspondre à chaque point  $M'$  de  $S$  le trièdre dont les arêtes sont les trois directions  $-\bar{n}, \overline{MM'}$  et la normale au point  $M'$  — et si nous représentons par  $\varphi$  l'angle de ces deux dernières droites, il viendra

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos \Psi$$

et en substituant dans l'intégrale nous aurons:

$$\int_S \mu \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma = \int_S \mu \cos \theta \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma + \int_S \mu \sin \varphi \cos \Psi \frac{\sin \theta}{r^2} d\sigma.$$

La première intégrale du second membre étant un potentiel de double couche de densité  $\mu \cos \theta$  a une valeur finie, vu l'hypothèse 1°).

La seconde, se comportant au voisinage  $\gamma$  de  $M$  comme un potentiel de simple couche, vu que

$$\sin \theta < l^2 r,$$

a aussi une valeur finie.

L'intégrale donnée a donc aussi une valeur finie, comme il faudrait démontrer <sup>(2)</sup>.

(1) HADAMARD, *Analyse*, 1930, II, pp. 36-37-38.

(2) Sur le sujet de cet article il convient de rappeler aussi: PICARD, *Analyse*, I, 1922, pp. 201-209; TH. DE DONDER, *Théorie Mathématique de l'Électricité*, 1925, pp. 38-50 et 54-55; KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Berlin 1890, p. 75; MAGGI, *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico* [Milano, Hoepli, 1931], pp. 79-99; POINCARÉ, *Théorie du Potentiel Newtonien*, 1899, pp. 92-111.

**Matematica.** — *Deformazione di specie superiore e sistemi di forme per una  $V_m$  in  $R_n$ .* Nota di E. BORTOLOTTI, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Una generalizzazione degli sviluppi in serie delle funzioni determinanti.* Nota di U. BROGGI, pres. dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di second'ordine di tipo misto.* Nota di M. CIBRARIO, pres. dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geometria.** — *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine.* Nota di L. CAMPEDELLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

1. La classificazione dei piani doppi con curva di diramazione  $C_{10}$  del decimo ordine <sup>(2)</sup>, mette in evidenza alcuni tipi particolari, notevoli per le questioni di esistenza cui danno luogo e per le superficie a cui portano, tra le quali sono anche esempi nuovi per la teoria delle superficie (superficie di *genere superficiale*  $p_a = p_g = 0$ , *genere lineare*  $p^{(1)} = 3$  o  $p^{(1)} = 2$ , e *bigenere*  $P = 3$  o  $P = 2$ ). Qui si approfondisce lo studio di siffatti p. d., dandone l'effettiva costruzione e determinando le loro proprietà principali.

2. *Piano doppio con curva di diramazione  $C_{10}$  dotata di un punto sestuplo M, e quattro punti  $[3, 3]$  sopra rette uscenti da M.* Queste rette fanno parte della  $C_{10}$ , e la residua  $C_6$  ha in M un punto doppio e possiede quattro tacnodi  $(A, A'), (B, B'), (C, C')$  e  $(D, D')$ , le cui tangenti tacnodali passano per M. La  $C_6$  è pertanto una sestica di Halphen <sup>(3)</sup>, i cui nove punti doppi hanno però una disposizione particolare. Esiste veramente una  $C_6$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) Cfr. L. CAMPEDELLI, *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine.* (In questi «Rendiconti», 6 marzo 1932).

(3) Cfr. HALPHEN, *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles.* («Bull. de la soc. math. de France», t. X, p. 162, 1882; oppure *Oeuvres d'Halphen*, t. II, Paris 1918).

siffatta? e in caso affermativo, come si può costruire? La risposta è data dal teorema:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un  $C_6$  di Halphen, con quattro tacnodi  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$ , le cui tangenti tacnodali passino per il nono punto doppio  $M$  della  $C_6$ , è che la cubica passante per  $A, A', B, B', C, C', D, D'$  ed  $M$ , abbia in  $M$  un punto sestatico (in particolare: un flesso).*

Consideriamo infatti una cubica  $C_3$  e da un suo punto  $M$  si conducano le quattro tangenti alla  $C_3$ : siano  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$  le coppie di punti infinitamente vicini che danno i contatti di queste tangenti. Indicheremo con  $\chi$  l'integrale di prima specie della  $C_3$ , con  $\tilde{\omega}$  e  $\tilde{\omega}'$  i periodi di  $\chi$ . Si può supporre che la somma dei valori di  $\chi$  in tre punti allineati di  $C_3$ , sia nulla rispetto ai periodi. Allora se  $a, b, c, d$  ed  $m$  sono i valori di  $\chi$  in  $A, B, C, D$  ed  $M$ , rispettivamente, si ha:

$$(1) \quad 2a + m \equiv 0; \quad 2b + m \equiv 0; \quad 2c + m \equiv 0; \quad 2d + m \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}.$$

Da cui, sommando e moltiplicando per 2:

$$(2) \quad 4a + 4b + 4c + 4d + 8m \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}.$$

Ora la condizione di Halphen per l'esistenza di una sestica  $C_6$  passante doppiamente per  $A, A', B, B', C, C', D, D'$  ed  $M$ , richiede che sia:

$$(3) \quad 4a + 4b + 4c + 4d + 2m \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}.$$

Dalla (3), confrontata con la (2), segue:

$$(4) \quad 6m \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}.$$

Inversamente da (4) e (2) si ha la (3).

La (4) importa l'esistenza di una conica sestitangente alla  $C_3$  in  $M$ , che è quindi un punto *sestatico* della  $C_3$ . La (4) è soddisfatta anche nei flessi della  $C_3$ , ma le  $C_6$  che corrispondono a tali soluzioni sono spezzate in coppie di cubiche. Si hanno invece  $C_6$  irriducibili per i punti sestatici propriamente detti, i quali, come è noto <sup>(1)</sup>, per una cubica generica sono 27 e cadono nei tangenziali dei flessi (intersezioni della  $C_3$  con le polari armoniche dei nove flessi). Si conclude che esistono due tipi di p. d. con  $C_{10}$  di diramazione dotata delle singolarità predette: l'uno relativo al caso della  $C_6$  irriducibile, l'altro a quello della  $C_6$  spezzata in due cubiche. Però i

(1) Cfr., p. es., F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I (Bologna. Zanichelli, 1915), libro II, cap. II, § 22.



p. d. dei due tipi hanno gli stessi caratteri, e portano ugualmente a superficie irregolari non rigate. Si ha per esse  $p_a = -1$ ,  $p_g = 0$  e  $P = 1$ . Inoltre dalle considerazioni che seguono si dedurrà facilmente che su queste superficie si può costruire un sistema lineare di genere  $\pi (> 1)$  e di grado  $n = 2\pi - 2$ : ciò prova che non esistono curve pluricanoniche d'ordine diverso da zero. Quindi per i plurigeneri  $P_i$  si ha:  $p_g = P_3 = P_5 = \dots = 0$ ;  $P_2 = P_4 = \dots = 1$ .

Conformemente alla teoria generale delle superficie irregolari con  $p_g = 0$ , i nostri p. d. possiedono un fascio ellittico di curve ellittiche: questo, nel caso in cui la  $C_6$  sia irriducibile, è rappresentato dalle sestiche del fascio di Halphen cui appartiene la  $C_6$ ; quando invece la  $C_6$  è spezzata in due cubiche, quel fascio ellittico è costituito dal fascio di cubiche individuato dalle due componenti della  $C_6$ . La cosa si dimostra nel modo che segue.

*Caso della  $C_6$  irriducibile:* Si deve far vedere che ogni sestica  $K_6$  del fascio di Halphen cui appartiene la  $C_6$ , è immagine di una curva spezzata; e che nel fascio stesso esistono quattro sestiche immagini di curve unite nell'involuzione che risponde al piano doppio.

Premettiamo l'osservazione: i sei punti  $A, B, C, C', D, D'$ , appartengono ad una conica; e così pure i punti  $A, A', B, B', C$  e  $D$ . Infatti, tornando a considerare l'integrale  $\chi$  della  $C_3$  passante per i punti  $A, A', B, B', C, C', D, D'$  ed  $M$ , e supponendo, per semplicità, che esso si annulli nel flesso di cui  $M$  è il tangenziale, potremo porre per il valore di  $\chi$  in  $M$ :

$$m \equiv \frac{\tilde{\omega}}{2} \quad (\text{mod. } \tilde{\omega}, \tilde{\omega}').$$

Allora dalla (1) segue:

$$a \equiv \frac{\tilde{\omega}}{4}; \quad b \equiv \frac{3\tilde{\omega}}{4}; \quad c \equiv \frac{\tilde{\omega}}{4} + \frac{\tilde{\omega}'}{2}; \quad d \equiv \frac{3\tilde{\omega}}{4} + \frac{\tilde{\omega}'}{2} \quad (\text{mod. } \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$$

e quindi:

$$a + b + 2c + 2d \equiv 0 \quad (\text{mod. } \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$$

$$2a + 2b + c + d \equiv 0 \quad (\text{mod. } \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$$

relazioni che provano l'asserto.

La dimostrazione che la sestica generica  $K_6$  del fascio di Halphen cui appartiene la  $C_6$ , è immagine di una curva spezzata, può farsi semplicemente con opportune considerazioni di continuità<sup>(1)</sup>. Ma la cosa si vede

(1) In un p. d. si abbiano due curve  $K$  e  $K'$ , appartenenti ad uno stesso sistema continuo, prive di punti di diramazione, e di cui siano  $G$  e  $G'$ , rispettivamente, i gruppi dei punti critici apparenti. Si supponga che facendo tendere con continuità la  $K'$  alla  $K$ , il gruppo  $G'$  abbia come limite su  $K$  un gruppo equivalente a  $G$ : allora se la  $K$  è immagine di una curva spezzata, lo stesso accade della  $K'$ .

anche in modo diretto, come segue. Assumendo il p. d. come piano  $\chi = 0$ , indichiamo con

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad \gamma = 0 \quad , \quad \delta = 0 \quad ,$$

le equazioni delle rette MA, MB, MC, MD, e con

$$\varphi = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad ,$$

rispettivamente, quelle di  $C_6$  e della conica passante per A, A', B, B', C, D. La  $K_6$  ha così un'equazione del tipo:

$$\varphi + h\gamma\delta\psi^2 = 0.$$

La curva rappresentata dalla  $K_6$  doppia, è data da:

$$\begin{cases} \chi^2 - \alpha\beta\gamma\delta\varphi = 0 \\ \varphi + h\gamma\delta\psi^2 = 0 \end{cases}.$$

e quindi anche da:

$$\begin{cases} \chi^2 + h\alpha\beta\gamma^2\delta^2\psi^2 = 0 \\ \varphi + h\gamma\delta\psi^2 = 0. \end{cases}$$

Queste ultime equazioni dicono che la curva obiettiva rappresentata dalla  $K_6$ , non cambia quando alla  $C_{10}$  di diramazione si sostituisca la curva, ancora del decimo ordine, costituita dalle rette MA ( $\alpha = 0$ ), MB ( $\beta = 0$ ), insieme alla conica  $\psi = 0$  contata due volte, e alle rette MC ( $\gamma = 0$ ), MD ( $\delta = 0$ ), pure contate due volte. Ma agli effetti della nostra ricerca, è lecito sopprimere le componenti doppie di quest'ultima curva di diramazione: quindi siamo ricondotti a mostrare la riducibilità della curva rappresentata dalla  $K_6$  nel p. d. con curva di diramazione composta delle due rette MA ed MB. Queste danno come punti critici apparenti sulla  $K_6$  (fuori di M) i punti (A, A') e (B, B'): basta far vedere che essi costituiscono un gruppo equivalente a quelli segati sulla  $K_6$  (fuori di M) dalle rette per M, che danno il sistema lineare metà di quello cui appartiene la curva di diramazione MA + MB<sup>(1)</sup>. Consideriamo la serie lineare  $g_1^3$  individuata dal gruppo (A, A', B, B'): poichè per A, A', B, B' passa la cubica  $C_3$ , della

(1) Cfr. COMESSATTI A., *Sulle curve doppie di genere qualunque e particolarmente sulle curve ellittiche doppie*. («Memorie della R. Accad. d. Scienze di Torino», ser. II, t. LX, 1909); e CHISINI O., *Sulle superficie di Riemann multiple, prive di punti di diramazione*. («Rendiconti della R. Accad. dei Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIV, 1915, p. 153). Vedi anche ENRIQUES F., *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. CAMPEDELLI (Padova, «Cedam», 1932), § 58.

$g_4^3$  fanno parte tutte le quaterne segate su  $K_6$  dalle cubiche per  $A, B, C, C', D, D'$  e  $M$ . Ma tra tali cubiche sono quelle spezzate nella conica cui appartengono i punti  $A, B, C, C', D, D'$ , e in una retta per  $M$ : onde anche le rette per  $M$  segano sulla  $K_6$  gruppi della  $g_4^3$ .

Mostrato in tal modo che le sestiche  $K_6$  rappresentano curve spezzate in due parti ellittiche coniugate nell'involuzione relativa al p. d., si ha che ciascuna di quelle due componenti varia in un fascio ellittico, poichè tra le  $K_6$  ne sono quattro che rappresentano curve unite nell'involuzione suddetta. Esse sono, oltre la  $C_6$  di diramazione e la sestica costituita dalla  $C_3$  contata due volte, la  $K_6$  formata dalle rette  $MA$  e  $MB$  insieme alla conica per  $A, B, C, C', D, D'$ , contata due volte; e la sestica composta delle rette  $MD, MC$ , e della conica per  $A, A', B, B', C, D$ , pure contata due volte.

*Caso della  $C_6$  spezzata in due cubiche  $C_3$  e  $C'_3$ .* La  $C_3$  e la  $C'_3$  individuano un fascio  $|K_3|$ , la cui  $K_3$  generica è immagine di una curva riducibile. Infatti la curva che ha per immagine la  $K_3$  non cambia quando ci si riferisca al p. d. che ha per curva di diramazione quella che si ottiene dalla  $C_{10}$  sostituendo a  $C_3$  e a  $C'_3$  una cubica qualunque del loro fascio (diversa dalla  $K_3$  considerata). Allora, siccome i punti  $A, B, C$  appartengono ad una stessa retta (polare armonica del flesso  $M$ ), alla  $C_3$  sostituiamo la cubica composta dalla retta  $ABC$  contata due volte, e dalla tangente di flesso  $MD$ ; e alla  $C'_3$  sostituiamo invece le tre rette  $MA, MB, MC$ . In luogo del p. d. con  $C_{10}$  di diramazione spezzata nelle rette  $MA, MB, MC, MD$ , e nelle cubiche  $C_3$  e  $C'_3$ , si potrà così considerare il p. d. la cui curva di diramazione è costituita dalle rette  $MA, MB, MC, MD$  e  $ABC$ , ciascuna contata due volte: ma sopra un p. d. siffatto, la  $K_3$  è immagine di una curva spezzata. Le cubiche del fascio  $|K_3|$  che danno curve unite nell'involuzione, sono le due componenti  $C_3$  e  $C'_3$  della  $C_6$  di diramazione; la cubica spezzata nelle rette  $MA, MB, MC$ , e quella costituita dalla tangente di flesso  $MD$  e dalla retta  $ABC$  contata due volte.

3. *Piano doppio con  $C_{10}$  di diramazione dotata di tre punti  $[3, 3]$  in  $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ , e di tre punti quadrupli  $L, M, N$ , situati sopra una stessa retta, la quale si stacca dalla  $C_{10}$  rimanendo una  $C_9$  con nove punti tripli (particolare  $C_9$  di Halphen). Per costruire una  $C_9$  siffatta irriducibile, i punti  $L, M, N$  si potranno scegliere ad arbitrio, purchè allineati, sopra una cubica  $C_3$ , mentre  $A, B, C$  dovranno costituire un gruppo di una serie sesta parte della  $g_{18}^{17}$  segata su  $C_3$  dalle curve del sesto ordine, senza però che i sei punti  $A, A', B, B', C, C'$ , appartengano ad una conica. Se invece si verifica quest'ultima circostanza, la  $C_9$  si spezza in tre cubiche di un fascio. Un altro caso di riducibilità della  $C_9$  si ha quando i punti  $A, B, C$  danno un gruppo di una delle serie quarta parte della  $g_{12}^{11}$  segata su  $C_3$  dalle quartiche; allora esiste un fascio di sestiche  $C_6$  passanti*

doppiamente per  $A, A', B, B', C, C'$ . Ogni  $C_6$  insieme alla  $C_3$ , costituisce una  $C_9$  del tipo richiesto. Nascono così i seguenti p. d.:

a)  $C_9$  irriducibile. Si ha  $p_a = p_g = 0$ , mentre esiste una quartica bicanonica costituita dalla  $C_3$  insieme alla retta dei tre punti  $L, M, N$  (che dà una componente eccezionale), quindi  $P = 1$ . Relativamente al *trigenere*  $P_3$  dobbiamo distinguere due casi. La  $C_9$  di diramazione (insieme alla retta  $LMN$  contata tre volte) dà una curva tricanonica unita nell'involuzione relativa al p. d. Una seconda curva tricanonica unita nell'involuzione, si ha in corrispondenza ad una sestica che sia il triplo delle coniche che danno il sistema canonico; cioè ad una sestica composta della retta  $LMN$  contata due volte, e di una quartica passante per  $L, M, N$ , avente un punto doppio in ciascuno dei punti  $A, B, C$ , e un punto semplice nei punti  $A', B', C'$ . Ora una quartica siffatta esiste solo quando i punti  $A, B, C$  siano punti di osculazione della  $C_3$  con un'altra cubica: è allora  $P_3 = 2$ . Mentre nel caso contrario si ha  $P_3 = 1$ . Infatti se non esiste la predetta quartica (che insieme alla retta  $LMN$  dà una curva del sistema metà di quello cui appartiene la  $C_{10}$  di diramazione) la  $C_3$  bicanonica è immagine di una curva irriducibile, e quindi se si avesse un fascio di curve tricanoniche, esisterebbe una curva tricanonica contenente la curva bicanonica, per modo che si avrebbe come residua una curva canonica.

Si ha in ogni caso  $P_6 = 2$ , poichè esiste un fascio di curve seicanoniche rappresentato (doppiamente) dal fascio di Halphen cui appartiene la  $C_9$ .

b)  $C_9 = C_3 + C_6$ . È  $p_a = p_g = 0$ ,  $P = P_3 = 1$ . Le sestiche del fascio di Halphen cui appartiene la  $C_6$  di diramazione, danno (a meno di componenti eccezionali) le curve quadricanoniche:  $P_4 = 2$ .

c)  $C_9$  spezzata in tre cubiche di un fascio  $|C_3|$ , i punti  $A, B, C$  non appartenendo ad una retta. Si ha  $p_a = p_g = 0$ ;  $p^{(1)} = 1$  e  $P = 2$  poichè le curve bicanoniche sono date dalle cubiche di  $|C_3|$ , oltre la componente eccezionale costituita dalla retta dei tre punti  $L, M, N$ .

d)  $C_9$  spezzata in tre cubiche di un fascio  $|C_3|$ , i punti  $A, B, C$  essendo sopra una retta. Si ha una curva canonica data dalla retta  $ABC$  insieme alla  $LMN$ , quindi  $p_a = 0$  e  $p_g = 1$ : si ottiene così una superficie irregolare. Le curve bicanoniche sono rappresentate dalle quartiche (doppie) spezzate nella retta  $LMN$  e nelle cubiche di  $|C_3|$ :  $P = 2$ . Si osservi però che le cubiche di  $|C_3|$  sono immagini di curve spezzate, le cui due componenti danno luogo ciascuna ad un fascio ellittico di curve ellittiche.

4. *Piani doppi con  $C_{10}$  di diramazione, che danno esempi di superficie con  $p_a = p_g = 0$  e  $p^{(1)} > 1$ .*

Il primo di questi p. d. è definito da una  $C_{10}$  di diramazione dotata di sei punti  $[3, 3]$ . I punti singolari della  $C_{10}$  non possono assegnarsi in posizione arbitraria, quindi le  $C_{10}$  non danno luogo a sistemi lineari, ma si distribuiscono invece in uno o più sistemi continui, che il computo delle



costanti mostra essere di dimensione 11. Tra tali  $C_{10}$  ne saranno di irriducibili? Non sembra facile poterlo dimostrare, per quanto si sia portati a crederlo quando si osservi che le  $C_{10}$  sono razionali, e che la curva razionale generale del decimo ordine possiede 36 punti doppi: ora se si impone a questi punti di raggrupparsi in guisa da far nascere le richieste singolarità, non si vede perchè le corrispondenti condizioni dovrebbero determinare lo spezzamento della curva. In ogni modo però accanto ad un eventuale sistema di  $C_{10}$  irriducibili, si mostra facilmente l'esistenza di un altro sistema continuo  $\infty^{11}$  di  $C_{10}$  spezzate, le quali sono prive di componenti multiple, e provano così almeno l'esistenza di una famiglia (dipendente da tre moduli) di p. d. del nostro tipo. Le  $\infty^{11}$   $C_{10}$  spezzate si ottengono prendendo tre coniche due a due bitangenti (p. es.: due cerchi concentrici ed un'ellisse inscritta nell'uno e circoscritta all'altro)<sup>(1)</sup>, ed una quartica passante per i loro sei punti di contatto ed ivi tangente alle coniche stesse. Quando la  $C_{10}$  sia composta in tal modo<sup>(2)</sup>, si ha per il corrispondente p. d.,  $p_a = p_g = 0$ , e le curve bicanoniche sono date (doppiamente) dalle sestiche di una rete di grado quattro:  $P = 3$ ,  $p^{(1)} = 3$ .

Analoga questione di esistenza nasce per il piano doppio con  $C_{10}$  di diramazione dotata di cinque punti  $[3, 3]$  e un punto quadruplo: ciò che porta  $p_a = p_g = 0$  e  $p^{(1)} = P = 2$ . Anche qui si costruiscono delle  $C_{10}$  spezzate, senza componenti multiple: tali sono quelle costituite da tre coniche — due delle quali siano bitangenti alla terza e si tocchino fra loro (incontrandosi ulteriormente in due punti  $M, N$ )<sup>(3)</sup> — e da una quartica avente un punto doppio, p. es., in  $M$ , e passante per i cinque punti di contatto di quelle coniche, ed ivi tangente ad esse.

(1) Date due coniche bitangenti fra loro, esistono  $\infty^1$  coniche bitangenti ad entrambe. Queste si costruiscono in base all'osservazione che se si hanno tre coniche mutuamente bitangenti, le tangenti di contatto di due di esse, e le loro corde di contatto con la terza, passano per uno stesso punto e formano un gruppo armonico. Da cui segue che le tre corde di contatto costituiscono un triangolo autocongiugato rispetto a tutte e tre le coniche.

(2) Nasce il dubbio che per una generica  $C_{10}$  irriducibile i sei punti  $[3, 3]$  stiano sempre sopra una conica, il che porterebbe  $p_a = 0$ ,  $p_g = 1$ . Ma anche ciò non sembra debba accadere perchè le  $C_{10}$  con sei punti  $[3, 3]$  sopra una conica sono più che  $\infty^{11}$ , avendosi tra queste almeno le  $\infty^{14}$   $C_{10}$  spezzate in una conica contata due volte e in una cubica pure contata due volte.

(3) Date due coniche bitangenti, esistono  $\infty^2$  coniche bitangenti ad una di esse e tangenti all'altra.



**Geometria.** — *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale.* Nota di G. PALOZZI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. FUBINI.

1. I risultati che espongo in questa Nota vengono ottenuti considerando l'intorno di un punto di una superficie sulle sezioni piane passanti per il punto e aventi ivi una qualche particolarità proiettiva (quindi sulle sezioni prodotte dal piano tangente e da piani passanti per una tangente asintotica).

Sia  $\sigma$  la superficie; O il punto che si considera su di essa e che si suppone regolare e non parabolico.

Mi riferirò alla solita rappresentazione parametrica di  $\sigma$ , prendendo come linee coordinate  $u, v$  le asintotiche; come coordinate proiettive omogenee  $x^i(u, v)$   $i = (1, \dots, 4)$  dei punti di  $\sigma$  quelle *normali* di Fubini, che soddisfano al sistema

$$x_{uu} = \frac{\partial g \beta \gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + n x \quad , \quad x_{vv} = \frac{\partial g \beta \gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + v x ,$$

$$\left( x_u = \frac{\partial x}{\partial u} , \dots ; \beta \gamma \neq 0 \right) ;$$

e come coordinate tangenziali  $\xi^i(u, v)$  quelle *corrispondenti* alle coordinate di punto  $x^i$ . Per comodità nei calcoli, talora farò anche uso delle coordinate locali  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ , definite per un punto generico  $x'$  da

$$x' = \eta_0 x + \eta_1 x_u + \eta_2 x_v + \eta_3 x_{uv} ,$$

ove  $x; x_u; x_v; x_{uv}$  s'intendono calcolati in O: supporrò anzi (com'è lecito) che vi assumano i valori  $0, 0, 0, 1; 1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0$ .

2. Sia C la sezione di  $\sigma$  col pian tangente in O. Nell'ipotesi fatta (O non parabolico), per O passano *due* rami di C tangenti rispettivamente alle rette  $(x, x_u)$  e  $(x, x_v)$ . Su uno di questi rami, per es. sul ramo tangente alla retta  $(x, x_u)$ , si ha ( $\eta_3 = 0$  e)

$$(1) \quad \frac{\eta_2}{\eta_0} = \frac{1}{3} \beta \left( \frac{\eta_1}{\eta_0} \right)^2 - \frac{1}{12} \beta \frac{\partial g \beta \gamma^2}{\partial u} \left( \frac{\eta_1}{\eta_0} \right)^3 + \dots$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

fino all'intorno del terzo ordine di  $O$ ; che è l'intorno d'ordine minimo, dopo quello del primo ordine, che abbia interesse a prendersi in considerazione, non avendo  $\beta$  significato geometrico. In altri termini, per studiare l'intorno di  $O$  (oltre il primo ordine) sul ramo (1) di  $C$ , il primo passo da fare è di approssimare questo ramo con curve aventi un contatto 4-punto.

Nell'ipotesi più semplice, queste curve saranno coniche. Ora esistono  $\infty^1$  coniche aventi un contatto 4-punto con (1) in  $O$ : una qualunque di esse si ottiene fissando il valore del parametro  $\lambda$  nell'equazione

$$(2) \quad \eta_0 \eta_2 = \frac{1}{3} \beta \eta_1^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lg \beta \gamma^2}{\partial u} \eta_1 \eta_2 + \lambda \eta_2^2.$$

Però, il polo della retta  $(x, x_v)$  rispetto ad una di tali coniche *non* dipende dal valore fissato per  $\lambda$ <sup>(1)</sup>: ha, infatti, le coordinate

$$(3) \quad x_u - \frac{1}{4} \frac{\partial \lg \beta \gamma^2}{\partial u} x.$$

Questo punto appare dunque come elemento comune a tutte le coniche aventi in comune col ramo (1) di  $C$  l'intorno del terzo ordine: *il punto (3) cioè RAPPRESENTA l'intorno del terzo ordine di  $O$  sul ramo di  $C$  tangente alla  $(x, x_u)$ .*

Lo stesso dicasi del punto

$$(4) \quad x_v - \frac{1}{4} \frac{\partial \lg \beta \gamma^2}{\partial v} x$$

per l'altro ramo di  $C$ .

La congiungente i punti (3) e (4) non è altro che il secondo spigolo (cioè la polare, rispetto alla quadrica di Lie, dello spigolo di Green), che può quindi definirsi dicendo che: *il secondo spigolo si appoggia ad una delle tangenti asintotiche in quel punto che è polo dell'altra rispetto ad una qualunque conica a contatto 4-punto col ramo di  $C$  tangente alla prima*<sup>(2)</sup>.

(1) L'osservazione è generale. Vale a dire: la corrispondenza che la polarità, rispetto ad una conica a contatto 4-punto con una curva piana in un suo punto, determina fra i punti della tangente alla curva e le rette del fascio con centro nel punto, *non* dipende dalla conica che si è considerata (fra quelle a contatto 4-punto); in particolare, è anche quella determinata dalla polarità rispetto alla conica osculatrice.

(2) Il secondo spigolo è stato definito da V. STRAZZERI come la retta dei flessi della cubica, con punto doppio in  $O$ , i cui rami hanno rispettivamente un contatto del terzo ordine coi rami di  $C$ . Cfr. la Nota di questo Autore: *Una definizione geometrica dello spigolo di Green*, «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 1930. Questa definizione però, oltre al fatto che sfrutta una cubica (anzichè coniche), non dà il significato dei punti (3) e (4) considerati singolarmente.

Un'altra definizione del secondo spigolo è stata data recentemente da E. BOMPIANI nella Nota: *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe*, «Rend. Lincei», 1931.

Fra le coniche a contatto 4-punto con (1) se ne può ora ottenere una ben determinata, prendendo quella che passa per il punto (4). Similmente ne resta determinata una fra quelle a contatto 4-punto con l'altro ramo di C. Ed è manifesto che queste due coniche son le sole (fra quelle a contatto 4-punto con l'uno o con l'altro dei due rami di C) che abbiano, nelle intersezioni  $\neq O$  con le rette  $(x, x_u)$  e  $(x, x_v)$ , la stessa tangente. Inoltre (come risulta subito dalla (2) dopo avervi fatto  $\lambda = -\frac{1}{4} \frac{\partial \lg \beta^2 \gamma}{\partial v}$  e dalla equazione che da essa si deduce scambiando  $u$  con  $v$ ,  $\beta$  con  $\gamma$ ,  $\eta_1$  con  $\eta_2$ ) le loro intersezioni giacciono sulle rette

$$\beta \eta_1^3 = \gamma \eta_2^3.$$

Si può dunque dire: *Fra le coniche a contatto 4-punto con l'uno o con l'altro dei due rami di C ne esistono due, e solianto due<sup>(1)</sup>, tangenti ad una stessa retta nei punti  $\neq O$  in cui sono incontrate dalle tangenti asintotiche: la tangente comune è il secondo spigolo, e le rette che proiettano da O le loro ulteriori intersezioni sono le tangenti di Segre.*

Così enunciato, il risultato è, sotto un certo riguardo, particolarmente espressivo; perchè, ricordando la definizione dell'asse di Čech (che dipende dalle linee di Segre), fa prevedere l'esistenza del piano sostegno del fascio canonico<sup>(2)</sup>.

(1) Anche Čech ha utilizzato due coniche per definire il secondo spigolo: le coniche che, secondo una denominazione di Wilczynski, son dette osculatrici alle asintotiche, e che sono le sezioni del pian tangente, con le sviluppabili circoscritte alle cubiche osculatrici alle asintotiche. Cfr. la Memoria di E. ČECH: *L'intorno di un punto di una superficie considerato dal punto di vista proiettivo*, « Annali di Matematica », 31, 1922.

(2) I risultati di questo numero sono ottenuti servendosi di coniche: si potrebbe ora pensare di sostituire le coniche con cubiche, naturalmente con punto doppio in O. Una tale sostituzione però, mentre introduce curve più complicate, non fa pervenire ad alcun risultato nuovo. Infatti, le  $\infty^2$  cubiche a contatto 3-punto con C portano alle tangenti di Darboux, che risultano come le rette proiettanti da O i flessi di una qualunque di queste cubiche; e l'unica cubica a contatto 4-punto porta alla ricordata definizione dello Strazzeri.

Ad un risultato nuovo si può invece pervenire considerando un altro sistema  $\infty^2$  di cubiche, con punto doppio in O, proiettivamente definito dagli intorno del 2° ordine di O sui due rami di C. Bisogna ricordare che due curve aventi in un punto la stessa tangente, ma non un contatto del 2° ordine, possiedono un invariante (detto di Segre), limite di un birapporto. Il modo più semplice per definire un sistema di cubiche come quello ora nominato è di imporre che l'invariante di Segre, che compete a ciascun ramo di una cubica e al ramo di C cui è tangente, sia  $= -1$ . Si ottengono così le  $\infty^2$  cubiche

$$\eta_0 \eta_1 \eta_2 = -\frac{1}{3} \beta \eta_1^3 + \lambda \eta_1^2 \eta_2 + \mu \eta_1 \eta_2^2 - \frac{1}{3} \gamma \eta_2^3 \quad (\lambda, \mu \text{ parametri})$$

ciascuna delle quali è definita dalla rispettiva retta dei flessi  $\eta_0 = \lambda \eta_1 + \mu \eta_2$ .

Orbene, queste cubiche permettono di ricondurre la corrispondenza di Moutard alla polarità di Lie. Infatti fissato un punto P nel pian tangente a  $\sigma$  in O, si consideri una

3. Passando a considerare le sezioni di  $\sigma$  prodotte da piani per una tangente asintotica (ma distinti dal piano tangente), si presentano curve aventi un flesso in O. Ora sulla tangente di flesso di una curva esiste — come ha dimostrato Bompiani<sup>(1)</sup> — un punto che rappresenta l'intorno del quarto ordine del flesso. Ad ogni piano passante per una tangente asintotica si potrà dunque associare un punto di questa tangente: il punto suddetto determinato dalla corrispondente sezione; e ad ogni retta per O, non appartenente al piano tangente, una retta di questo piano: la congiungente i punti corrispondenti ai piani passanti per la retta e per ciascuna delle tangenti asintotiche.

In tal modo si viene a far corrispondere

al piano:  $(5) \xi_u + b\xi$

il punto:  $x_u + \left( \frac{b}{2} - \frac{1}{8} \frac{\partial l_g \beta \gamma^2}{\partial u} \right) x^{(2)}$ ;

alla retta:  $r \equiv (\xi_u + b\xi, \xi_v + c\xi)$

la retta:  $r' \equiv \left( x_u + \left[ \frac{b}{2} - \frac{1}{8} \frac{\partial l_g \beta \gamma^2}{\partial u} \right] x, x_v + \left[ \frac{c}{2} - \frac{1}{8} \frac{\partial l_g \beta^2 \gamma}{\partial v} \right] x \right)$ .

Lo si vede molto semplicemente osservando che il piano (5), per es., sega la superficie secondo una curva per la cui proiezione sul piano  $\eta_3 = 0$  vale lo sviluppo

$$\frac{\eta_2}{\eta_0} = -\frac{1}{3} \beta b \left( \frac{\eta_1}{\eta_0} \right)^3 - \frac{1}{3} \beta b \left( b - \frac{1}{4} \frac{\partial l_g \beta \gamma^2}{\partial u} \right) \left( \frac{\eta_1}{\eta_0} \right)^4 + \dots (3).$$

Basta ora tener presente che un punto del piano tangente a  $\sigma$  in O

retta del fascio di centro P, la cubica di cui questa è la retta dei flessi, e infine il cono corrispondente a questa cubica nella polarità di Lie. Fra i piani per O ve n'è uno il quale riesce tangente a questo cono, qualunque sia la retta considerata nel fascio di centro P ed è precisamente il piano che corrisponde a P nella corrispondenza di Moutard. (Per tutto ciò si cfr. il § 39 B in FUBINI e ČECH, *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars, 1931).

(1) Nella Nota: *Per lo studio proiettivo differenziale delle singolarità*, « Boll. Un. Mat. Ital. », a. V, 1926. Precisamente, se la curva ha l'equazione  $y = bx^3 + cx^4 + \dots$  il punto suddetto ha le coordinate  $x = \frac{2b}{c}, y = 0$ .

(2) Sicchè la punteggiata descritta da esso, quando il piano (5) varia nel fascio di asse  $(x, x_u)$ , è proiettiva a questo fascio.

(3) E tenendo conto del richiamo fatto a proposito della Nota di BOMPIANI citata in questo numero.

ed un piano per  $O$  corrispondentisi nella polarità di Lie hanno le coordinate

$$\eta_0 x + \eta_1 x_u + \eta_2 x_v, \quad \eta_0 \xi + \eta_1 \xi_u + \eta_2 \xi_v,$$

per concludere che:

*I punti che, nella corrispondenza sopra definita e nella polarità di Lie, corrispondono ad uno stesso piano per la tangente asintotica  $(x, x_u)$  [o  $(x, x_v)$ ] descrivono, al variare del piano nel fascio che ha per asse questa tangente, due punteggiate proiettive sovrapposte aventi, per comune sostegno la tangente  $(x, x_u)$  [o  $(x, x_v)$ ], e come punti uniti  $O$  e il punto (3) [o (4)], di cui si ha quindi una nuova definizione.*

*Lo spigolo di Green è la sola retta  $r$  per  $O$  la cui corrispondente  $r'$  coincida con la sua polare rispetto alla quadrica di Lie.*

Ad una retta  $r$  generica per  $O$  si potrà dunque far corrispondere il punto  $R'$  in cui la sua polare incontra la  $r'$ . Questa corrispondenza dà una caratterizzazione per punti del secondo spigolo.

Infatti: il secondo spigolo non è altro che il luogo dei punti  $R'$  (al variare di  $r$  per  $O$ )<sup>(1)</sup>.

4. Facciamo finalmente corrispondere alla retta  $r$  la  $\bar{r}$  polare di  $r'$  rispetto alla quadrica di Lie.

*Nella stella di centro  $O$  resta definita un'omologia (mai involutoria) che ha per retta unita lo spigolo di Green (e per piano unito il piano tangente a  $\sigma$  in  $O$ ).*

Ne viene che ad ogni retta del fascio canonico corrisponde una retta dello stesso fascio; osservazione questa che dà modo di definire nuove rette canoniche. Così ad es. la corrispondente della normale proiettiva è la nuova retta canonica

$$\left( \xi_u - \frac{1}{8} \frac{\partial \lg \beta \gamma^2}{\partial u} \xi, \quad \xi_v - \frac{1}{8} \frac{\partial \lg \beta^2 \gamma}{\partial v} \xi \right)^{(2)}$$

Segue pure che, data una congruenza qualunque  $\{r\}$  di rette (uscenti dai punti di  $\sigma$ ), ne resta subito definita un'altra: quella  $\{\bar{r}\}$  delle rette corrispondenti alle rette della congruenza data. Chiamerò la  $\{\bar{r}\}$  la *congruenza corrispondente* alla data<sup>(3)</sup>.

(1) Ne segue che da  $O$  debbono uscire  $\infty^1$  rette a cui corrisponde uno stesso punto: *son le rette (per  $O$ ) che appartengono ad un piano per lo spigolo*; ed il corrispondente punto comune giace sulla tangente coniugata di quella contenuta nel loro piano.

(2) E altre ancora si potrebbero ottenere cercando la corrispondente della direttrice, di una delle tangenti principali (ve n'è una che ha per corrispondente l'altra), ecc.; e poi, siccome l'omologia non è involutoria, le corrispondenti delle rette così ottenute, e via di seguito.

(3) La considerazione della *congruenza corrispondente* potrebbe servire per costruire



Le sviluppabili di  $\{r\}$  e di  $\{\bar{r}\}$  hanno rispettivamente le equazioni

$$A du^2 + B du dv + C dv^2 = 0, \quad \bar{A} du^2 + \bar{B} du dv + \bar{C} dv^2 = 0,$$

ove

$$B = b_v - c_u, \quad \bar{B} = \frac{1}{2} \left[ \left( b - \frac{1}{4} \frac{\partial l_g \beta \gamma^2}{\partial u} \right)_v - \left( c - \frac{1}{4} \frac{\partial l_g \beta^2 \gamma}{\partial v} \right)_u \right];$$

sicchè se la  $\{r\}$  è coniugata alla superficie, lo sarà anche la  $\{\bar{r}\}$  se e solo se

$$\frac{\partial^2 l_g \beta^2 \gamma}{\partial u \partial v} = 0,$$

la quale caratterizza le superficie isotermo-asintotiche.

Si ha così il teorema:

*Data una congruenza di rette coniugata alla superficie, ma del resto AD ARBITRIO, la superficie è isotermo-asintotica se e solo se è coniugata ad essa la congruenza corrispondente alla data.*

Per finire osserviamo che la nuova retta canonica

$$\left( \xi_u + \frac{1}{4} \frac{\partial l_g \beta \gamma^2}{\partial u} \xi, \quad \xi_v + \frac{1}{4} \frac{\partial l_g \beta^2 \gamma}{\partial v} \xi \right),$$

la cui relazione con la normale proiettiva è manifesta, è l'unica retta del fascio canonico per cui la congruenza corrispondente sia coniugata alla superficie.

un invariante di una data congruenza: tale è infatti l'invariante assoluto delle quattro direzioni definite dalla congruenza data e dalla corrispondente.

**Meccanica.** — *A proposito della influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa.* Nota I di G. COLONNETTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. C. GUIDI.

In una Nota pubblicata su « Le Génie Civil » il 20 febbraio u. s. <sup>(2)</sup> il Prof. A. Mesnager insiste sulla tesi già enunciata nella comunicazione fatta il 9 marzo dello scorso anno all'« Académie des Sciences » <sup>(3)</sup>, secondo la quale la freccia elastica di una trave inflessa non dovrebbe in alcun modo dipendere dallo sforzo di taglio; insiste in particolare sulla pretesa necessità di riformare in conseguenza gli enunciati abituali della resistenza dei materiali.

Ora è, a parer mio, assolutamente indispensabile che non perduri più a lungo un sì grave dubbio — tanto più perchè sollevato da un così autorevole Maestro — su di un punto che tutti eravamo abituati a considerare come ormai pacificamente acquisito alla scienza, e che fa parte di tutti indistintamente i nostri corsi di insegnamento.

A questo fine io avevo redatta l'anno scorso una breve Nota di confutazione — pubblicata negli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze » <sup>(4)</sup> — la quale non ebbe la ventura di essere, nonchè discussa, neppure citata nè dal Bertrand De Fontviolant che, più di sei mesi dopo di me, pubblicava un'ampia e circostanziata dimostrazione <sup>(5)</sup> della erroneità della tesi del Mesnager, nè dallo stesso Mesnager a cui pure essa era stata da me, come di dovere, personalmente comunicata prima ancora di esser licenziata per le stampe.

Mi ritengo pertanto in dovere di riprendere la penna per insistere nella mia confutazione e per difendere ancora una volta la piena legittimità e l'assoluto rigore delle affermazioni che, a proposito dell'influenza dello sforzo di taglio, si fanno da tutti gli Autori nella ordinaria teoria delle travi inflesse.

E ciò farò continuando a limitare le mie considerazioni a quei soli casi nei quali sono verificate le note ipotesi di De Saint Venant.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1931.

(2) A. MESNAGER, *La flèche élastique d'une poutre dépend-elle de l'effort tranchant?* « Le Génie Civil », 20 février 1932, p. 192.

(3) A. MESNAGER, *La flèche d'une poutre ne dépend pas de l'effort tranchant.* « Comptes Rendus », t. 192 (9 mars 1931) p. 590.

(4) BERTRAND DE FONTVIOLOANT, *Influence de l'effort tranchant sur les flèches élastiques des poutres.* « Le Génie Civil », 23 janvier 1932, p. 87.

(5) G. COLONNETTI, *L'influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa.* « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze, Nuovi Lincei », LXXXIV (17 maggio 1931) p. 317.

I problemi più complessi, in cui le forze esterne si suppongono applicate anche nei punti interni e sulla superficie laterale della trave, sono stati — per quel che era possibile — esaurientemente trattati e discussi dal Bertrand De Fontviolant.

D'altronde io non vedo quale vantaggio si possa trarre dal complicare così la questione, quando a confutare la tesi del Mesnager basta provarne l'insostenibilità in quel caso classico la cui soluzione, ad un tempo perfettamente rigorosa e singolarmente semplice, serve poi in pratica da punto di riferimento per le soluzioni più o meno approssimate di tutti gli altri casi comunque complessi.

\*  
\* \*

Ora siamo tutti d'accordo nell'affermare che, nel problema classico di De Saint Venant, la curvatura della linea secondo cui si dispone, dopo la deformazione, una qualunque delle generatrici della trave che sono inizialmente disposte secondo rette parallele all'asse geometrico (asse delle  $\chi$ ) ha per espressione <sup>(1)</sup>

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} = \frac{2(m+1)}{mE} \frac{\partial \tau_{y\chi}}{\partial \chi} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_\chi}{\partial y}$$

e che perciò essa diviene indipendente dallo sforzo di taglio, e più precisamente diviene eguale a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} = - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_\chi}{\partial y} = - \frac{M_\chi}{EJ}$$

ogniqualevolta la tensione tangenziale  $\tau_{y\chi}$  risulta indipendente da  $\chi$ , ed in particolare ogniqualevolta essa si annulla, come accade notoriamente in corrispondenza delle due generatrici estreme, superiore ed inferiore, della trave.

La divergenza nasce là dove il prof. Mesnager ritiene di potere, da tali premesse incontestabili, trarre l'inattesa conseguenza che anche la freccia della trave — se misurata in corrispondenza di una delle generatrici estreme — deve risultare indipendente dallo sforzo di taglio.

Ora lo sforzo di taglio determina in ciascuna sezione della trave certi scorrimenti — accompagnati da un caratteristico ingobbamento della sezione — i quali debbono necessariamente influire sulle inclinazioni di quelle certe deformate delle generatrici di cui si è parlato dianzi.

In realtà, quando dalla equazione differenziale esprime la curvatura

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}$$

(1) G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, vol. I (Torino U. T. E. T. 1928), p. 102.

in un punto generico di una di quelle deformate in funzione del *solo* momento flettente, si cerca di passare per integrazione alla espressione della inclinazione

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}$$

per giungere poi, mediante una seconda integrazione, all'equazione della deformata in termini finiti, lo sforzo di taglio compare nell'espressione attraverso la costante di integrazione.

È bensì vero che il modo e la misura con cui lo sforzo di taglio viene così ad influire sulla freccia potranno variare da caso a caso al variare delle condizioni di vincolo in base a cui le costanti di integrazione vengono determinate.

Ma che la contestata influenza sussista e che si tratti di una influenza non soltanto formale ma effettiva, e ben distinta dalla influenza che sulla freccia ha il momento flettente, basta a provarlo il fatto che si può sempre, a pari condizioni di vincolo, far sì che gli scorrimenti (e quindi le inclinazioni) siano più o meno grandi variando opportunamente la forma della sezione retta della trave; mentre, se si ha l'avvertenza di mantenerne inalterato il momento d'inerzia, le curvature si conservano immutate.

Nè vale limitar la questione, come fa il Mesnager, al solo caso delle generatrici estreme, superiore ed inferiore.

Intanto è *a priori* da escludersi che la tesi del Mesnager possa esser vera per le deformate delle generatrici estreme e non per tutte le altre, in particolare per la deformata dell'asse geometrico della trave. Infatti, come ho già osservato nella mia Nota precedente, la differenza sempre piccolissima tra le ordinate di queste deformate non dipende affatto dallo sforzo di taglio, ma semplicemente dalle deformazioni che la sezione retta della trave notoriamente subisce per effetto del momento flettente.

D'altra parte è bensì vero che in corrispondenza delle generatrici estreme le tensioni tangenziali son nulle, quindi son nulli gli scorrimenti, sicchè le deformate di dette generatrici debbono mantenersi normali alle deformate delle sezioni rette. Ma ciò non va inteso nel senso che le deformate delle generatrici non possano assumere inclinazioni dipendenti dallo sforzo di taglio, sibbene nel senso che a consentire ad esse tali inclinazioni, pur senza che si verifichino scorrimenti, interviene l'ingobbamento della sezione i cui lembi superiore ed inferiore si inclinano di altrettanto sulla lor giacitura primitiva.

A questo punto si potrebbe da qualcuno obiettare che, in ben determinate condizioni di vincolo, l'ingobbamento della sezione vincolata può venire impedito, e ciò anche senza che si debba rinunciare all'annullarsi delle tensioni tangenziali in corrispondenza delle generatrici estreme, con

che l'inclinazione delle corrispondenti deformate dovrebbe ivi riuscir'identicamente nulla.

Ma per raggiungere un tale risultato bisogna supporre sulla sezione vincolata una distribuzione di tensioni normali certamente non lineare; distribuzione che, per ciò stesso che è chiamata ad impedire l'ingobbamento che altrimenti lo sforzo di taglio produrrebbe, deve necessariamente considerarsi come una funzione di questo sforzo di taglio.

Ed allora si comprende subito che, nelle immediate vicinanze della sezione considerata — là dove la teoria di De Saint Venant ha naturalmente cessato di essere applicabile — è la curvatura stessa delle deformate che viene a dipendere dallo sforzo di taglio, e che provvede a ripristinare, a breve distanza dalla sezione stessa, quell'inclinazione che si era per un momento creduto di eliminare.

\*  
\* \*

Al lettore che abbia seguita con qualche attenzione la cortese polemica svoltasi su « Le Genie Civil » tra Mesnager e Bertrand De Fontviolant, non può essere sfuggita la differenza sostanziale tra la confutazione di quest'ultimo e la mia.

Bertrand De Fontviolant al momento di concludere la sua elaboratissima esposizione dell'argomento, rimprovera infatti a Mesnager di non aver tenuto conto del fatto che le tensioni normali sono, nel caso più generale, funzioni non del solo momento flettente ma anche della derivata dello sforzo di taglio.

Ciò ha permesso a Mesnager di rispondere, non senza ragione, che altro è dire che la curvatura dipende dallo sforzo di taglio e altro è dire che dipende dalle sue variazioni.

Riportando la questione nei suoi termini più semplici, quali son quelli che caratterizzano il problema classico di De Saint Venant — là dove lo sforzo di taglio è costante epperò le sue derivate non sono neppur da considerare — io vorrei essere riuscito a richiamar l'attenzione su di un modo di influire dello sforzo di taglio che non può per nessun verso esser taciato di costituire soltanto « une question de mots » <sup>(1)</sup>.

Qui infatti si tratta di ben altro che di una questione di parole! Si tratta di riconoscere che trascurando l'influenza dello sforzo di taglio nel calcolo della freccia elastica di una trave inflessa si commette un errore che, per date forme della sezione della trave e per date condizioni di vincolo, può assumere proporzioni tutt'altro che trascurabili <sup>(2)</sup>.

(1) Cfr. la Nota citata di MESNAGER in « Le Genie Civil » 20 février 1932, p. 192, prima colonna.

(2) Cfr. C. GUIDI, *Esercizi sulla Scienza delle Costruzioni*, VI ediz., Torino 1931, pp. 76 e 77.



**Meccanica.** — *Sur les mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles.* Nota IV di A. ROSENBLATT, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans trois Notes publiées en 1931 dans ce Recueil <sup>(2)</sup> j'ai démontré rigoureusement l'existence des perturbations des liquides visqueux autour du repos initial dans le cas particulier de mouvements laminaires. J'ai étudié des perturbations qui s'évanouissent dans le temps et à l'infini, c'est à dire pour  $x = +\infty$ . Il s'agissait d'un *demicanal* s'étendant depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = +\infty$ . Pour qu'un mouvement pareil soit possible il faut que certaines forces agissent sur la section  $x = 0$  du fluide. Je me propose donc de calculer ces tensions ainsi que d'étudier certaines autres particularités du mouvement envisagé.

1. Je rappelle que nous avons affaire à l'équation

$$(1) \quad \nu \Delta \Delta \Psi - \frac{D(\Psi, \Delta \Psi)}{D(x, y)} - \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = 0,$$

et que l'on essaie de l'intégrer au moyen de la série infinie

$$(2) \quad \Psi = \Psi_0 + \sum_1^{\infty} \epsilon^k \Psi_k(x, y, t),$$

où les  $\Psi_k$  sont supposés de la forme <sup>(3)</sup>

$$(3) \quad \Psi_k = e^{-k\lambda x - k\mu t} f_k(y).$$

Nous supposons le *mouvement initial nul*, donc  $\Psi_0 \equiv 0$ . Dans le cas général on a

$$(4) \quad \Psi_0 = -\frac{U}{2H} y^2 - 3 A_0 \left( H^2 y - \frac{y^3}{3} \right).$$

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) *Sur la stabilité des mouvements laminaires*, Nota I, agosto 1931; Nota II, settembre 1931; Nota III, ottobre 1931.

(3) M. F. NOETHER a déjà en 1913 utilisé des développements semblables en parvenant à un système d'une infinité d'équations différentielles ordinaires à une infinité de fonctions inconnues sans toutefois se préoccuper de la question de convergence des développements. Cfr. *Zur Theorie der Turbulenz*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », p. 23, 1914; *Zur statistischen Deutung der Kármán'schen Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenztheorie*, « Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik », 1931.

Posons maintenant le développement de la pression moyenne  $p$

$$(5) \quad p = \sum_0^k \varepsilon^k p_k(x, y).$$

Nous obtenons les deux équations aux dérivées partielles

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \sum_0^{\infty} \varepsilon^k p_{k,x} &= -\nu \sum_0^{\infty} \varepsilon^k \Delta \Psi_{ky} - \left[ \sum_0^{\infty} \varepsilon^l \Psi_{ly} \cdot \sum_0^{\infty} \varepsilon^m \Psi_{mxy} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_0^{\infty} \varepsilon^l \Psi_{lx} \cdot \sum_0^{\infty} \varepsilon^m \Psi_{myy} \right] + \sum_0^{\infty} \varepsilon^k \Psi_{kty}, \\ \frac{1}{\rho} \sum_0^{\infty} \varepsilon^k p_{ky} &= \nu \sum_0^{\infty} \varepsilon^k \Delta \Psi_{kx} - \left[ - \sum_0^{\infty} \varepsilon^l \Psi_{ly} \cdot \sum_0^{\infty} \varepsilon^m \Psi_{mxx} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_0^{\infty} \varepsilon^l \Psi_{lx} \cdot \sum_0^{\infty} \varepsilon^m \Psi_{mxy} \right] - \sum_0^{\infty} \varepsilon^k \Psi_{ktx}, \end{aligned}$$

qui se décomposent en l'infinité d'équations que voici

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\rho} p_{0x} &= -\nu \Delta \Psi_{0y}, & \frac{1}{\rho} p_{0y} &= 0, \\ \frac{1}{\rho} p_{kx} &= -\nu \Delta \Psi_{ky} - \left[ \sum_{\substack{l+m=k, \\ l=0, \dots, k-1 \\ m=1, \dots, k}} \Psi_{ly} \cdot \Psi_{mxy} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{l+m=k, \\ l=1, \dots, k \\ m=0, \dots, k-1}} \Psi_{lx} \cdot \Psi_{myy} \right] + \Psi_{kty}, \\ \frac{1}{\rho} p_{ky} &= \nu \Delta \Psi_{kx} - \left[ - \sum_{\substack{l+m=k \\ l=0, \dots, k-1 \\ m=1, \dots, k}} \Psi_{ly} \cdot \Psi_{mxx} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{l+m=k, \\ l=1, \dots, k-1 \\ m=0, \dots, k-1}} \Psi_{lx} \cdot \Psi_{mxy} \right] - \Psi_{ktx}. \end{aligned}$$

Les conditions de compatibilité donnent précisément les équations différentielles déterminant les  $\Psi_k$ .

2. Remplaçons dans les équations (7) les  $\Psi_k$  par les expressions (3) et posons

$$(8) \quad f_k'' + k^2 \lambda^2 f_k = \varphi_k, \quad k = 1 \dots$$

nous obtenons les équations suivantes

$$(9) \quad \frac{1}{\rho} p_{kx} = e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot \left\{ -v\varphi'_k - f'_k \left( k\mu + k\lambda \frac{Uy}{H} \right) + f_k \cdot k\lambda \frac{U}{H} - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{l+m=k \\ l=1 \dots k-1, \\ m=1 \dots k-1}} \lambda (lf_l f''_m - mf'_l f'_m) \right\}, \\ \frac{1}{\rho} p_{ky} = e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot \left\{ -k\lambda v\varphi_k - f_k \left( k^2 \lambda \mu + k^2 \lambda^2 \frac{Uy}{H} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{l+m=k \\ l, m=1 \dots k-1}} \lambda^2 m (-mf_m f'_l + lf_l f'_m) \right\}.$$

Dont les conditions de compatibilité donnent naturellement les équations différentielles ordinaires qui déterminent les  $f_k$

$$(10) \quad v\varphi''_k + \left[ vk^2 \lambda^2 + k\lambda \frac{Uy}{H} + k\mu \right] \varphi_k = vF_k = \lambda \sum_{\substack{l+m=k, \\ l, m=1, \dots, k-1}} mf'_l \varphi_m - lf_l \varphi'_m.$$

Intégrant on a

$$(11) \quad \frac{1}{\rho} p_k = \int e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot \left\{ -v(\varphi'_k dx + k\lambda \varphi_k dy) - k\mu (f'_k dx + k\lambda f_k dy) - \right. \\ \left. - \lambda \left[ dx \sum_{\substack{l+m=k \\ l, m=1 \dots k-1}} (lf_l f''_m - mf'_l f'_m) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda dy \sum_{\substack{l+m=k, \\ l, m=1 \dots k-1}} m (-mf_m f'_l + lf_l f'_m) \right] \right\},$$

et on constate facilement que l'intégrale est égale à

$$(12) \quad e^{-k(\lambda x + \mu t)} \left\{ \frac{v\varphi'_k}{k\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} f'_k + \frac{\sum lf_l f''_m - mf'_l f'_m}{k} \right\}.$$

3. Calculons maintenant les composantes  $p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}$  des tensions. On a

$$(13) \quad p_{xx} = -p + 2v\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_{yy} = -p + 2v\rho \frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{xy} = -v\rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

On obtient donc les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \frac{1}{\rho} p_{xx} &= \sum_0^{\infty} \varepsilon^k e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot \left\{ -\frac{v\varphi'_k}{k\lambda} + f'_k \left( 2vk\lambda - \frac{\mu}{\lambda} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k} \sum (lf_l f''_m - mf'_l f'_m) \right\}, \\
 \frac{1}{\rho} p_{yy} &= \sum_0^{\infty} \varepsilon^k e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot \left\{ -\frac{v\varphi'_k}{k\lambda} - f'_k \left( 2vk\lambda + \frac{\mu}{\lambda} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k} \sum (lf_l f''_m - mf'_l f'_m) \right\}, \\
 \frac{1}{\rho} p_{xy} &= \sum_0^{\infty} \varepsilon^k \cdot e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot \{ 2vk^2 \lambda^2 f_k - v\varphi_k \}.
 \end{aligned}$$

Pour établir la convergence uniforme et absolue des expressions obtenues rappelons que si  $\lambda$  est une des valeurs non exceptionnelles il existe des nombres  $\Phi_k$  positifs majorant les  $\varphi_k$  et qui satisfont à la relation de récurrence

$$(15) \quad \Phi_k = N \sum_{i=1}^k \Phi_i \Phi_{k-i},$$

$N$  étant un nombre fixe. D'autre part on a

$$(16) \quad f_k = -\frac{1}{k\lambda} \int_y^H \sin k\lambda(y-u) \varphi_k(u) du,$$

d'où il s'en suit que les  $f_k$  satisfont aux inégalités

$$(17) \quad |f_k| \leq \frac{M\Phi_k}{k},$$

$M$  étant un nombre fixe et les  $f'_k$  aux inégalités

$$(18) \quad |f'_k| \leq M' \Phi_k,$$

$M'$  fixe. Les  $f''_k$  satisfont aux inégalités

$$(19) \quad |f''_k| \leq kM'' \Phi_k.$$

Il résulte enfin des formules qui expriment les  $\varphi_k$  au moyen des  $\varphi$  d'indice inférieur que les  $\varphi'_k$  satisfont aux inégalités suivantes

$$(20) \quad |\varphi'_k| \leq kM''' \Phi_k,$$

Il s'en suit que les  $\frac{1}{\rho} p_k$  satisfont aux inégalités suivantes

$$(21) \quad \left| \frac{1}{\rho} p_k \right| \leq E_1^k \left[ A \Phi_k + B \sum_{\substack{l+m=k, \\ l, m=1, \dots, k-1}} \left( l \cdot \frac{\Phi_l}{l} \cdot m \Phi_m + m \Phi_m \Phi_l \right) \cdot \frac{1}{k} \right],$$

où l'on a posé

$$(22) \quad E_1 = e^{-(\lambda x + \mu t)}.$$

D'après les formules de récurrence (15) on a donc

$$(23) \quad \left| \frac{1}{\rho} p_k \right| \leq C E_1^k \cdot \Phi_k,$$

C étant un nombre positif fixe.

Nous obtenons donc les *majorations suivantes*

$$(24) \quad \frac{1}{\rho} |p_{xx}^{(k)}|, \quad \frac{1}{\rho} |p_{yy}^{(k)}|, \quad \frac{1}{\rho} |p_{xy}| \leq A k E_1^k \Phi_k,$$

A étant un nombre positif fixe.  $p_{xx}^{(k)}$  etc. désignent les  $k^{\text{ièmes}}$  termes des développements des  $p_{xx}$  etc.

Or la série

$$(25) \quad F = \sum_1^{\infty} \varepsilon^k E_1^k k \Phi_k$$

est égale à  $\varepsilon S'$ , où l'on a

$$(26) \quad S = \frac{1}{2N} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4 \varepsilon N \Phi_1 E_1} \right] = \\ = \frac{1}{2N} \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} (4 N \Phi_1 E_1)^k \cdot \binom{1}{2} \cdot \varepsilon^k,$$

$$(27) \quad \varepsilon S' = \varepsilon \Phi_1 E_1 (1 - 4 \varepsilon N \Phi_1 E_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2N} \sum_1^{\infty} \varepsilon^k \cdot (-1)^{k-1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot k (4 N \Phi_1 E_1)^k.$$

Le rayon de convergence est

$$(28) \quad \rho = \frac{1}{4 N \Phi_1 E_1}.$$



Sur la section  $x = 0$  agissent les forces  $\frac{1}{\rho} p_{xx}$  dans la direction des  $x$  positifs et  $-\frac{1}{\rho} p_{xy}$  dans la direction des  $y$  positifs.

On peut se demander s'il existe des perturbations semblables à l'espèce envisagée ici dans un canal infini dans les deux directions c'est à dire de  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ . C'est une question qui semble difficile à résoudre.

**Meccanica.** — *A proposito della influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa.* Nota II di G. COLONNETTI, pres. dal Corresp. G. GUIDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sugli impulsi nei corpi elastici isotropi.* Nota di F. CONFORTO, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Mete lontane del moto di un sistema planetario.* Nota di G. KRALL, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica (Spettroscopia).** — *Uno spinterometro riproducibile per spettroscopia quantitativa* <sup>(1)</sup>. Nota di A. OCCHIALINI e L. GALLINO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio A. GARBASSO.

Uno degli autori di questo articolo ha fondato un metodo di spettroscopia quantitativa sul fatto che una radiazione emessa, al passaggio di una scintilla, da un metallo contenuto in un elettrodo, proviene da una regione adiacente all'elettrodo, di lunghezza variabile con la ricchezza del metallo considerato nell'elettrodo.

Esso consiste nel misurare la lunghezza della regione emittente col far cadere sulla fenditura verticale dello spettroscopio una immagine della scintilla disposta orizzontalmente e col delimitare mediante uno spostamento micrometrico della lente di proiezione, il tratto della scintilla in cui la radiazione considerata è visibile.

Se la lente è a metà strada tra la scintilla e la fenditura, il tratto misurato è metà di quello reale.

Tale metodo è molto semplice appunto perchè visivo e perchè dà risultati immediati. Per renderlo più comodo, è consigliabile adoperare l'oculare doppio già introdotto nella microscopia, cosa che si può fare senza difficoltà quando si disponga di un oculare microscopico; sarebbe però desiderabile trovare in commercio spettroscopi dotati del doppio oculare, tanto è il riposo che si realizza con esso.

In pratica il suindicato metodo di spettroscopia quantitativa si presta a constatare se una lega ha lo stesso tenore, per un componente, di una lega campione. Quando ciò avvenisse, la lunghezza delle zone in cui è visibile una riga, nelle due scintille che si ottengono scambiando gli elettrodi e *mantenendo ferme tutte le altre condizioni*, si troverebbero eguali.

Le condizioni in cui avvengono le due scintille possono essere facilmente mantenute costanti, per quanto riguarda il circuito esterno della scarica. Siccome poi è da temere che l'emissione spettrale sia influenzata dalla rapidità delle scariche, per il fatto che col variare di questa varia la temperatura degli elettrodi, è utile mantenere un regime pressochè costante curando, mediante un reostato inserito nel primario del rocchetto, che l'intensità accusata dal milliamperometro del secondario rimanga fissa.

Resta poi da evitare che la sostituzione degli elettrodi alteri le condizioni della scarica, sia per effetto di una mutata distanza, sia per effetto di una diversità di forma. Crediamo che poco si possa aspettare dal proposito di riprodurre esattamente forma e distanza; quando anche questo fosse possi-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1932.

bile, resterebbe l'inconveniente di foggare gli elettrodi in una forma determinata e riprodurla di mano in mano che l'elettrodo si consuma.

Ci pare di aver trovato la soluzione pratica di questo problema adoperando come elettrodo variabile una lastra inserita tra due elettrodi fissi.

Una lastra si riproduce presto, e tutto ciò che è da mantenere costante è la distanza di questa dai due elettrodi variabili, cosa facile, specialmente se ci si propone di tenere la lastra esattamente nel mezzo.

Come elettrodi laterali abbiamo adottato due carboni tagliati a cuneo con spigoli orizzontali. Questa disposizione impedisce il saltellamento della scintilla nel senso verticale e fa sì che lo spettro si presenti sempre nella stessa posizione del campo.

Per mettere in evidenza i dati di praticità e riducibilità di questo tipo di spinterometro, abbiamo studiato quali fattori dipendenti dallo spinterometro in sè, tenendo costanti tutte le variabili elettriche, potessero influire sulla lunghezza della zona emittente, che indichiamo come lunghezza della riga.

Le misure delle lunghezze delle righe vennero lette mediante il micrometro della lente spostabile, facendo tre letture consecutive, di cui si prese la media. La precisione di queste letture è notevole, per il fatto che tra una lettura e l'altra abbiamo sempre notato un errore inferiore ai 3/100 di mm.

Abbiamo studiato l'influenza della forma e della composizione degli elettrodi laterali, della distanza esplosiva, dello spessore e della dispersione calorifica della piastrina centrale, con i risultati che qui sotto esponiamo.

*Influenza della forma degli elettrodi ausiliari.*

Forma	Diametro in mm.	Lunghezza riga in mm.	Riga	Lega
scalpello	5.0	2.68	5100 Sn	Sn Pb
»	7.5	2.70	»	»
»	10.0	2.69	»	»
punta	5.0	2.70	5100 Sn	Sn Pb
»	10.0	2.68	»	»
tronco di cono	5.0	2.68	5100 Sn	Sn Pb
» » »	10.0	2.69	»	»
scalpello	5.0	2.84	5332 Sn	Sn Pb
punta	»	2.85	»	»
tronco di cono	»	2.84	»	»
scalpello	5.0	2.77	5373 Pb	Sn Pb
punta	»	2.76	»	»
tronco di cono	»	2.76	»	»

*Influenza della distanza esplosiva.*

Distanza esplosiva in mm.			Lunghezza riga in mm.	Riga	Lega
I	II	somma			
6.6	6.6	13.2	2.41	5332 Sn	Sn Pb
6.6	10.2	16.8	2.29	»	»
10.2	6.6	16.8	2.30	»	»
10.2	10.2	20.4	2.03	»	»
6.6	6.6	13.2	2.96	5100 Sn	Sn Pb
6.6	10.2	16.8	2.76	»	»
10.2	6.6	16.8	2.74	»	»
10.2	10.2	20.4	2.47	»	»
6.6	6.6	13.2	2.20	5373 Pb	Sn Pb
6.6	10.2	16.8	2.04	»	»
10.2	6.6	16.8	2.03	»	»
10.2	10.2	20.4	1.76	»	»

*Influenza dello spessore della piastrina.*

Spessore in mm.	Lunghezza della riga in mm.	Riga	Lega
1.4	2.26	5100 Sn	Sn Pb
2.7	2.25	»	»
1.23	1.90	5218 Cu	Cu Zn
1.90	1.92	»	»
1.23	1.43	4722 Zn	Cu Zn
1.90	1.44	»	»
0.5	1.05	5100 Sn	Sn Pb
1.0	1.08	»	»
1.5	1.07	»	»
2.0	1.04	»	»
4.0	1.05	»	»
6.0	1.06	»	»
8.0	1.04	»	»

*Influenza della dispersione calorifica.*

Lunghezza della riga in mm.			Riga	Lega
iniziale	radiatore	tolto		
2.77	2.78	2.78	5100 Sn	Sn Pb
1.96	1.98	1.96	5332 Sn	»
2.53	2.54	2.55	5373 Pb	»
2.75	2.74	2.74	5545 Pb	»
1.44	1.44	1.43	4722 Zn	Cu Zn
1.39	1.38	1.40	4810 Zn	»
2.00	1.98	1.98	5218 Cu	»
1.95	1.96	1.95	5153 Cu	»
1.93	1.90	1.92	5106 Cu	»

*Influenza della composizione degli elettrodi ausiliari.*

Composizione	Riga	Lunghezza della riga in mm.	Lega
C . . . . .	5332 Sn	2.68	Sn Pb
Cu . . . . .	»	2.50	»
Cd . . . . .	»	2.25	»
C . . . . .	5100 Sn	2.50	Sn Pb
Cu . . . . .	»	2.23	»
Cd . . . . .	»	2.20	»
C . . . . .	5373 Pb	2.77	Sn Pb
Cu . . . . .	»	2.68	»
Cd . . . . .	»	2.37	»
C . . . . .	5545 Pb	2.70	Sn Pb
Cu . . . . .	»	2.61	»
Cd . . . . .	»	2.29	»



Dai risultati ottenuti si può essere sicuri della grande praticità del nuovo tipo di spinterometro nelle ricerche di analisi spettrale quantitativa. Infatti la lunghezza della riga è influenzata solamente per grandi variazioni della distanza esplosiva, quindi la piastrina si può accomodare sullo spinterometro molto praticamente mediante calibri fissi senza portare alcun nocumento alla precisione della ricerca.

Inoltre la forma degli elettrodi ausiliari non porta alcuna variazione, quindi basta riprodurla approssimativamente in quella dimensione e figura meglio adatta a dare una scintilla facilmente osservabile.

Questi due fatti, uniti alla perfetta riproducibilità della superficie piana della piastrina elettrodo, portano il vantaggio di rendere, per invariate condizioni elettriche, la lunghezza della riga funzione unicamente della percentuale del metallo contenuto nella lega in esame.

**Fisica.** (Fisica teorica). — *I tensori energetici nella teoria unitaria a geometrizzazione assoluta.* Nota di P. STRANEO, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. SEVERI.

Con questa Nota, premessi pochi richiami sulla mia recentissima teoria unitaria <sup>(2)</sup> totalmente fondata sulla *connessione dello spazio-tempo*, deduco le espressioni dei vari tensori che in essa vengono a corrispondere a quelli che le teorie precedenti dovevano introdurre come elementi fisici, e più precisamente come i costituenti del *tensore energetico generale*.

Si vedrà che nello stesso tempo risultano pure definiti *due nuovi tensori*, dei quali uno viene opportunamente a sostituire il tanto discusso *pseudo-tensore gravitazionale* della teoria einsteiniana, in modo che anche quella difficile questione, che fu giustamente considerata come un indovinello cui solo il tempo avrebbe potuto rispondere <sup>(3)</sup>, può finalmente ritenersi chiaramente risolta. L'altro poi costituisce, *mutatis-mutandis* il perfetto analogo elettrico di cotesto tensore gravitazionale; analogo che non doveva mancare dato che, in questa teoria, l'elettricità risulta geometrizzata quanto la gravitazione. Ciascuno di essi rappresenta in un certo senso le distribuzioni dell'energia nello spazio tempo, rispettivamente dovute a quelle cause geometriche (torsioni) che, in questa nuova teoria, determinano i tensori energetici che prima venivano attribuiti a cause fisiche.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) Questi « Rendiconti », seduta del 20 marzo 1932. Ancora in corso di pubblicazione.

(3) VON LAUE, *Relativitätstheorie*. II Band., p. 177, 1921.

BREVE RICHIAMO DELLA NUOVA TEORIA UNITARIA.

1. La costituzione formale della nuova teoria può riassumersi così. La *connessione* (euclidea con torsione) che definisce la varietà rappresentativa *spazio-tempo*, sia sottoposta alla forma e alla condizione

$$(S) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu}) + \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (A) \quad \Omega_{\alpha\nu}^{\alpha} = -\Omega_{\nu\alpha}^{\alpha} = 0.$$

Esse impongono alla connessione (S) la condizione  $L_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$ , e quindi alla varietà  $V_4$  da essa definita il *parallelismo assoluto*.

La legge fondamentale della nuova teoria, perfettamente compatibile, anzi contenuta, nella predetta condizione, sia poi:

$$(S \text{ bis}) \quad L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L g_{\mu\nu} = 0.$$

Sostituendo per le  $L_{\mu\nu}$  e la  $L$  le loro espressioni, deducibili dalle (S) e (A) e applicando note regole della geometria, si ottengono equazioni che, scisse nelle loro parti simmetriche e emissimmetriche rispetto agli indici  $\mu, \nu$ , possono scriversi:

$$(A \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \Omega_{\alpha\mu}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha} + \frac{1}{4} \Omega_{\alpha\varrho}^{\lambda} \Omega_{\lambda}^{\alpha\varrho} g_{\mu\nu} = -k\theta_{\mu\nu}, \\ \frac{\delta\psi_{\mu}}{\delta x^{\nu}} - \frac{\delta\psi_{\nu}}{\delta x^{\mu}} = \Omega_{\mu\nu}^{\alpha};_{\alpha} = \Psi_{\mu\nu}. \end{array} \right.$$

Queste equazioni corrispondono alle gravitazionali di Einstein e alle elettromagnetiche di Maxwell quando solamente si interpretino i tensori a destra  $\theta_{\mu\nu}$  e  $\Psi_{\mu\nu}$  rispettivamente come il *tensore energetico generale* e il *tensore delle forze elettromagnetiche*.

2. La compatibilità di coteste interpretazioni risulta evidente. Si tratta, in ultima analisi, di determinare le 24 componenti del tensore di torsione  $\Omega_{\mu\nu}^{\alpha}$ , con indipendenza dal sistema di riferimento. Perciò possiamo imporre ad esse solo 20 condizioni. Le (A) ne hanno già imposte 4. Le altre 6 + 10 sono appunto quelle date dalle ultime posizioni nelle equazioni (A bis).

3. Riscriviamo il tensore a destra delle prime delle equazioni (A bis), sottraendovi e poi aggiungendovi la quantità  $\frac{1}{2} \Omega_{\alpha\mu}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha}$ . Esso assumerà la forma:

$$(I) \quad \left( -\Omega_{\alpha\mu}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha} + \frac{1}{4} \Omega_{\alpha\varrho}^{\lambda} \Omega_{\lambda}^{\alpha\varrho} g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\mu}^{\lambda} \Omega_{\lambda\mu}^{\alpha} = -k\theta_{\mu\nu},$$

che appunto ci proponiamo di interpretare.

A questo proposito non è forse inutile aggiungere che a una interpretazione *in sostanza* perfettamente equivalente si giungerebbe anche operando direttamente sull'espressione fornita dalle (A bis); ma la (1) presenta il vantaggio formale di condurci a forme tensoriali più consuete.

# I TENSORI ENERGETICI PARTICOLARI DELLA NUOVA TEORIA.

4. Il tensore simmetrico nelle  $\mu, \nu$  che interviene ripetutamente nell'espressione (1) è finora solo sottoposto alla condizione (A). Consideriamolo, come è evidentemente lecito, come costituito di due parti additive, di cui la prima a divergenza nulla, in base alle equazioni:

$$(2) \quad \Omega_{\alpha\mu}^{\lambda} \Omega^{\alpha} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} + \Delta_{\alpha\mu}^{\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{\alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\mu; \lambda}^{\lambda} \equiv 0, \quad \Delta_{\alpha\mu; \lambda}^{\lambda} = \Psi_{\alpha\mu}.$$

La generalità della seconda parte non sarà alterata se la porremo successivamente nelle forme

$$(3) \quad \Delta_{\alpha\mu}^{\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{\alpha} = \Delta_{\alpha\mu; \varrho}^{\lambda} \Delta_{\lambda\nu; \sigma}^{\sigma} g^{\sigma\nu} = \Psi_{\alpha\mu} \Psi_{\lambda\nu} g^{\alpha\lambda}.$$

Analogamente si avrà per l'invariante

$$(4) \quad \Delta_{\alpha\varrho}^{\lambda} \Delta_{\lambda}^{\alpha\varrho} = \Delta_{\alpha\varrho; \beta}^{\beta} \Delta_{\lambda; \gamma}^{\gamma\varrho} g^{\alpha\lambda} = \Psi_{\alpha\varrho} \Psi^{\alpha\varrho}.$$

5. Ciò premesso l'espressione (1) del tensore energetico generale diviene:

$$(5) \quad \left( -\Psi_{\alpha\mu} \Psi_{\lambda\nu} g^{\alpha\lambda} + \frac{1}{4} \Psi_{\alpha\varrho} \Psi^{\alpha\varrho} g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\mu}^{\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{\alpha} + \\ + \left( -\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} + \frac{1}{4} \Gamma_{\alpha\varrho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda}^{\alpha\varrho} g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} = -k\theta_{\mu\nu},$$

nella quale tutte le 4 parti costituenti sono simmetriche rispetto agli indici  $\mu, \nu$ . Per le prime delle (A bis), essendo, come è notissimo, a divergenza nulla il tensore a sinistra, dovrà esser pur tale il nostro tensore complessivo.

6. Le prime due parti complessivamente costituiscono il tensore energetico elettromagnetico della nuova teoria moltiplicato per la costante  $k$ .

La prima parte, quella compresa fra le prime parentesi, rappresenta notoriamente l'ordinario tensore energetico elettromagnetico, o maxwelliano; la indicheremo con  $-k\tau_{\mu\nu}$ . La sua divergenza (rispetto alla connessione dello spazio-tempo) deve soddisfare alla condizione:

$$(6) \quad \tau_{\mu| \nu}^{\nu} = \Psi_{\mu\nu} \Psi^{\nu\sigma}_{|\sigma}.$$

Sulla seconda parte ritorneremo fra poco.

7. I due tensori espressi per mezzo delle  $\Gamma$ , rappresentano complessivamente il tensore simmetrico nelle  $\mu, \nu$ , a divergenza nulla, che nella nostra teoria deve corrispondere al tensore energetico moltiplicato per la costante  $k$ , e cambiato di segno, che indicheremo con  $-kT_{\mu\nu}$ , completato col *pseudo-tensore*  $-kt_{\mu\nu}$  della teoria einsteiniana <sup>(1)</sup>, per l'insieme dei quali  $-k(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})$  appunto dovevano sussistere i principî conservativi.

Entrambi, nella nostra teoria, sono a divergenza nulla.

L'ultimo di essi è il solo che sussiste nelle equazioni gravitazionali nel caso di assenza di elettricità (nullità dei due primi tensori) e di assenza di materia (nullità del terzo). Ma in quel caso le equazioni risultanti, contenendo solo elementi della connessione, possono fornire, come le classiche  $G_{\mu\nu} = 0$  di Einstein, i corpuscoli materiali come semplici singolarità dello *spazio-tempo*. Il tensore  $\frac{1}{2} \Omega_{\alpha\mu}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha}$  esprime quindi per lo *spazio-tempo* in cui esistono solo masse puntiformi isolate, quel *quid energetico* del campo che si era tentato di esprimere in funzione delle  $g_{\mu\nu}$  e delle loro derivate per mezzo del *pseudo-tensore* einsteiniano, che diede luogo a tante discussioni. Esso è ora espresso invece, in forma tensorialmente corretta, in funzione dei nuovi elementi geometrici introdotti nella connessione; può quindi venir legittimamente designato come *tensore energetico (del campo) della gravitazione (pura)*.

8. Dopo ciò è quasi evidente che l'ultimo tensore sul quale dobbiamo ritornare, quello rimasto nella (5) espresso per mezzo delle  $\Delta$ , debba esser considerato come l'analogo del precedente per quanto riguarda il lato elettromagnetico della questione, malgrado le notevoli differenze che *concorde-mente* esigono la sua composizione formale e la sua interpretazione fisica. In particolare esso non può sussistere da solo, ma solamente associato al corrispondente tensore energetico maxwelliano di eguale e contraria divergenza, e a un conveniente tensore della gravitazione, perchè in questa nuova teoria, come in quella della sola gravitazione, si verifica che ogni forma di energia produce un proprio campo gravitazionale.

#### CONSIDERAZIONI SUL SENSO FISICO-GEOMETRICO DELLA TEORIA.

9. Le principali caratteristiche della teoria ora svolta consistono in ciò che: 1°) TUTTI i tensori dello *spazio-tempo* che intervengono in esso sono fondamentalmente di indole geometrica, per quanto poi noi attribuiamo loro anche una interpretazione fisica; 2°) che l'entità di cotesti tensori è sempre misurata dal loro divario rispetto i corrispondenti tensori (general-

(1) P. es. EDDINGTON, « The math. theory of relativity », 1923, § 59.



mente nulli) dello *spazio-tempo* non deformato, *pseudo-euclideo*, che dobbiamo ammettere in assenza di qualsiasi fenomeno fisico (gravitazione compresa).

Per una peculiare proprietà delle equazioni einsteiniane, che permane malgrado la loro generalizzazione ad uno *spazio-tempo* con torsione, il nostro spazio tempo è di natura tale da poter esser rappresentato in uno spazio euclideo (o pseudo-euclideo) di egual numero di dimensioni, p. es. mediante le deformazioni di un reticolato che in assenza di ogni fenomeno fisico sia cartesiano.

10. Nel caso della presenza di sole masse puntiformi discrete, soggette quindi alla sola loro mutua gravitazione, il tensore energetico (complessivo) è rappresentato dall'ultimo termine della (5), cioè dal solo *tensore del campo gravitazionale puro*, il quale si presenta, come deve essere, come un tensore di curvatura, che però trae la sua origine e la sua misura, non dalla metrica, ma dalla parte a divergenza nulla del tensore di torsione  $\Omega$ , il quale — anche in questo caso delle masse isolate e puntiformi per cui la teoria einsteiniana non aveva potuto fornir accettabili rappresentazioni — assume nettamente il ruolo di rappresentante della materia.

Nel caso che le masse materiali siano soggette ad altre azioni fisiche, oltre la gravitazione, interviene anche l'altro tensore nelle  $\Gamma$ , equivalente al classico tensore energetico, che riceve così la sua interpretazione geometrica, ancora per mezzo della parte a divergenza nulla del tensore di torsione.

11. Nel caso finalmente della presenza di elettricità, e solo allora, interviene per rappresentare geometricamente la materia fisica, la parte a divergenza non nulla del tensore  $\Omega$ .

Su questo fatto, che traccia una netta distinzione fra i fenomeni materiali e quelli elettromagnetici, si può fondare una rappresentazione geometrica di questa teoria veramente semplice e intuitiva, che esporrò in altra pubblicazione.

12. Per quanto infine riguarda il moto di corpuscoli, siano essi puramente materiali, siano essi anche elettrizzati, ricordiamo che la distorsione introdotta nella connessione non ha alcuna influenza sulle geodetiche, che rimangono quindi coincidenti con quelle dello *spazio-tempo* puramente einsteiniano. La traiettoria di un corpuscolo materiale sarà quindi ancora data dalle equazioni delle geodetiche e quella di un corpuscolo elettrizzato dalle note equazioni

$$-\rho^* \left\{ \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right\} = \Psi^\mu_\nu \rho_0 \frac{dx^\nu}{ds},$$

nelle quali  $\rho^*$  indica la densità invariante della massa e  $\rho_0$  la densità della carica elettrica. Esse si riducono appunto alle equazioni delle geodetiche quando è nulla la densità della carica elettrica  $\rho_0$ .



**Geofisica.** — *Funzioni a variazione limitata continue verso destra.* Nota di T. VIOLA, pres. dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Ricerche sulla radioattività del potassio.* Nota di D. BOCCIARELLI, pres. dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica fisica). — *Spettro Raman di alcuni derivati dell'anilina* <sup>(1)</sup>. Nota di G. B. BONINO e P. CELLA, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. M. BETTI.

In un lavoro precedente <sup>(3)</sup> abbiamo esposto alcuni fatti in accordo con l'ipotesi che al legame  $N=C$  corrisponda una riga Raman a  $\nu' = 1430-1450 \text{ cm}^{-1}$ . Una ulteriore ricerca in questa direzione incontra però la difficoltà seguente. Nella posizione  $1430-1450 \text{ cm}^{-1}$  dello spettro Raman compare anche una riga corrispondente al gruppo  $CH_2$  e perciò per composti contenenti gruppi  $CH_2$  e gruppi  $N=C$  non può riuscire netta e sicura la dimostrazione della corrispondenza tra una riga a  $1430-1450 \text{ cm}^{-1}$  dello spettro Raman e la presenza del legame  $N=C$  in molecola.

Perciò abbiamo voluto preparare alcuni derivati i quali pur possedendo in molecola un legame  $C=N$  non contengano gruppi  $CH_2$  e di essi abbiamo studiato lo spettro Raman.

L'esame di questi composti ha confermato l'apparire di una riga Raman a  $1450 \text{ cm}^{-1}$  circa quando in molecola si stabilisce un legame  $C=N$ .

I composti studiati derivano dalla condensazione di anilina o aniline alogeno sostituite con aldeide benzoica o aldeidi benzoiche alogeno sostituite composti cioè quali la benzalanilina, la p-clorobenzalanilina, la benzal-p-cloroanilina. Onde poter poi mettere meglio in rilievo (come avanti sarà detto) il risultato ottenuto dallo spettro Raman di questi composti abbiamo esaminato pure la benzoilanilina e la benzoiltoluidina. Tutte queste sostanze sono solide e perciò lo spettro Raman è stato studiato sia in soluzione benzenica sia in soluzione cloroformica, sia in tetracloruro di carbonio.

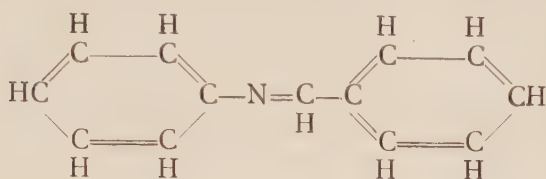
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) V. questi « Atti », 1932.

TABELLA I.

*Spettro Raman della benzalanilina in soluzione benzenica.*

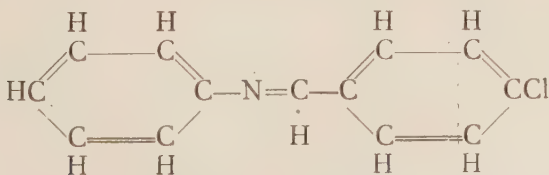


N. d'ordine	$\nu$	I	Riferimento	Note
1	19893	3	$\epsilon$ -3045	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
2	21301	5	$\epsilon$ -1637	
3	21342	5	$\epsilon$ -1596	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
4	21448	1	$\epsilon$ -1490	
5	21485	1	$\epsilon$ -1453	
6	21554	1	$\epsilon$ -1384	
7	21617	1	$\epsilon$ -1321	
8	21756	5	$\epsilon$ -1182	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
9	21944	4	$\epsilon$ - 994	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
10	22077	1	$\epsilon$ - 861	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )

Le righe comuni al C<sub>6</sub>H<sub>6</sub> sono segnate con l'indicazione C<sub>6</sub>H<sub>6</sub> fra parentesi. Tali righe però devono attribuirsi anche al composto in esame (che contiene due nuclei aromatici) come del resto mostrano gli spettri ottenuti in solventi quali il tetracloruro di carbonio, ecc.

TABELLA II.

*Spettro Raman della p-clorobenzalanilina in soluzione benzenica.*

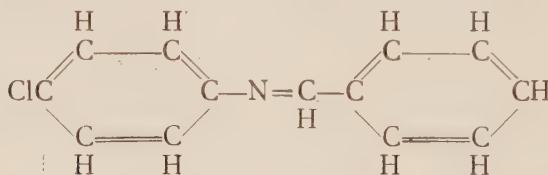


N. d'ordine	$\nu$	I	Riferimento	Note
1	19893	3	<i>e</i> -3045	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
2	21309	5	<i>e</i> -1629	
3	21342	5	<i>e</i> -1596	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
4	21533	1	<i>e</i> -1405	
5	21739	5	<i>e</i> -1199	
6	21755	5	<i>e</i> -1183	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
7	21841	2	<i>e</i> -1097	
8	21940	4	<i>e</i> - 998	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )
9	22072	1	<i>e</i> - 866	(C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )

L'esame della paraclorobenzalanilina in tetracloruro di carbonio rileva nettamente le righe a 1629, 1588, 1405 cm<sup>-1</sup>.

TABELLA III.

*Spettro Raman della benzal-p-cloroanilina in soluzione benzenica.*

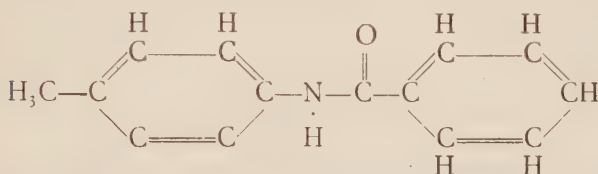


N. d'ordine	$\nu$	I	Riferimento
1	19893	3	<i>e</i> -3045
2	21304	5	<i>e</i> -1634
3	21343	5	<i>e</i> -1595
4	21401	1	<i>e</i> -1537
5	21443	1	<i>e</i> -1495
6	21487	1	<i>e</i> -1451
7	21739	4	<i>e</i> -1199
8	21759	4	<i>e</i> -1179
9	21928	3	<i>e</i> -1010
10	22567	1/2	<i>e</i> - 371
11	22675	1	<i>e</i> - 263

Nella zona dello spettro tra  $1400$  e  $1500\text{ cm}^{-1}$  troviamo dunque sempre una o due righe che, come abbiamo visto in altri casi, compaiano, in assenza di gruppi  $\text{CH}_2$  in molecola, quando si stabilisce nella stessa un legame  $\text{C}=\text{N}$ . Nello spettro Raman di composti a costituzione simile ma non contenenti gruppi  $\text{C}=\text{N}$  non siamo riusciti invece ad osservare righe tra  $1400$  e  $1500\text{ cm}^{-1}$  mentre troviamo raddoppiata o triplicata la riga caratteristica del legame aromatico ( $1600\text{ cm}^{-1}$  circa) come accade nelle benzalaniline studiate. Quest'ultimo fatto escluderebbe quindi l'ipotesi di dover attribuire il raddoppio stesso nelle benzalaniline alla presenza di un legame  $\text{C}=\text{N}$ . Riferiamo per esempio lo spettro Raman della benzoil-*p*-toluidina in soluzione cloroformica.

TABELLA IV.

*Spettro Raman della benzoil-*p*-toluidina in soluzione cloroformica.*



N. d'ordine	$\nu$	I	Riferimento	Note
1	19902	3	$\epsilon-3036$	$\text{>CH}$
2	21297	$1/2$	$\epsilon-1641$	$\text{C}=\text{O}?$
3	21343	3	$\epsilon-1595$	$\left. \begin{array}{l} \text{"C}=\text{C}_{\text{ar}} \\ \text{"C}=\text{C}_{\text{ar}} \end{array} \right\} \text{aromatico}$
4	21397	1	$\epsilon-1541$	
5	21486	$1/2$	$\epsilon-1452$	$\text{CH}_3$
6	21621	2	$\epsilon-1317$	
7	21671	2	$\epsilon-1267$	
8	21936	5	$\epsilon-1002$	
9	22275	5	$\epsilon-663$	$(\text{CHCl}_3)$
10	22575	5	$\epsilon-363$	$(\text{CHCl}_3)$
11	22675	5	$\epsilon-263$	$(\text{CHCl}_3)$

Lo spettro Raman della benzoilanilina è di esecuzione più difficile data la piccola solubilità di questo composto. Abbiamo ciò nonostante potuto rilevare nettamente le seguenti righe:

$$\nu = \text{cm}^{-1}: 3038 ; 1641 ; 1595 ; 1270 ; 998 ; 710$$

e cioè anche nella benzoilanilina (che non contiene legami  $C=N$ ) la riga a  $1600\text{ cm}^{-1}$  circa è raddoppiata come nelle benzaniline mentre si esclude nettamente la presenza della riga tra  $1400$  e  $1500\text{ cm}^{-1}$  che appunto compare invece costantemente quando si ha in molecola un gruppo  $C=N$  ovvero un gruppo  $CH_2$ .

Concludendo, nei composti studiati conformemente ad altri casi rilevati in un precedente lavoro, quando si ha un legame  $C=N$  in molecola compaiono nello spettro Raman una o due righe tra  $1400$  e  $1500\text{ cm}^{-1}$ . Siccome queste righe non si possono confondere nei composti studiati con le righe dei gruppi  $CH_2$ , data appunto la mancanza di tali gruppi nei su riferiti prodotti, si potrebbero considerare i fatti sopra notati come in appoggio dell'ipotesi che al legame  $C=N$  corrisponda una riga Raman a  $1450\text{ cm}^{-1}$  circa.

Abbiamo in corso altre ricerche onde indagare ulteriormente su questo punto.

Ringraziamo il laureando Elio Lucchi per la collaborazione prestataci in questo lavoro.

**Chimica.** (Chimica fisica). — *Sullo spettro Raman della  $\Delta$ ,diidronaftalina* <sup>(1)</sup>. Nota di G. B. BONINO e P. CELLA, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. M. BETTI.

In un recente lavoro <sup>(3)</sup> sullo spettro Raman della decaidronaftalina e della tetraidronaftalina abbiamo trovato che nello spettro di questo secondo composto (tetralina) appaiono raddoppiate alcune righe che nella decalina si mostrano semplici. Una interpretazione di questi raddoppi non può essere a prima vista nè facile nè semplice specialmente per il fatto della relativa complessità delle molecole in esame. D'altra parte recentemente Fermi <sup>(4)</sup> ha elegantemente dimostrato come certi casi di degenerescenza accidentale possano appunto dar luogo al raddoppio di una riga Raman e tali raddoppi quindi sarebbero erroneamente interpretati se si considerassero come dovuti a due distinti oscillatori ovvero sia ad un tipo di oscillatore che si trovi in due condizioni « chimico strutturistiche » diverse in molecole.

Queste considerazioni rendono quindi difficile e mal sicuro l'apprezzamento qualitativo delle cosiddette influenze strutturistiche sulle righe Raman caratteristiche di un certo gruppo o legame a meno di non poter eseguire uno studio teorico quantitativo che non sempre è possibile e spesso viceversa si mostra assai difficile quando si studiano molecole organiche piuttosto complesse.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

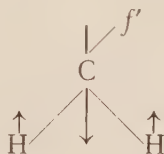
(3) Questi « Atti », XIII, p. 784 (1931).

(4) « Zeit f. Phys. », 71, 250 (1931).



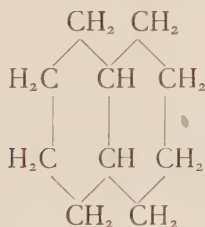
Una delle righe Raman della decalina che si trova raddoppiata nella tetralina è la riga  $\nu' = 1450 \text{ cm}^{-1}$  circa (decalina  $\nu' = 1452 \text{ cm}^{-1}$ ; tetralina  $\nu'_a = 1458 \text{ cm}^{-1}$ ;  $\nu'_b = 1433 \text{ cm}^{-1}$ ).

Questa riga come si sa <sup>(1)</sup> è dovuta ad una delle oscillazioni del gruppo  $\text{CH}_2$  e dai valori registrati dalla bibliografia <sup>(2)</sup> si può dedurre empiricamente che la posizione di essa riga risente notevolmente delle influenze chimiche costitutive ed in particolare ogni volta che esistono in molecola due gruppi  $\text{CH}_2$  diversamente legati al resto della molecola (per es. uno con legame semplice e l'altro con doppio legame tra carbonio e carbonio) la riga del  $\text{CH}_2$  che si trova ordinariamente a  $1450 \text{ cm}^{-1}$  circa si presenta scissa in due componenti delle quali una a  $1450 \text{ cm}^{-1}$  e l'altra a  $1420\text{--}1430 \text{ cm}^{-1}$  circa. Siccome la riga a  $1450 \text{ cm}^{-1}$  è attribuita alle oscillazioni <sup>(3)</sup>

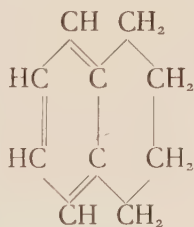


è facile vedere come una netta variazione del legame  $f'$  possa con molta probabilità influire sulla sua frequenza di oscillazione.

Apparentemente però nella tetralina i diversi gruppi  $\text{CH}_2$  sono materialmente legati nello stesso modo e più difficilmente si intravede una possibilità di influenze costitutive salvo che non si pensi



Decalina



Tetralina

al fatto (che manca appunto nella decalina) che nella tetralina i  $\text{CH}_2$  in  $\alpha$  sono più vicini al nucleo aromatico mentre quelli in  $\beta$  ne sono più lontani e quindi più simili ai gruppi  $\text{CH}_2$  della decalina e si ritenga che tali differenze vengano risentite dalla frequenza propria d'oscillazione a  $1450 \text{ cm}^{-1}$ .

Questa ipotesi sarebbe avvalorata dal fatto che delle due righe del  $\text{CH}_2$  nella tetralina una coincide con la riga che si osserva nella decalina. Anche in questo caso dunque sotto un punto di vista fenomenologico e chimico

(1) Vedi per es. KOHLRAUSCH-SMEKAL, *Raman-Effekt*, p. 193. Springer, 1931, Berlino.

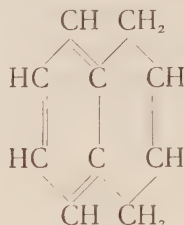
(2) Vedi KOHLRAUSCH, loc. cit. p. 193 e BONINÒ e CELLA: Questi « Atti », XIII, pp. 7-88 (1931) e « Memorie R. Acc. d'Italia », II, N. 4, p. 38, 1931.

(3) Vedi KOHLRAUSCH, loc. cit., nota 5.

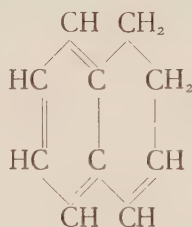
si dovrebbe concludere (in accordo coi casi già messi in evidenza dalla bibliografia) che due gruppi  $\text{CH}_2$  esistenti in molecola e legati diversamente ovvero occupanti in molecola posizioni chimicamente non equivalenti porterebbero al raddoppio delle rispettive righe a  $1450 \text{ cm}^{-1}$  circa.

Era curioso in questo caso studiare un derivato idrogenato della naftalina il quale oltre ad avere uno dei due anelli non idrogenato, come nella tetralina, possedesse viceversa i gruppi  $\text{CH}_2$  strutturisticamente equivalenti.

Tale composto è realizzato dalla  $\Delta_2$ diidronaftalina:



In questo composto i due  $\text{CH}_2$  sono equivalenti (ambedue nella posizione  $\alpha$ ) e vicini al nucleo non idrogenato. Perchè la ricerca non perdesse il suo interesse era necessario però avere un prodotto assolutamente puro ed esente da tetralina e da  $\Delta_1$ diidronaftalina:



e per questo abbiamo preferito preparare e purificare noi stessi il prodotto.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Preparazione e purificazione della  $\Delta_2$ diidronaftalina.* — Ci siamo attenuti alle indicazioni di Bamberger e Lodter <sup>(1)</sup>, di F. Straus e L. Lemmel <sup>(2)</sup>, e di Sand e Genssler <sup>(3)</sup>.

In una soluzione bollente di 30 gr. di naftalina in 600 cc. di alcool assoluto si introducono lentamente 45 gr. di sodio trafilato e si riscalda (in un pallone da  $1\frac{1}{2}$ –2 litri) fino a soluzione del metallo. Si distilla quindi in corrente di vapore e si estrae con etere il prodotto così formatosi. Il prodotto greggio proveniente dalla distillazione dell'etere si purifica sfruttando le diverse proprietà dei composti di addizione delle diidronaftaline con acetato mercurico. Infatti il derivato della  $\Delta_2$ diidronaftalina è fusibile

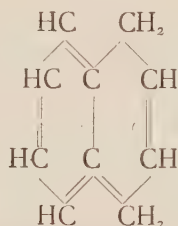
(1) «A.», 288, 75 (1895).

(2) «Ber.», XLVI (1), 232 (1913).

(3) «Ber.», 36, 3705 (1903).

a 120-122° e solubile in benzolo bollente, mentre il derivato della  $\Delta_1$ diidronaftalina è affatto insolubile in benzolo e a 250° ancora non fonde. Il prodotto ottenuto come sopra venne trattato nella macchina ad agitare per 24 ore in soluzione eterea con una soluzione acquosa di acetato di mercurio. Il prodotto di reazione dopo 24 ore è estratto con benzolo bollente. Si ha così per successive cristallizzazioni dal benzolo bollente il derivato mercurico della  $\Delta_2$ diidronaftalina allo stato puro (P. F. 120°, 5). Questo prodotto viene decomposto con acido cloridrico concentrato (30 %) e dal miscuglio si distilla la  $\Delta_2$ diidronaftalina in corrente di vapore. Questo prodotto separato e seccato su cloruro di calcio si presenta come un olio incolore che bolle (in accordo coi dati della bibliografia) a 94°,5 a 17 mm. di mercurio di pressione e si rapprende a freddo in una massa di fogliette cristalline fusibili a 24°,5.

*Spettro Raman della  $\Delta_2$ diidronaftalina (fusa).*



N. d'ordine	$\nu$	I	Riferimento	Note
1	19897	3	$e-3041$	$\text{>C-H}$
2	20065	3	$e-2873$	} $\text{>CH}_2$
3	20113	3	$e-2825$	
4	21275	2	$e-1663$	$\text{C=C}$ olefinico
5	21346	2	$e-1592$	" $\text{C}=\text{C}$ ", aromatico
6	21505	3	$e-1433$	$\text{CH}_2$
7	21651	2	$e-1287$	naftalina
8	21775	3 dif	$e-1163$	naftalina
9	21891	5	$e-1047$	tetralina
10	22199	5	$e-739$	tetralina
11	22439	3	$e-499$	naftalina
12	22470	3	$e-468$	
13	22694	4	$e-244$	tetralina

La indicazione « tetralina » significa che la riga si trova nello spettro Raman della tetralina e così per le indicazioni « naftalina ».

*Discussione dei risultati.*

Lo spettro Raman della  $\Delta_2$ diidronaftalina presenta delle righe perfettamente in accordo con la sua formula di struttura se si tien conto degli spettri della naftalina, della decalina, e della tetralina studiati nel precedente lavoro.

La riga  $3041\text{ cm}^{-1}$  del C-H aromatico è comune con la tetralina e la naftalina; le righe  $2873$  e  $2825\text{ cm}^{-1}$  sono da attribuirsi ai  $\text{CH}_2$ . Notevole la comparsa nello spettro della  $\Delta_2$ diidronaftalina di una riga a  $1663\text{ cm}^{-1}$  che manca nella tetralina e nella decalina nonchè nella naftalina ed è caratteristica del doppio legame etilenico che appunto si stabilisce nella  $\Delta_2$ diidronaftalina.

La riga a  $1433\text{ cm}^{-1}$  è la riga caratteristica del gruppo  $\text{CH}_2$  e nella  $\Delta_2$ diidronaftalina non è raddoppiata come nella tetralina bensì è semplice ed ha una posizione che si scosta di 20 numeri d'onda circa di quella caratteristica del  $\text{CH}_2$  diremo « tipico » quale per es. si trova nello spettro Raman della decalina. Questa riga della  $\Delta_2$ diidronaftalina coincide invece con quella delle due righe del  $\text{CH}_2$  nello spettro della tetralina che ad un primo esame qualitativo si è tratti ad attribuire al  $\text{CH}_2$  più vicino al nucleo non idrogenato. La coincidenza potrebbe avvalorare quindi l'osservazione sopra riportata e che cioè quando in molecola vi sono due  $\text{CH}_2$  di tipo diverso la riga a  $1450\text{ cm}^{-1}$  circa si sdoppia in due righe distinte delle quali una sempre a  $1450\text{ cm}^{-1}$  e l'altra ad un valore ordinariamente più basso. Viceversa non si può confermare la reciproca che cioè lo sdoppiarsi della riga a  $1450\text{ cm}^{-1}$  significhi sempre la presenza di due  $\text{CH}_2$  di tipo diverso in molecola. Invero mentre nel caso della tetralina tale ipotesi potrebbe fino ad un certo punto essere confermata dalle misure riportate in questa Nota sulla  $\Delta_2$ diidronaftalina, in generale potrebbero verificarsi per es. casi analoghi a quelli studiati recentemente da Fermi (v. loc. cit.) la cui constatazione appunto non ci permette di dedurre in generale ed a prima vista sulla presenza di due gruppi in condizioni chimico strutturali diverse dal raddoppio di una riga caratteristica.

Ringraziamo il laureando Elio Lucchi per la collaborazione prestataci in questo lavoro.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica*. — IV. *Sulla ricerca dello scandio*<sup>(1)</sup>. Nota di G. PICCARDI e A. SBERNA, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Lo Sc, al pari dell'Y e del La, può esser ricercato con relativa facilità in base agli spettri d'arco o di scintilla; gli spettri di questo elemento non sono infatti troppo complicati e presentano righe persistenti e brillanti, situate per lo più nell'ultravioletto, dovute in generale all'ione  $\text{Sc}^+$ . Non essendo applicabili alla ricerca dello Sc i metodi di assorbimento da cristalli e soluzioni in uso per le terre rare colorate è forza servirsi, per la ricerca di questo elemento, dei metodi spettroscopici usuali.

Lo Sc può dare (al pari dell'Y e del La e di altri elementi) un monossido stabile ad alta temperatura capace di emettere un brillantissimo spettro di bande situato nella regione visibile ed in parte noto da gran tempo. Bande attribuibili al monossido  $\text{ScO}$  si notano infatti negli spettri d'arco dello Sc, e talvolta anche in quelli di scintilla; recentemente nello spettro di una stella rossa,  $\alpha$ -Ceti, il Baxandall<sup>(3)</sup> ha identificato una diecina di bande attribuibili al monossido  $\text{ScO}$ . Abbiamo pensato allora che il metodo degli spettri molecolari<sup>(4)</sup>, adottato per la ricerca dell'Y e del La, potesse esser più conveniente dei metodi spettroscopici ordinari anche nella ricerca dello Sc e lo abbiamo applicato studiandone, come di consueto, le caratteristiche sia dal punto di vista qualitativo che da quello quantitativo.

Servendoci del dispositivo di fiamma, descritto in una precedente Nota<sup>(5)</sup>, abbiamo volatilizzato delle soluzioni nitriche contenenti il 5, 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005 per cento di  $\text{Sc}_2\text{O}_3$ . L'ossido usato era impuro, ma ne avevamo stabilito approssimativamente il tenore in Sc, mediante una determinazione di peso atomico, in modo da poter preparare soluzioni a concentrazione nota. Il materiale scandifero ci è stato donato da S. E. il Prof. Francesco Giordani, Accademico d'Italia, che qui vivamente ringraziamo.

Il monossido  $\text{ScO}$ , che si forma direttamente nella fiamma per demolizione del sesquiossido, emette un sistema di bande non molto larghe, sfumate verso le grandi lunghezze d'onda, coll'origine situata nella regione arancione a  $\lambda$  6036 I.A.; generalmente non sono osservabili di questo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) F. E. BAXANDALL, « Publ. Astr. Soc. of the Pacific. », 41, 168, 1929.

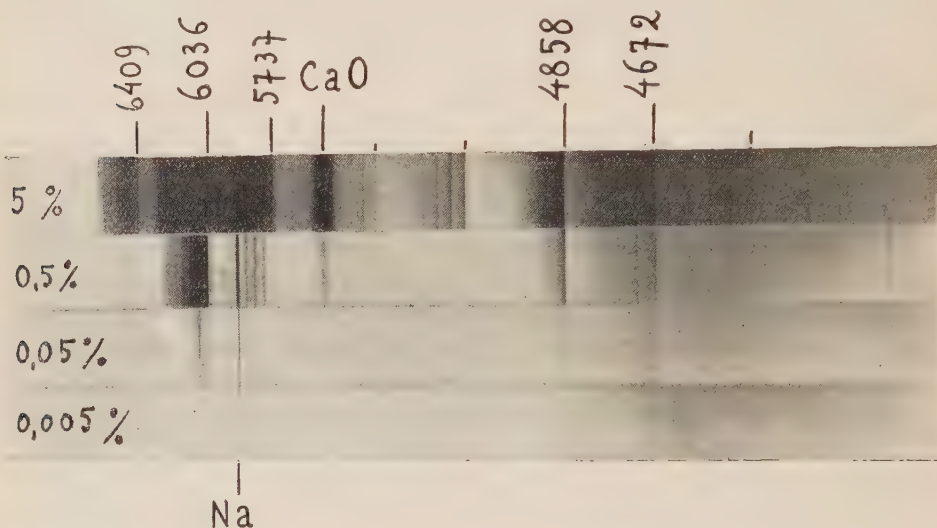
(4) G. PICCARDI, questi « Rendiconti » (6<sup>a</sup>) 14, 578, 1931.

(5) G. PICCARDI e A. SBERNA, questi « Rendiconti » (6<sup>a</sup>) 15, 83, 1932.



sistema che i gruppi  $n' - n'' = 0$  a  $\lambda 6036$  (caratteristico anche da un punto di vista astrofisico),  $n' - n'' = 1$  a  $\lambda 5737$  ed  $(n' - n'') = -1$  a  $\lambda 6409$ . Il gruppo  $n' - n'' = 2$  va a confondersi probabilmente con un gruppo appartenente ad un altro sistema. Oltre al sistema arancione, il monossido ScO, emette un altro bellissimo sistema di bande, un poco più larghe, pure sfumate verso le grandi lunghezze d'onda, situato nella regione verde azzurra, coll'origine a  $\lambda 4858$  I.A.

Negli spettri d'arco compaiono tutte le bande del sistema arancione, mentre del sistema verde azzurro compaiono soltanto le più intense; per questo fatto il sistema a  $\lambda 6036$  è noto <sup>(1)</sup> ed ordinato <sup>(2)</sup> da tempo, mentre



quello a  $\lambda 4858$  è rimasto pressochè sconosciuto fino ad oggi. Col dispositivo di fiamma adottato nel nostro Laboratorio, i due sistemi sono osservabili al completo in assenza assoluta di righe atomiche e di fondo continuo, cioè nelle migliori condizioni per lo studio che ci siamo proposti. Le bande del gruppo  $n' - n'' = 0$  del sistema a  $\lambda 6036$  sono leggermente più intense di quelle del gruppo  $n' - n'' = 0$  del sistema a  $\lambda 4858$ , o almeno risultano tali nelle nostre condizioni di esperienza.

Alla concentrazione del 0.0005 %, non si riesce a scorgere alcuna banda, quantunque le bande più intense si trovino nella regione arancione, ottima per l'osservazione visuale; ma anche fotograficamente non è possibile registrare alcuno spettro. Alla concentrazione del 0.005 %, si notano all'osservazione diretta ben distinte le bande di testa del gruppo a  $\lambda 6036$  mentre fotograficamente si possono registrare, assai debolmente peraltro, le bande più intense sia dei gruppi a  $\lambda 6036$  che dei gruppi a  $\lambda 4858$  e  $\lambda 4672$ ;

(1) EDER e VALENTA, « *Atlas Typischer Spektren* », Wien, 1928.

(2) R. MECKE, « *Phys. Zeitschr.* », 28, 520, 1927.

allo 0.05 % si cominciano ad osservare anche le bande del gruppo a  $\lambda$  5737 ( $n' - n'' = 1$ ) e man mano che la concentrazione cresce, cresce il numero delle bande e dei gruppi visibili. Al 5 % tutto lo spettro è al completo. I gruppi  $n' - n'' = -1$  ed  $n' - n'' = -2$  sono meno persistenti dei gruppi  $n' - n'' = 1$  e  $n' - n'' = 2$ .

La sensibilità del metodo è dunque assai buona, potendosi svelare, con tutta facilità e sicurezza, lo Sc nella proporzione di 5 a 100.000.

Dal punto di vista quantitativo, abbiamo trovato, in base ad opportune misure microfotometriche (eseguite con un microfotometro di Moll) che la concentrazione assoluta dello Sc, può esser stimata a meno del 5 % (come nel caso dell'Y e del La) in tutti i campi della concentrazione, scegliendo, s'intende, opportunamente le bande da studiare.

Anche in questo caso, dunque, il metodo degli spettri molecolari può sostituire vantaggiosamente i metodi spettroscopici consueti, per sensibilità e precisione, oltre che per semplicità e rapidità di lavoro.

Riportiamo qui lo spettrogramma del monossido ScO eseguito a diverse concentrazioni. Lo spettrografo da noi usato è un piccolo apparecchio Hilger D2.

**Chimica.** — *Solubilità del gluconato di calcio in presenza di fosfato sodico e di acido arsenioso* <sup>(1)</sup>. Nota di F. DE CARLI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

È stato dimostrato recentemente che piccole quantità di acido borico aumentano notevolmente la solubilità del gluconato di calcio rendendo possibile la preparazione di soluzioni contenenti a temperatura ordinaria, fino al 10 % di gluconato <sup>(3)</sup>.

Ho voluto pertanto provare se si manifestassero fenomeni analoghi anche con sostanze che possano associare la loro azione terapeutica a quella del gluconato, ed ho studiato le variazioni che subisce la solubilità di questo sale in presenza di fosfato sodico e di acido arsenioso.

In quel che segue sono riportati i dati relativi alle due isoterme di solubilità a 20°.

# I.

Sistema:



Nelle soluzioni e nei corpi di fondo fu dosato il calcio ossidimetricamente, ed il fosforo come pirofosfato. La precipitazione del fosfato ammonico-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) « Ann. chim. applicata », 21, 447 (1931).

magnesiaco fu eseguita con le precauzioni dettate per la separazione dell'acido fosforico dal calcio, e cioè in presenza di citrato ammonico; e quella dell'ossalato in presenza di acetato sodico.

Nella tabella I e nel diagramma I sono raccolti i risultati delle esperienze.

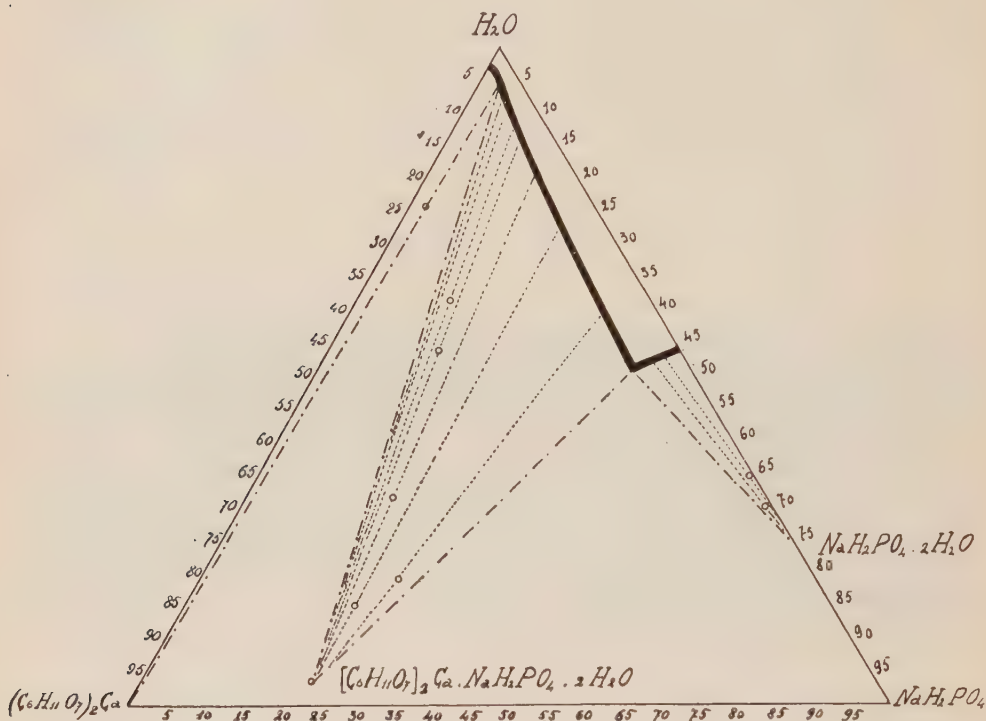


Fig. 1.

L'aumento di solubilità del gluconato per aggiunta di fosfato monosodico alla soluzione satura è piuttosto limitato in confronto a quanto si verifica nel caso dell'acido borico. La soluzione più concentrata ne contiene infatti 7,26 % contro 41,62 % di fosfato.

L'interesse particolare dei risultati sopra citati è dato dal fatto che in questo caso, prende origine un composto corrispondente al rapporto 1:1, e che sembra sia un semplice sale doppio. Infatti se si prepara una soluzione con quantità equimolecolari di gluconato e di fosfato, e la si concentra lentamente nel vuoto, si trova che nella sostanza solida che si separa l'acido fosforico si può rilevare con i comuni reattivi. Inoltre in essa si è trovato tra fosforo minerale, precipitato cioè dalla soluzione acquosa, e calcio il rapporto:

$$\frac{\text{NaH}_2\text{PO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}}{(\text{C}_6\text{H}_{11}\text{O}_7)_2\text{Ca}} = 1$$

il che conferma l'assenza di eteri fosforici del gluconato.

Le soluzioni contenenti fosfato monosodico e gluconato hanno un Ph prossimo a 5, e non è possibile elevarne il valore senza che precipiti fosfato di calcio.

L'associazione dei due sali non si presta pertanto alla preparazione di soluzioni impiegabili in pratica.

TABELLA I.

Soluzione				Residuo			
N.	$(C_6H_{11}O_7)_2Ca$	$NaH_2PO_4$	$H_2O$	$(C_6H_{11}O_7)_2Ca$	$NaH_2PO_4$	$H_2O$	Composizione del residuo
1	2.86	—	97.14	—	—	—	$(C_6H_{11}O_7)_2Ca$
2	3.00	2.70	94.30	21.67	21.98	76.35	»
3	3.11	4.01	92.88	73.10	21.68	5.22	$[(C_6H_{11}O_7)_2Ca \cdot NaH_2PO_4 \cdot 2H_2O]$
4	3.41	4.11	92.48	51.80	16.52	31.68	»      »      »
5	3.87	7.32	88.81	26.35	12.08	61.57	»      »      »
6	4.03	9.77	86.20	31.35	14.37	54.28	»      »      »
7	4.45	14.07	81.48	49.06	18.86	32.08	»      »      »
8	5.81	21.61	72.88	62.60	22.96	15.10	»      »      »
9	6.85	33.20	59.95	54.45	26.54	19.01	»      »      »
10	7.26	41.62	51.12	9.33	63.24	27.43	$NaH_2PO_4 \cdot 2H_2O + [(C_6H_{11}O_7)_2Ca \cdot NaH_2PO_4 \cdot 2H_2O]$
11	6.97	42.28	50.75	7.68	61.92	30.40	»
12	4.49	43.69	51.82	1.05	69.41	29.54	$NaH_2PO_4 \cdot 2H_2O$
13	2.55	44.54	52.91	0.85	64.87	34.28	»
14	—	46.00	54.00	—	—	—	—

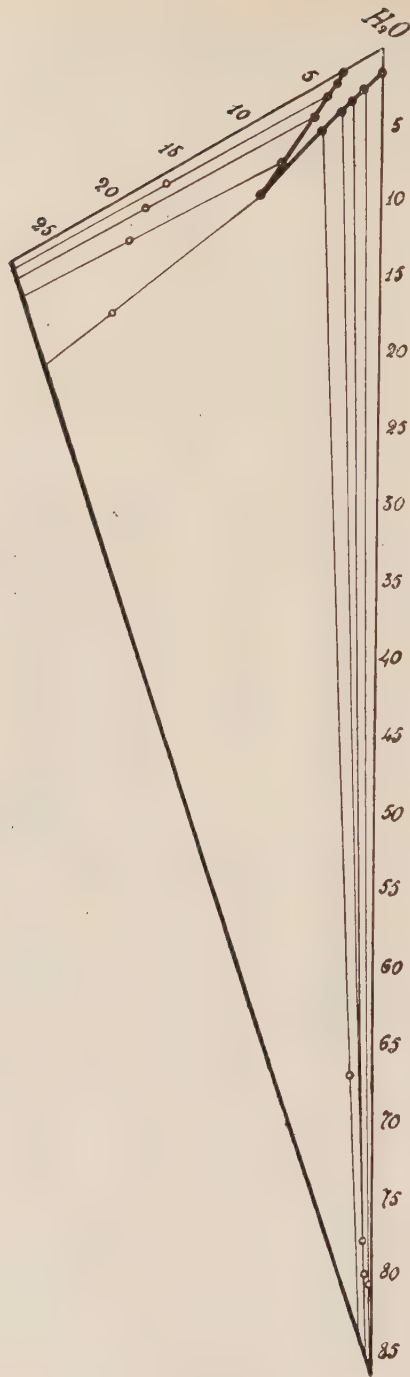


Fig. 2.



II.

Sistema :



TABELLA II.

Soluzione				Residuo			
N.	$(C_6H_{11}O_7)_2Ca$	$As_2O_3$	$H_2O$	$(C_6H_{11}O_7)_2Ca$	$As_2O_3$	$H_2O$	Composizione del residuo
I	3.29	—	97.71	—	—	—	$(C_6H_{11}O_7)_2Ca$
2	3.45	0.13	97.42	16.21	0.57	84.22	»
3	4.21	0.96	95.83	16.36	0.86	82.78	»
4	4.92	1.69	93.39	17.65	1.77	80.58	»
5	6.57	2.56	90.87	33.65	1.84	64.51	»
6	7.58	3.45	88.97	19.04	3.02	77.94	»
7	9.29	4.97	85.74	20.12	7.34	72.54	$(C_6H_{11}O_7)_2Ca + As_2O_3$
8	4.47	3.05	92.48	1.60	66.41	31.99	$As_2O_3$
9	3.12	2.55	94.33	0.72	77.80	21.48	»
10	2.35	2.25	95.40	0.20	83.13	16.67	»
11	1.56	2.17	96.27	0.65	79.72	19.63	»
12	—	1.78	98.22	—	—	—	»

Nella tabella II e nel diagramma II sono riportate le composizioni delle soluzioni e dei corpi di fondo stabilite in base al dosaggio ossidimetrico del calcio ed iodometrico dell'anidride arseniosa.

La solubilità del gluconato viene apprezzabilmente accresciuta per effetto dell'anidride arseniosa, ed infatti con il 5% di anidride arseniosa si riesce ad ottenere una soluzione contenente 9,29% di gluconato.

La quantità di anidride arseniosa in questa soluzione è però troppo elevata rispetto alle dosi massime somministrabili, e pertanto non è opportuno ricorrere ad essa per aumentare la solubilità del gluconato di calcio.

**Chimica.** — *Proprietà delle soluzioni di cloruro di calcio ed urea*<sup>(1)</sup>. Nota di F. DE CARLI presentata<sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

Da alcuni anni sono stati introdotti nella pratica farmaceutica numerosi preparati a base di cloruro di calcio nei quali questo sale si trova associato ad altre sostanze, generalmente organiche, aventi lo scopo di esaltarne l'azione terapeutica e di attenuare gli inconvenienti cui può dar luogo la somministrazione del cloruro di calcio per via ipodermica.

Tra questi prodotti ha acquistato una certa diffusione l'Afenil, preparato per la prima volta dalla casa Knoll & C.<sup>(3)</sup>, e costituito di cloruro di calcio ed urea nel rapporto molecolare 1 : 4. Nelle rivendicazioni del brevetto sopra citato è detto che l'urea forma un composto con il cloruro di calcio, di azione più efficace di quella del semplice cloruro. La sostanza, cui fu attribuita la formula  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ , possiede un sapore meno sgradevole del cloruro di calcio ed è meno igroscopica di quest'ultimo. Viene impiegata contro l'asma, la febbre da fieno, l'orticaria, i fenomeni anafilattici. Si somministra preferibilmente per via ipodermica endovenosa o sottocutanea, in soluzione acquosa al 10 %<sup>(4)</sup>. Le notizie che finora si conoscono su questo prodotto, e che si trovano riportate anche nei manuali farmaceutici, sono però alquanto scarse e si limitano per la maggior parte al contenuto dei brevetti Knoll.

Una maggiore conoscenza delle condizioni nelle quali il composto prende origine, ed un esame delle sue proprietà fisiche potrebbe forse essere utile per chiarire il suo comportamento dal punto di vista farmaceutico. Ho ritenuto pertanto opportuno istituire una serie di ricerche in proposito e di esse do notizia nella presente Nota.

Nelle tabelle I e II sono contenuti i dati relativi alle isoterme di solubilità a 11° e 25° del sistema  $\text{CaCl}_2\text{—CO}(\text{NH}_2)_2\text{—H}_2\text{O}$ .

Nelle soluzioni e nei residui fu dosato il calcio ossidimetricamente, il cloro col Volhard, e l'urea per via gasvolumetrica mediante ossidazione con ipobromito.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) D. R. P. 306-804, 8 settembre 1916; 11 luglio 1918.

(4) «Berl. Klin. Wochschr.», 54, 1030-1032; «Therapie d. Gegenwart», 66, 241-43 (1925); «Münch. med. Wochschr.», 73, 1160-61; 1170-71 (1926); «Journ. Am. Pharm. Ass.», 18, 894 (1929).

TABELLA I.

$\text{CaCl}_2\text{—CO(NH}_2)_2\text{—H}_2\text{O}$  *Isoterma a 11°*

Composizione della soluzione			Composizione del residuo			
$\text{CaCl}_2$ %	$\text{CO(NH}_2)_2$ %	$\text{H}_2\text{O}$ %	$\text{CaCl}_2$ %	$\text{CO(NH}_2)_2$ %	$\text{H}_2\text{O}$ %	Composizione fase solida
38.80	—	61.20	—	—	—	$\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$
39.35	5.90	54.75	47.77	1.05	50.98	»
39.90	9.50	50.60	48.50	2.50	51.00	» + $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO(NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
32.55	17.59	49.86	31.43	33.11	35.46	$\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO(NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
28.75	16.51	54.74	30.07	30.44	30.45	»
23.56	26.77	50.33	29.39	43.25	27.36	»
20.59	32.72	46.69	27.19	55.77	17.04	»
13.18	47.75	39.07	14.52	65.80	19.68	» + $\text{CO(NH}_2)_2$
12.78	47.31	39.91	7.38	70.26	22.36	$\text{CO(NH}_2)_2$
8.02	45.40	46.58	5.50	60.61	33.89	»
—	40.84	—	—	—	—	»

TABELLA II.

$\text{CaCl}_2\text{—CO(NH}_2)_2\text{—H}_2\text{O}$  *Isoterma a 25°*

Composizione della soluzione			Composizione del residuo			
$\text{CaCl}_2$ %	$\text{CO(NH}_2)_2$ %	$\text{H}_2\text{O}$ %	$\text{CaCl}_2$ %	$\text{CO(NH}_2)_2$ %	$\text{H}_2\text{O}$ %	Composizione fase solida
45.97	—	54.03	—	—	—	$\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$
45.22	4.52	50.26	55.70	1.85	42.45	»
45.03	6.66	48.31	52.50	4.55	42.95	»
43.99	13.27	42.74	44.55	21.18	34.27	» + $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO(NH}_2)_2$
38.57	17.42	44.21	36.10	35.89	28.01	$\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO(NH}_2)_2$
30.86	23.34	45.80	31.46	37.15	31.09	»
27.11	29.77	42.71	29.49	49.48	21.03	»
21.60	40.76	37.64	25.73	49.95	24.32	»
19.24	44.45	36.31	26.06	56.70	17.24	»
14.95	53.85	31.20	22.51	62.45	15.04	» + $\text{CO(NH}_2)_2$
14.05	53.73	32.22	8.83	70.43	20.74	$\text{CO(NH}_2)_2$
12.54	54.57	32.89	9.01	65.84	25.15	»
11.04	55.29	33.67	3.51	85.81	10.68	»
—	46.92	53.18	—	—	—	»

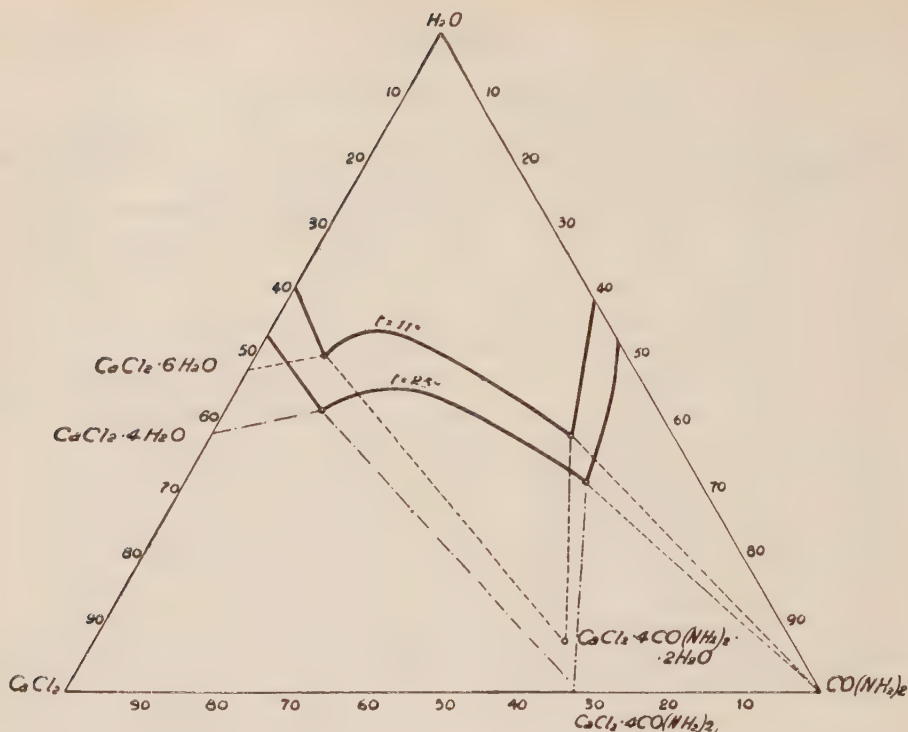


Fig. 1.

La figura 1 riproduce i diagrammi di solubilità dai quali si ricava che dalle soluzioni sature di cloruro di calcio ed urea si separa a 25° il composto:  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ ; e a 11°  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ .

L'aggiunta di urea alla soluzione satura di cloruro di calcio non determina apprezzabili variazioni nella solubilità di quest'ultimo, mentre l'aggiunta di cloruro alla soluzione satura di urea provoca in un primo tempo un sensibile aumento di solubilità.

Per lenta evaporazione, alla temperatura ambiente (12°-16°), di soluzioni contenenti una grammomolecola di cloruro e quattro di urea si ottiene il sale biidrato in cristalli a contorno pseudo-esagonale, bene sviluppati. Il dosaggio del calcio, del cloro e dell'azoto sopra questi cristalli ha dato i seguenti risultati:

per $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	Ca	Cl	N
calcolato %	10.33	18.31	28.93
trovato %	10.31	18.29	28.89.

Resta pertanto confermata la composizione dedotta dall'isoterma di solubilità.

Ho ritenuto inoltre opportuno esaminare alcune proprietà fisiche delle soluzioni di cloruro di calcio ed urea per cercare di trarre indizi sopra l'esistenza del complesso in soluzione.

Dallo studio delle proprietà fisiche (viscosità, indice di rifrazione ecc.) non si può sperare, come è noto, di arrivare a stabilire la composizione di complessi in soluzione, ma l'esame delle loro variazioni in funzione della concentrazione e della temperatura, è talvolta sufficiente a svelare associazioni tra le molecole delle sostanze disciolte. Queste misure riguardano pertanto solo il lato qualitativo della questione.

In quel che segue riporto i valori di indice di rifrazione, potere rifrangente, volume specifico e viscosità a diverse temperature, per soluzioni nelle quali varia in modo continuo il rapporto molecolare cloruro-urea, ma rimane costante la concentrazione molecolare del soluto totale. (4 mol/litro).

L'indice di rifrazione venne misurato col rifrattometro ad immersione per la riga D del sodio, la densità per pesata, e la viscosità con l'apparecchio di Ostwald.

Nella tabella III sono riportati i valori di indice di rifrazione, potere rifrangente, (calcolato con formula di Gladstone e Dale), e volume specifico. Nelle ultime due colonne figurano le variazioni di volume specifico calcolate con la nota formula:

$$\frac{\frac{100}{d}}{\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2} + \frac{p_3}{d_3}}$$

nella quale  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , rappresentano rispettivamente le densità della soluzione, del solvente, e dei solidi disciolti, e  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , la composizione percentuale della soluzione.

Il potere rifrangente segue perfettamente la regola del miscuglio, come appare dal diagramma della figura 2. Nei riguardi del volume specifico si nota che i due componenti puri si sciolgono con dilatazione un po' maggiore di quella che si manifesta nelle soluzioni miste.

La differenza è però troppo piccola per prestarsi ad interpretazioni intorno ad eventuali associazioni tra le molecole delle sostanze disciolte. Se queste si verificassero in misura apprezzabile sarebbero certamente messe meglio in evidenza dalla viscosità. Nella tabella IV sono appunto riportate le viscosità e fluidità sperimentali e calcolate per le temperature di 11° e 25°.



TABELLA III.

$\text{CaCl}_2 \%$	$\text{CO}(\text{NH}_2)_2 \%$	$\text{H}_2\text{O} \%$	$n_{110}$	$\left( \frac{n_{110} - 1}{d_{110}} \right) 10^2$	$\left( \frac{1}{d_{110}} \right) 10^2$	$\left( \frac{1}{d_{350}} \right) 10^2$	$\left[ \frac{100}{d} + \frac{p_2}{d_2} + \frac{p_3}{d_3} \right] 110$	$\left[ \frac{100}{d} + \frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2} + \frac{p_3}{d_3} \right] 250$
44.39	—	55.61	1.41719	33.44	77.21	77.81	1.020	1.026
22.19	12.00	65.81	1.39333	33.61	85.45	85.60	1.005	1.007
18.86	13.81	67.33	1.38810	33.79	87.08	87.46	1.010	1.012
16.64	15.01	67.35	1.38672	33.91	87.65	87.87	1.017	1.018
11.88	18.01	70.91	1.38018	34.21	89.99	90.96	1.006	1.015
8.87	19.21	71.92	1.37739	34.33	90.98	91.35	1.007	1.007
4.43	21.61	73.96	1.37254	34.65	93.03	93.18	1.009	1.009
2.21	22.81	74.98	1.36992	34.72	93.86	94.23	1.008	1.010
—	40.18	59.82	1.36688	34.95	95.17	95.28	1.058	1.059

TABELLA IV.

mol. % CaCl <sub>2</sub>	mol. % CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>	$\eta_{11}^0$ trov.	$\eta_{11}^0$ calc.	$\eta_{25}^0$ trov.	$\eta_{25}^0$ calc.	$\varphi_{11}^0$ trov.	$\varphi_{11}^0$ calc.	$\varphi_{25}^0$ trov.	$\varphi_{25}^0$ calc.
4.0	—	0.04427	—	0.03059	—	22.58	—	32.66	—
2.0	2.0	0.02426	0.02640	0.01745	0.01851	41.22	37.87	57.30	54.02
1.7	2.3	0.02203	0.02423	0.01561	0.01703	45.38	41.25	64.02	58.71
1.5	2.5	0.02143	0.02284	0.01516	0.01603	46.66	43.73	65.92	62.38
1.0	3.0	0.01865	0.01963	0.01337	0.01389	53.59	52.92	74.79	71.99
0.8	3.2	0.01750	0.01843	0.01245	0.01308	57.12	54.23	80.31	76.45
0.4	3.6	0.01530	0.01619	0.01133	0.01153	65.32	61.75	88.22	86.73
0.2	3.8	0.01480	0.01512	0.01064	0.01081	67.55	66.13	93.98	92.50
—	4.0	0.01414	—	0.01012	—	70.72	—	98.77	—

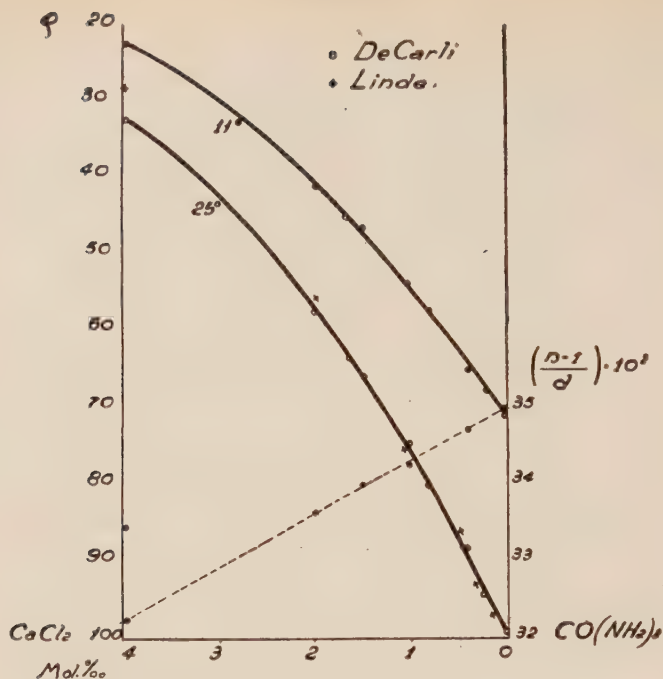


Fig. 2.

La figura 2 riproduce le due isoterme di fluidità a 11° e 25° nelle quali si nota una curvatura che può deporre a favore di fenomeni di dissociazione. Infatti casi analoghi si conoscono già per soluzioni di elettroliti e generalmente sono stati interpretati come indici di dissociazione nelle molecole delle sostanze presenti in soluzione <sup>(1)</sup>.

Si dovrebbe pertanto concludere che nelle soluzioni miste di cloruro di calcio ed urea non esistono associazioni rivelabili con le proprietà fisiche prese in esame. E che così sia lo conferma il fatto che le fluidità delle soluzioni miste sono molto prossime a quelle che si ricavano dalle misure di Linde <sup>(2)</sup> per soluzioni di solo cloruro di calcio. Nel diagramma della figura 2 si vede infatti che i valori di Linde coincidono quasi con i miei.

Il comportamento terapeutico delle soluzioni di cloruro di calcio ed urea non sembra pertanto attribuibile a proprietà specifiche del composto:  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , ma probabilmente all'influenza che potrebbe avere l'urea sopra le cause che determinano gli inconvenienti che talvolta accompagnano la somministrazione ipodermica del cloruro di calcio. Ho notato ad esempio che l'urea ha notevole influenza sul Ph. La soluzione al 10% di Afenil, contenente 7.904% di  $\text{CaCl}_2$  ha Ph 7.6 mentre la soluzione contenente la stessa quantità di cloruro di calcio ha Ph = 7.

(1) W. SUTHERLAND, «Phil. Mag.», (5), 50, 481 (1900); M. P. APPLEBEY, «J. Chem. Soc.», 97, 2000 (1910); A. J. RABINOVICH, «J. Am. Chem. Soc.», 44, 954 (1922).

(2) «Z. Elektrochem.» 29, 163 (1923).

**Mineralogia.** — *Granato, vesuviana, ilmenite e titanite del Monte Rosso di Verra (Gruppo del Monte Rosa)* <sup>(1)</sup>. Nota di T. CARPANESE, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio G. BOERIS.

# I. GRANATO E VESUVIANA.

In lavori precedenti esposi i risultati degli studi sull'epidoto e la proclorite dei giacimenti del Monte Rosso di Verra <sup>(3)</sup>. Un cenno su di questi e sui minerali che vi si trovano è contenuto nella prima Nota sull'epidoto, alla quale rimando, riservandomi di trattare diffusamente di tali giacimenti e delle rocce che li costituiscono in altro lavoro di prossima pubblicazione. Per completare intanto la serie di studi particolari sui minerali che si trovano in elementi distinti e ben formati al Monte Rosso di Verra, riferisco ora sui cristalli di granato, vesuviana, titanite ed ilmenite di tale località. Per lo studio della vesuviana e dell'ilmenite ho potuto disporre anche di alcuni esemplari gentilmente offertimi dal prof. Boeris, che vivamente ringrazio.

## *Granato.*

Il granato, oltre che in noduli ed in lenti compatte di granatite, trovansi anche in cristalli, che s'accompagnano generalmente alla clorite. I cristalli sono per lo più di piccole dimensioni, semi trasparenti, di color rosso-giacinto fino a rosso-bruno, irregolarmente formati. Talvolta però si trovano dei bei cristalli, più regolari e di maggiori dimensioni. Sono per lo più costituiti dalla combinazione dell'icositetraedro {211} col rombodecaedro. La prima forma, più sviluppata, si riconosce anche perchè le sue facce sono più o meno striate, mentre quelle più piccole del rombodecaedro sono sempre lisce e lucenti. Si osservano talvolta anche faccette dell'esacisottaedro {321}.

Le misure in base alle quali furono determinate queste forme sono le seguenti :

angoli misurati	val. calcol.	misure	limiti	medie
(110) (211)	30°.	22	29°.43' - 30°.9'	29°.59'
» (321)	19.6	6	18.53 - 19.22	19.8

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) T. CARPANESE, *L'epidoto del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)*, Nota I, Roma 1925, «Rend. R. Accad. Lincei», II, 276; Nota II, Roma 1925, id. II, 349; *La proclorite del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)*, Roma 1929, id., IX, 77.

Alcuni cristalli sono caratteristici per il loro abito pseudo-prismatico dovuto allo sviluppo delle facce della zona  $[\bar{1}11]$  che sono molto allungate secondo l'asse della zona stessa. Deformazioni di questo tipo sono note anche per i cristalli di granato di analoghi giacimenti, come quelli di Val d'Ala.

L'analisi quantitativa ha dato i seguenti risultati:

analisi		rapporti molecolari			
SiO <sub>2</sub>	37.66 %	0.6246	}	0.6342	3.01
TiO <sub>2</sub>	0.77	0.0096			
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	15.50	0.1517	}	0.2110	1
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	9.47	0.0593			
FeO	2.00	0.0278	}	0.6505	3.08
CaO	34.51	0.6152			
MnO	0.53	0.0075			
<hr/>					
100.44					

Come si vede, la composizione chimica corrisponde bene alla formula generale ammessa per i granati:  $M_3'' M_2''' (SiO_4)_3$ .

Se in base ai rapporti molecolari si calcolano le proporzioni dei vari tipi fondamentali di ortosilicati di cui si ritengono generalmente costituite le miscele isomorfe della famiglia dei granati <sup>(1)</sup>, si ha la seguente composizione:

grossularia	66.31 %
andradite	28.11
almandino	4.39
spessartina	1.19

trascurando un piccolo residuo di calce e silice.

Il granato del Monte Rosso è dunque essenzialmente una miscela di grossularia e andradite, con percentuali minori di almandino e spessartina.

Come è noto, nella famiglia dei granati si ha miscibilità completa tra grossularia e andradite, e cioè la sostituzione del ferro trivalente all'alluminio può avvenire in tutte le proporzioni. Invece fra queste miscele binarie e quelle, pure a miscibilità completa, almandino-spessartina e almandino-piropo, si ha miscibilità limitata.

(1) H. E. BOEKE-W. EITEL, *Grundlagen der physikalisch-chemischen Petrographie*, II ed., p. 289 e seg.



Il punto rappresentativo del granato del Monte Rosso, determinato dai valori:  $\frac{\text{Al}_2\text{O}_3}{\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3} = 62\%$  e  $\frac{\text{FeO} + \text{MnO}}{\text{FeO} + \text{MnO} + \text{CaO}} = 7\%$ , cade, nel diagramma in cui Boeke rappresenta la miscibilità nel sistema grossularia-andradite da una parte e piropo-almandino-spessartina dall'altra, entro i limiti di miscibilità dati da questo autore, nel campo dei granati ricchi di calcio.

Il peso specifico di questo granato, determinato col picnometro, è 3.635. L'indice di rifrazione per la luce del sodio, misurato col totalriflettometro di Abbe-Pulfrich, risultò 1.7824. Tale indice venne confermato col metodo di Becke, adoperando come liquido di confronto una soluzione di zolfo nell'iioduro di metilene.

Calcolando, in base al peso specifico ed all'indice di rifrazione che Ford <sup>(1)</sup> attribuisce a ciascun tipo fondamentale di granato, i valori di queste costanti fisiche per il granato del Monte Rosso, si ottengono i seguenti risultati:

$$p. \text{ spec. calc.} = 3.631 \quad n \text{ calc.} = 1.785$$

che, come si vede, sono in buon accordo coi valori misurati.

Granati di composizione analoga a quello studiato si trovano fra quelli dei classici giacimenti delle rocce verdi di Val d'Ala, ai quali i giacimenti del Monte Rosso rassomigliano per molti caratteri. Questa analogia si riscontra specialmente per il granato rosso-giallognolo del giacimento della Testa Ciarva in Val d'Ala analizzato da Grill <sup>(2)</sup> e per quello rosso-bruno dell'Alpe della Mussa, pure in Val d'Ala, analizzato da Jannasch <sup>(3)</sup>.

(1) W. E. FORD, *A Study of the Relations existing between the Chemical, Optical and other Physical Properties of the Members of the Garnet Group*. « Amer. Journ. of Science », 1915, 33, XL.

(2) E. GRILL, *Quarzo, granato, clorite de Val d'Ala*, « Atti della Soc. It. di Sc. Nat. », Milano, LXI, 234, 1922.

(3) In C. KLEIN, *Optische Studien am Granat*, « Neus Jahrb. f. Min. », I, 121, 1883. Riporto le due analisi:

	Grill	Jannasch
SiO <sub>2</sub>	36.52 %	38.94 %
TiO <sub>2</sub>	1.92	—
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	15.12	17.42
Mn <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.41	—
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10.22	7.62
FeO	0.25	—
MnO	—	0.56
CaO	35.42	34.76
MgO	0.17	0.37
Na <sub>2</sub> O	—	0.34
H <sub>2</sub> O a — 110°	0.12	—
H <sub>2</sub> O a + 110° (p.arrov.)	0.15	0.51
	100.30	100.52

*Vesuviana.*

Nei giacimenti del versante settentrionale del Monte Rosso si trova la vesuviana come componente delle rocce. Qua e là si osservano anche dei noduli quasi esclusivamente costituiti da aggregati granulari di vesuviana, di color verde-giallastro chiaro. Il prof. Boeris ha invece raccolti in analoghi giacimenti del versante meridionale alcuni cristalli di vesuviana di color bruno-cioccolata, e me li ha gentilmente offerti per lo studio.

Questi cristalli si trovano assieme a clorite e calcite. Sono semiopachi, con facce regolari e lucenti. Hanno abito prismatico poco allungato secondo l'asse  $z$ , con i prismi  $m \{110\}$  ed  $a \{100\}$  prevalenti. Il primo è sempre più sviluppato del secondo. Nella zona dei prismi verticali si osservano anche le facce della  $f \{210\}$  ed altre faccette prossime a quelle di  $m \{110\}$ ; però in genere queste faccette non si possono individuare con certezza, a causa della forte striatura delle facce della  $m \{110\}$ , che producono immagini multiple. Soltanto la forma  $\{650\}$  si è presentata in un cristallo con due faccette ben distinte e lucide, con le quali ottenni le seguenti misure:

$$(110) (650) \quad 5^{\circ}.7'; 5^{\circ}.14' \text{ media } 5^{\circ}.10' \quad \text{calc. } 5^{\circ}.11 \frac{1}{2}'.$$

È questa una forma rara, che fu osservata solo da Mats Weibull nella vesuviana di Tennberget (Svezia) <sup>(1)</sup>.

I cristalli terminano sempre con una larga faccia di base, attorno alla quale si trovano le facce nitide e lucenti delle diverse piramidi. Tali facce sono sempre piccole; fra di esse sono un po' più sviluppate delle altre quelle della  $s \{311\}$  e della  $p \{111\}$ .

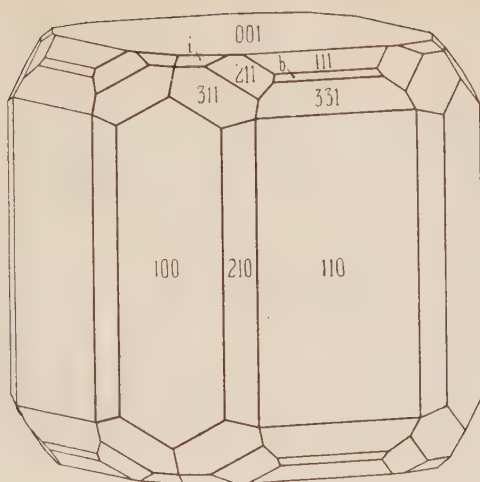
L'abito di questi cristalli è rappresentato dalla figura.

Le forme complessivamente osservate sono le seguenti:

$$a \{100\}, m \{110\}, f \{210\}, \{650\}, c \{001\}, p \{111\}, b \{221\}, t \{331\}, \\ s \{311\}, i \{312\}, z \{211\}.$$

Per l'angolo  $(001) (111)$  si è ottenuto, come media di sei misure, il valore di  $37^{\circ}.15'$ , molto vicino a quello  $(37^{\circ}.14 \frac{1}{2}')$  calcolato con la costante  $\frac{c}{a} = 0.53754$  data da Zepharovich e generalmente riportata nei trattati. Anche i valori ottenuti nelle misure degli angoli fra la base e le altre piramidi concordano con i valori calcolati in base a tale costante, come si può vedere nella seguente tabella, in cui riassumo i risultati delle misure eseguite.

(1) MATS WEIBULL, *Studien über Vesuvian*. « Zeitschr. f. Kryst. », XXV, I, 1896.



b 221

i 312

angoli mis.	val. calc. (Zepharovich)	num. delle mis.	limiti	medie
(001) (111)	37°.14 1/2'	6	37°.5'-37°.19'	37°.15'
» (221)	56.40	1	—	56.34
» (331)	66.19 1/2	4	66.15-66.30	66.19
» (211)	50.14 1/2	2	50.8-50.14	50.12
» (311)	59.32	8	59.23-59.40	59.30
» (312)	40.22	6	40.15-40.24	40.20
(100) (210)	26.34	6	26.21-26.47	26.38
» (211)	46.34	1	—	46.41
(110) (331)	23.40 1/2	4	23.31-23.35	23.34
» (221)	33.20	1	—	33.19
» (210)	18.26	3	18.16-18.43	18.31
» (650)	5.11 1/2	2	5.7-5.14	5.10
(210) (211)	39.46 1/2	1	—	39.34
(111) (311)	29.31	4	29.23-29.33	29.29
» (211)	18.6	1	—	17.58
» (312)	16.50	2	16.39-16.46	16.44
(311) (131)	45.21	1	—	45.17
(312) (132)	33.40	2	33.26-33.32	33.30

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il doloroso annunzio della morte dei Soci CANTONE e DONATI e rievoca brevemente la figura dei due Insigni Studiosi scomparsi, esprimendo il voto che in una delle prossime sedute Essi vengano degnamente commemorati.

Annuncia quindi che assiste alla seduta il prof. Wagner di Berlino, membro dell'Accademia delle Scienze prussiana, al quale porge il cordiale saluto dei presenti.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BIANCHI offre in omaggio all'Accademia il III vol. delle Opere di G. Schiaparelli pubblicato a cura della Specola di Brera ed il 5° fasc. delle Pubblicazioni del R. Osservatorio di Merate.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono segnalando la relazione su « Le onoranze a G. B. Morgagni », il vol XI dell'« Annuario della R. Stazione Chimico-Agraria di Torino », il vol. IV del « Dizionario di Merceologia e di Chimica applicata » del prof. G. V. Vilevecchia.

## PRESENTAZIONE DI NOTE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci BETTI, GARBASSO, GIORGI, GUIDI, SEVERI.

---

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 3 aprile 1932*

- ALDRICH J. M. — North American two-winged flies of the genus *Spathimeigenia*, with descriptions of five new species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume LXXX). Washington, 1931. 8°, pp. 1-10.
- Annuario della R. Stazione Chimico-Agraria di Torino. Vol. XI, 1929-1931. Torino, 1932. 8°, pp. 1-785.
- BARTSCH PAUL. — A new marine shell of the genus *Xenophoda* from Florida (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1931. 8°, pp. 1-2.
- BELLINCIONI GIOVANNI. — Laghi artificiali per esclusiva utilizzazione irrigua. (Estr. dagli « Atti del Sindacato Provinciale Fascista Ingegneri di Milano ». N. 1, 1932). Milano, 1932. 4°, pp. 1-41.
- CASTALDI LUIGI. — Scritti biologici. Vol. VI. Siena, 1931. 8°, pp. 1-382.
- CECCHINI GINO. — Ricerche sulla frequenza delle grandezze assolute delle stelle delle diverse classi spettrali. Parte II. Distribuzione delle grandezze assolute. (Pubblicazioni del R. Osservatorio Astronomico di Merate (Como). N. 5). Milano, Ulrico Hoepli, 1931. 4°, pp. 1-112.
- CECCHINI GINO. — Sulla grandezza assoluta delle Cefeidi. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazion. dei Lincei ». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XIII, pp. 874-878). Roma, 1931. 8°.
- CECCHINI GINO. — Sulla teoria delle variabili fondata sui postulati di Ritz-La Rosa. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. V, N. 4). Pavia, 1931. 8°, pp. 1-19.
- CERRUTI ATTILIO. — L'Istituto demaniale di Biologia marina di Taranto. (Ministero delle Finanze). Taranto, 1932. 4°, pp. 1-44.
- DIKMANS G. — A new nematode worm, *Viannaia bursobscura*, from the opossum, with a note of other parasites of the opossum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXIX). Washington, 1931. 8°, pp. 1-4.
- E. S. S. — Obituary notice of William Dobinson Halliburton (with portrait) 1860-1931. (From the « Proceedings of the Royal Society ». Ser. B. Vol. CIX, pp. IX-XI). London, 1932. 8°.
- FIorentini CARLO. — Giovanni Battista Morgagni. Primo saggio di bibliografia sintetica. Bologna, 1930. 8°, pp. 1-66.
- GALLARDO ANGEL. — Deux nouvelles espèces de « Pogonomyrmex » de la République Argentine (Hymenoptères Formicidés). (Extr. de la « Revista del Museo de la Plata ». Tomo XXXIII, pp. 185-188). Buenos Aires, 1931. 8°.
- GALLARDO ANGEL. — Doctor Augusto Forel. (Extr. de la « Revista de la Sociedad Entomologica Argentina ». N. XVII, pp. 337-342). Buenos Aires, 1931. 8°.
- GALLARDO ANGEL. — Oruga mimética del rosal. (Extr. de la « Revista de la Sociedad Entomologica Argentina ». N. IV, 1931, pp. 183-184). Buenos Aires, 1931. 8°.
- HOWEL A. BRAZIER and STRAUS WILLIAM L. — The brachial flexor muscles in primates. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume LXXX). Washington, 1931. 8°, pp. 1-31.



- JULIA GASTON. — Principes géométriques d'analyse. Deuxième partie. Paris, 1932. 8°, pp. I-VII, I-119.
- KLINKERFUES W. — On a Great Meteor Shower of the Year 524 A D., and its Probable Connection with the Comet of Biela and with that of the Year 1162. (Reprinted from «Popular Astronomy». Vol. XXXIX, pp. 573-583). Göttingen, 1931. 8°.
- MACCALLUM G. A. — Four new species of trematode worms of the subfamily *Onchocotylinae*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIX). Washington, 1931. 8°, pp. 1-8.
- MESSEDAGLIA LUIGI — Giambattista Morgagni. Discorso pronunciato nel teatro comunale di Forlì il 24-5-1931. Forlì, 1931. 4°, pp. 1-15.
- MOISSEIEV N. — Ueber einige Grundfragen der Theorie des Ursprungs der Kometen, Meteore und des kosmischen Staubes (Kosmogonische Studien) (Publications de l'Institut Astrophysique. Vol. V, fasc. I). Moscou, 1930. 8°, pp. 1-87.
- MONTÉL PAUL. — Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes. Paris, 1932. 8°, pp. I-XIV, I-116.
- MORGAGNI JO. BAPTISTA. — Epistolae aemilianae quatuordecim historico-criticae de antiquitatibus et geographia non modicae partis provinciae Aemiliae. Nuova edizione con introduzione di Paolo Amaducci. Forlì, 1931. 4°, pp. I-XXVII, I-254.
- MORGAGNI GIAMBATTISTA. — Le epistole emiliane di G. M. volgarizzate per la prima volta da Ignazio Bernardini. Forlì, 1931. 4°, pp. I-XI, I-215.
- Le onoranze a G. B. Morgagni. Forlì, 24 maggio 1931. Siena, 1931. 8°, pp. 1-150.
- POLLACCI GINO. — Rassegna sull'attività del laboratorio crittogamico di Pavia. (Osservatorio Fitopatologico per le provincie di Cremona, Parma, Pavia e Piacenza) durante l'anno 1931. (Estr. dagli «Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia». Serie IV, vol. III). Pavia, 1932. 4°, pp. 1-14.
- RAKSHIT JITENDRA NATH. — Association theory of solution and inadequacy of dissociation theory. Calcutta, 1930. 8°, pp. 1-297.
- RESSER CHARLES ELMER. — A new middle Cambrian Merostome Crustacean. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIX). Washington, 1931. 8°, pp. 1-4.
- REVERSI CARLO MERLIN. — Giambattista Morgagni prosatore e poeta. Faenza, 1931. 8°, pp. 1-48.
- RILEY J. H. — A second collection of birds from the provinces of Yunnan and Szechwan China made for the national geographic Society by Dr. Joseph F. Rock. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXX). Washington, 1931. 8°, pp. 1-91.
- SCHIAPARELLI G. V. — Le opere di G. V. Schiaparelli pubblicate per cura della R. Specola di Brera. Tomo III. Milano. 1931. 4°, pp. 1-472.
- SHAPLEY HARLOW, OPIK ERNEST J. and SAMUEL L. BOOTROYD. — The Arizona expedition for the study of meteors. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XVIII, pp. 16-23). S. l., 1932. 8°.
- VILLAVECCHIA G. VITTORIO. — Dizionario di merceologia e di chimica applicata. Ediz. V. Vol. IV, ed indice generale alfabetico. Milano, Ulrico Hoepli, 1932. 8°, pp. 1-1208.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Fascicolo del 17 aprile 1932 (Anno X)*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Chimica.** — *Sui solfosali di rame e ferro*<sup>(1)</sup>. Nota preliminare<sup>(2)</sup>  
del Corrisp. L. CAMBI e di L. SZEGÖ.

Ci siamo già occupati del solfosale di Schneider  $\text{KFeS}_2$ <sup>(3)</sup> che si ottiene per fusione di ferro ridotto o di composti di ferro con polisolfuro alcalino. Abbiamo determinata la suscettibilità magnetica di questo sale, che a temperatura ambiente risulta  $\chi_A \cdot 10^6 = + 322.6$  cioè corrisponde a 4.3 magnetoni Weiss per ogni atomo di ferro.

Questo risultato interessa in generale per il comportamento magnetico dei composti di ferro ed in particolare per quello dei solfuri di ferro.

Come è noto la pirite, il solfuro ferroso, la calcopirite, sono diamagnetici, mentre la pirrotina, generalmente considerata come soluzione solida di solfo in  $\text{FeS}$ , è ferromagnetica<sup>(4)</sup>.

Il comportamento del solfosale predetto solleva interessanti quistioni sulle relazioni fra magnetismo, struttura del composto e reticolo cristallino.

Noi accennammo già all'ipotesi che il solfosale  $\text{KFeS}_2$  possa considerarsi come un polisolfuro ferroso-ferrico a struttura complessa polinucleare, dalla quale risulterebbero i 4.5 magnetoni Weiss predetti. In seguito a tali

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 17 aprile 1932.

(3) Questi « Rendiconti », 6<sup>a</sup>, XIII, 169, 1931.

(4) WEISS, « Compt. Rend. », 140 (1905) 1333; idem 1532; idem 1587.

nostre osservazioni s'imponeva l'indagine degli altri solfosali del ferro finora trascurati. Lo stesso Schneider aveva descritto  $K_2FeCu_3S_4$  <sup>(1)</sup>, ottenuto in modo analogo al solfosale semplice cui abbiamo accennato.

Ci siamo occupati dapprima dei sali potassici perchè più stabili.

Osservammo anzitutto che il metodo di Schneider non conduce a prodotti a composizione costante. I solfosali ottenuti, ben cristallizzati in grandi prismi tabulari a riflessi metallici, non corrispondono in generale alla composizione su indicata, ma i rapporti fra i componenti variano con le condizioni di esperienza entro i limiti notevoli, e in dipendenza principalmente dal rapporto iniziale Fe : Cu e da quello rispettivo dei due metalli con il polisolfuro alcalino.

Riferiremo in seguito le nostre esperienze e descriveremo la serie dei numerosi termini da noi preparati. Indichiamo in via preliminare che ottenemmo ad es. prodotti che corrispondono a :

I) 1.42 K	:	1 Fe	:	1.97 Cu	:	3.44 S
II) 1.45 K	:	1 Fe	:	2.56 Cu	:	3.44 S
III) 1.63 K	:	1 Fe	:	3.67 Cu	:	4.79 S,

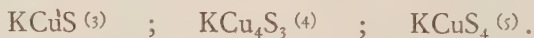
con composizione cioè vicina nei tre casi ai rapporti interi



Come accennammo in ogni singolo caso il prodotto è omogeneo.

L'esame roentgenografico, di cui si occupa il Prof. Adolfo Ferrari, ha dimostrato con roentgenogrammi ben netti che si tratta in ogni caso di prodotti aventi tutti lo stesso reticolo tetragonale col rapporto assiale  $c : a = 1.182$  <sup>(2)</sup>.

Ci troviamo cioè davanti ad un caso di soluzioni solide fra solfosali più semplici che stiamo indagando. Il sale descritto da Schneider non costituisce che un termine della serie delle soluzioni solide che si generano dalle miscele portate a fusione. Le nostre ricerche vennero estese ai solfosali di rame del tipo :



Avvertiamo che i sali del secondo e terzo tipo presentano forme cristalline nettamente diverse da quelle dei solfosali misti di cui ci occupiamo in questa Nota.

(1) SCHNEIDER, « Pogg. Annalen », 460, 136 (1869).

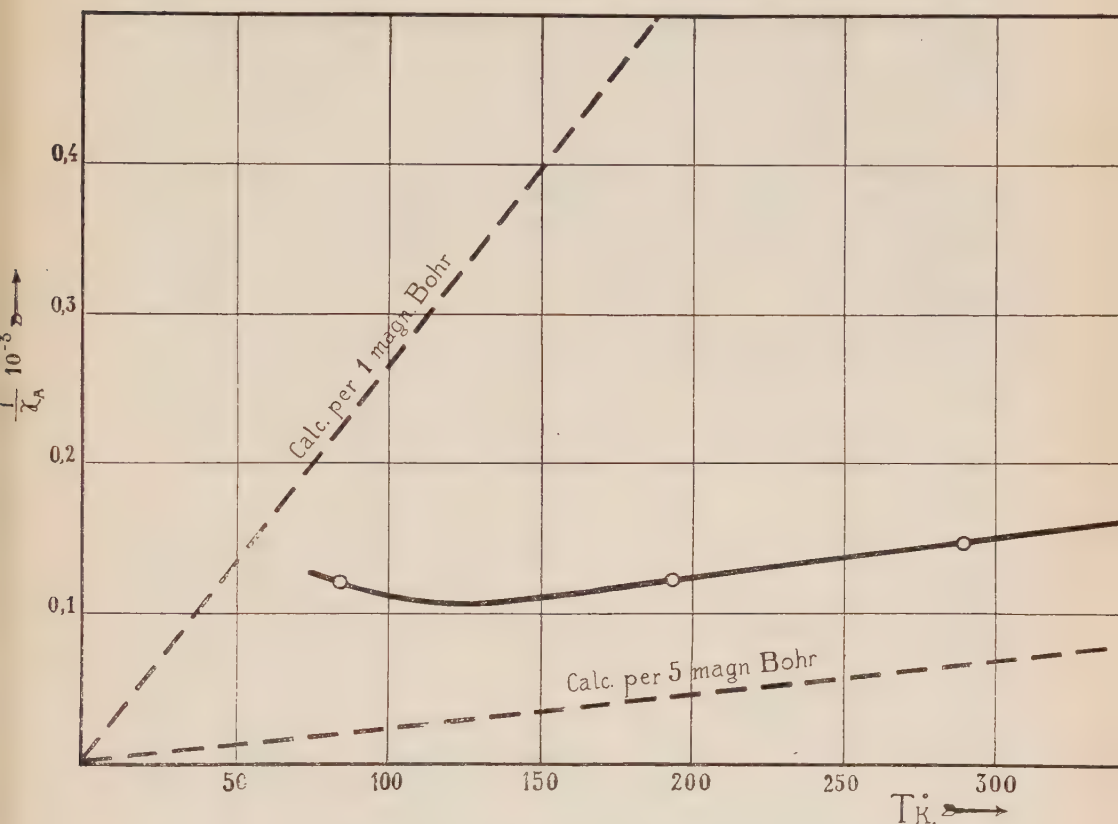
(2) La ricerca roentgenografica verrà pubblicata in seguito.

(3) BODLÄNDER e IDASZEWSKY, « Zeit. Elektrochem. », 11, 181 (1905).

(4) DITTE, « Compt. Rend. », 98, 1429 (1884).

(5) BILTZ e HERMS, « Ber. », 40, 976 (1907).

Parallelamente all'indagine chimica si è svolta quella sul comportamento magnetico. È risultato che i solfosali del tipo  $K_mFeCu_nS_p$  sono paramagnetici, e presentano per l'atomo di ferro suscettibilità analoga a quella di alcuni sali ferrici in cui si ammette presente la struttura dell'ione ferrico.



Variatione della suscettibilità magnetica con la temperatura del solfosale  
1.45 K : 1 Fe : 2.56 Cu : 3.44 S.

Infatti il prodotto II, che è stato particolarmente studiato, presenta valori della suscettibilità da  $+77$  a  $-79^\circ C$ , che, con la formola di Weiss-Curie ed un sufficiente  $\theta = -291$ , corrisponderebbero a 28.1 magnetoni Weiss per 1 Fe.

Alle più basse temperature si ha invece un netto accenno a divergere verso valori più bassi di quelli voluti dall'equazione predetta, come risulta dalla tabella e dal diagramma qui riportati.

Il singolare ed interessante comportamento dei solfosali di ferro e rame ci ha indotto ad esaminare quello di  $KFeS_2$  alle diverse temperature. Questo sale conserva il suo debole paramagnetismo fino a  $-84^\circ C$  per assumere

però già a  $-189^{\circ}\text{C}^{\circ}$  comportamento nettamente diamagnetico. Fatto questo verificatosi finora in pochi casi.

Quindi, il solfosale  $\text{KFeS}_2$  per il suo comportamento magnetico può avvicinarsi alla pirite, al solfuro ferroso, a molti sali ferrosi complessi, mentre i solfosali  $\text{K}_m\text{FeCu}_n\text{S}_p$  richiamano da un lato la pirrotina, dall'altro quei solfosali ferrici in cui si ammette la struttura dell'ione ferrico per il ferro che contengono. Rimane inoltre acquisito che anche nei solfosali di ferro paramagnetici alle basse temperature si manifesta la tendenza ad assumere stati che tendono verso il comportamento diamagnetico.

Aggiungiamo infine, per maggiore chiarimento, che i solfosali di rame da noi esaminati, ad es.  $\text{KCuS}_4$ , risultano diamagnetici, e, come è noto, tali sono anche i solfuri di rame. Le ricerche proseguono.

Ringraziamo il Dott. Aldo Cagnasso che ha collaborato in queste esperienze.

Sostanza	$t^{\circ}\text{C}^{\circ}$	$\chi \cdot 10^6$	$\chi_A \cdot 10^6$
$\text{KFeS}_2$ . . . . .	+ 77	+ 1.956	+ 359.6
	+ 18	+ 1.788	+ 322.6
	— 79	+ 1.546	+ 292.4
	— 189	— 0.960	— 104.0
$\text{K}_{1.45}\text{Cu}_{2.56}\text{FeS}_{3.44} \text{ (I) } . . .$	+ 77	+ 15.61	+ 6145
	+ 17	+ 17.36	+ 6817
	— 79	+ 20.75	+ 8122
	— 189	+ 21.20	+ 8287

(1) Da questi valori, applicando la formola di Weiss-Curie fra  $+77$  e  $-79^{\circ}\text{C}^{\circ}$ , risulta  $\theta = -291$  e  $p = 28.1$  per 1 Fe.



## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Deformazioni di specie superiore e sistemi di forme per una  $V_m$  in  $R_n$ .* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1 - La nozione di « deformazione (metrica) di specie  $k$  » ( $k$  intero  $\geq 2$  qualunque) di una superficie in  $R_n$  euclideo si è naturalmente presentata, in una ricerca sulle condizioni per la deformabilità di una ipersuperficie di  $R_n$ , al Bompiani fino dal 1914 <sup>(2)</sup>. Tale nozione (che in modo ovvio si estende alle varietà qualunque di  $R_n$ ) da lui stesso è stata poi ampiamente investigata, negli anni seguenti, anche nei riguardi delle interessanti relazioni che essa presenta (come accade pel caso classico delle ordinarie deformazioni, o applicabilità, di specie 1) con nozioni proiettive <sup>(3)</sup>.

In alcuni lavori assai più recenti di C. Burstin e W. Mayer <sup>(4)</sup> e miei <sup>(5)</sup>

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) 1 - *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie*, « Rendiconti Lincei » (5) 23, 1914, 1° sem., 126-131.

(3) 2 - *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale*, « Rendiconti Lincei » (5) 24, 1915, 1° sem., 1193-1199. 3 - *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore*, Ibid. 25, 1916, 1° sem., 627-634. 4 - *Les hypersurfaces déformables dans un espace euclidien réel à  $n$  ( $> 3$ ) dimensions*, « Comptes Rendus de l'Acad. » t. 164, 1917, 508-510. 5 - *Determinazione delle superficie integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee*, « Rendiconti Ist. Lombardo », 52, 1919, 610-636. 6 - *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie*, « Rendiconti Lincei », (5) 28, 1919, 2° sem., 254-258 (Nota I) e 317-321 (Nota II); 29, 1920, 1° sem., 11-16 (Nota III) e 30, 1921, 1° sem., 55-59 (Nota IV). 7 - *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà*; Ibid. (6) 5, 1927, 383-389.

(4) 8 - C. BURSTIN e W. MAYER, *Das Formenproblem der  $l$ -dimensionalen Hyperflächen in  $n$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, « Monatshefte f. Mathem. u. Physik », 34, 1926, 89-136. 9 - W. MAYER: *Ueber das vollständige Formensystem der  $F_e$  im  $R_n$* ; Ibid. 35, 1928, 87-110. 10 - C. BURSTIN: *Beiträge zur mehrdimensionalen Differentialgeometrie*; Ibid., 36, 1929, 97-130. 11 - C. BURSTIN: *Mehrdimensionale projective Differentialgeometrie*; Ibid. 37, 1930, 41-54. 12 - A. DUSCHEK e W. MAYER: *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, II (W. MAYER) *Riemannsche Geometrie*; B. G. Teubner, 1930, 201-232. 13 - W. MAYER: *Beitrag zur Differentialgeometrie  $l$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die in euklidischen Räumen eingebettet sind*, « Sitzungsber. preuss. Akad », Berlin, 1931, XXVII, 606-615.

(5) 14, 15 - *Calcolo assoluto generalizzato di Pascal-Vitali e intorno dei vari ordini di un punto su di una varietà riemanniana*, « Atti Soc. Ital. per il Progr. d. Scienze » 19ª Riunione, 1930, vol. 2°, 15-16 ed « Atti Istit. Veneto », 90, 1930-31, 461-478. 16 - *Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo assoluto generalizzato del Vitali, e applicazione alle geometrie riemanniane di specie superiore*, « Rendiconti Semin. Matem. », Padova, 11, 1931, 1-48 e 164-212.

quella stessa nozione si è di nuovo presentata, o è stata ripresa in considerazione, insieme ad altre che vi si collegano. Non è forse fuori luogo il precisare i punti di contatto fra i diversi gruppi di ricerche, e i risultati comuni, se pure ottenuti indipendentemente e con procedimenti dissimili; dando qui, in modo rapido e schematico, una tale esposizione comparativa, colgo l'occasione per apportare alcuni complementi ed estensioni a miei precedenti risultati.

2 - Rammenterò (3, p. 628; 7, p. 388) che vengono dette deformazioni di specie  $k$  di una  $V_m$  in  $R_n$ <sup>(1)</sup> quelle che conservano l'elemento lineare e le curvature (assolute, cioè relative ad  $R_n$ ), fino alla  $(k-1)$ -ma inclusa, delle curve tracciate su  $V_m$ . Il primo e fondamentale problema che vi si riferisce è quello di determinare un sistema di enti (ad es. *tensori o forme differenziali*) atti ad individuare una varietà *a meno di deformazioni di specie  $k$*  assegnata. Naturalmente, queste deformazioni riducendosi per  $k$  sufficientemente grande ai *movimenti* nell'ambiente euclideo, il problema ora detto comprende l'altro, di determinare enti atti a rappresentare la varietà *nel gruppo dei movimenti* di  $R_n$ . Ora: già nel 1905 E. E. Levi ha osservato<sup>(2)</sup> che una superficie,  $P = P(u, v)$ , di  $R_n$  è individuata a meno di movimenti in  $R_n$  dai valori dei simboli  $I_{rs, pq} = \frac{\partial^{r+s} P}{\partial u^r \partial v^s} \times \frac{\partial^{p+q} P}{\partial u^p \partial v^q}$ . S'intende bene che per questo basta anche un numero finito di tali simboli: quelli pei quali  $r+s, p+q$  non superano il più piccolo numero,  $k$ , tale che lo spazio  $\sigma_k, k$ -osculatore alla  $V_m$  nel punto generico, coincida col  $\sigma_{k+1}$ , e quindi con l' $R_n$  ambiente o con un suo sottospazio fisso. Se invece il numero  $k$  viene assegnato *ad arbitrio*, i corrispondenti simboli  $I_{rs, pq}$ , od  $[rs, pq]$  (Bompiani, 3), pei quali  $r+s \leq k, p+q \leq k$ , individuano la *superficie a meno di deformazioni di specie  $k$*  (Bompiani, ibid., 1916). Per effetto di certe relazioni fra i simboli ora detti è sufficiente assegnarne alcuni soltanto: quelli che il Bompiani chiama i *simboli fondamentali*, e che egli assume a coefficienti di un gruppo di forme differenziali di 1° ordine e dei gradi 2, 4, ...,  $2k$ , le  $k$  forme fondamentali (3, pp. 632, 634).

(1) Indico, secondo SCHOUTEN, con  $V_m$  una varietà riemanniana qualunque, con  $S_m$  una  $V_m$  a curvatura costante; con  $R_n$  uno spazio euclideo. Con  $\sigma_h$  indico, secondo VITALI, gli spazi  $h$ -osculatori alla  $V_m$  ( $S(h)$ , secondo BOMPIANI;  $J_{12...h}$  secondo BURSTIN e MAYER); con  $\Pi_h$ , secondo VITALI, per  $h > 1$  lo spazio normale a  $\sigma_{h-1}$  in  $\sigma_h$ , per  $h=1$  lo spazio tangente  $\sigma_1$  ( $J_h$  secondo BURSTIN e MAIER). Infine: indico con  $\mu_h, \tau_h$  le dimensioni del  $\sigma_h$  e del  $\Pi_h$ , onde  $\mu_h \leq \nu_h = \binom{m+h}{h} - 1$ ,  $\mu_h = \sum_{i=1}^h \tau_i$ ; con  $p_h$  la dimensione dello spazio normale al  $\sigma_h$  nell' $R_n$  ambiente ( $\mu_h + p_h = n$ ).

(2) 17 - Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio, « Annali Scuola Normale Super. », Pisa, 1905, vol. X, p. 8 e seg.

Tali forme, invarianti per deformazioni di specie  $\geq k$ , non lo sono per le trasformazioni di coordinate curvilinee sulla superficie: entrambi questi requisiti d'invarianza hanno invece le forme  $L_1^2, L_2^2, \dots, L_k^2$  (quadrati di certe « forme simboliche »  $L_1, L_2, \dots, L_k$ ), introdotte posteriormente dal Bompiani (6, Nota I, p. 256)<sup>(1)</sup>, è aventi questo significato geometrico:  $L_h^2$  è, a meno del fattore numerico  $(h!)^2$ , il quadrato della distanza di un punto della superficie, preso nell'intorno d'ordine  $h$  di un punto  $P$ , dal  $\sigma_{h-1}$ , osculatore in  $P$ .

3 - Non differiscono (per  $m = 2$ ) che per la notazione dai simboli  $I_{rs, pq}$  gli elementi del « sistema assoluto », o tensore, del suo calcolo assoluto generalizzato, di cui il Vitali s'è valso per dotare tale calcolo, in relazione a una  $V_m$  assegnata,  $P = P(u^1 u^2 \dots u^m)$ , di una *derivazione covariante* che conservi le più essenziali proprietà di quella del Ricci. Infatti tale tensore è  $a_{\alpha, \beta} = P_\alpha \times P_\beta$ , con  $\alpha, \beta$  indicandosi dalle combinazioni con ripetizione di classe  $\leq k$  di  $1 \ 2 \dots m$ , e con  $P_\alpha$ , se  $\alpha = r_1 r_2 \dots r_h$ , la derivata  $\frac{\partial^h P}{\partial u^{r_1} \partial u^{r_2} \dots \partial u^{r_h}}$ <sup>(2)</sup>.

Tale tensore  $a_{\alpha, \beta}$ , o la corrispondente «  $k$ -ma forma fondamentale completa »  $\Phi_k = a_{\alpha, \beta} \delta^m u^\alpha \delta^m u^\beta$  (16, pp. 45, 47, 165-168), *quadrato scalare di  $d^h P$* , possono pure assumersi per individuare la varietà nel gruppo delle deformazioni di specie  $k$ , e porsi a base di uno studio delle proprietà invarianti per queste deformazioni - e più in generale, di tutte le proprietà differenziali d'ordine  $\leq k$  - che è affatto analogo a quello che si svolge, secondo Gauss e Riemann, per il caso classico  $k = 1$ . Un tale studio ho esposto nel mio lav. (16) già citato, dopo avere esteso il calcolo del Vitali dal « caso normale », in cui la dimensione dei  $\sigma_k$  è la massima possibile ( $\mu_k = \nu_k$ ), cioè il determinante delle  $a_{\alpha, \beta}$  è  $\neq 0$ , al caso in cui la caratteristica  $\mu_k$  di  $\|a_{\alpha, \beta}\|$  (dimensione dei  $\sigma_k$ ) è qualunque.

Se il vettore derivato  $P_\alpha$  si riguarda, formalmente, come un sistema covariante (a un indice,  $\alpha$ , di classe  $k$ : 18, p. 155; 16, p. 6), e gli si applica la derivazione  $D_r$  definita da  $a_{\alpha, \beta}$ , si ottiene un sistema di vettori<sup>(k)</sup>  $\Omega_{\alpha r}$  di  $R_n$ , o, passando alle loro  $R_n$ -componenti, di scalari  $\Omega_{\alpha r}^{\dots A} = D_r B_{\alpha}^A$ <sup>(k)</sup>.

(1) La forma simbolica  $L_h$  è, in sostanza, un  $(\mu_{h-1} + 1)$ -vettore infinitesimo, prodotto alternato dei  $\mu_{h-1}$  vettori di una  $(\mu_{h-1})$ -pla unitaria ortogonale di  $\sigma_{h-1}$  per  $d^h P$ ; analiticamente può rappresentarsi con la *matrice* delle relative componenti. (Cfr. 6, I, p. 256). Il quadrato della matrice è il quadrato scalare del  $(\mu_{h-1} + 1)$ -vettore detto sopra; ed è agevole verificare come esso non differisca dal quadrato scalare del componente normale a  $\sigma_{h-1}$  in  $\sigma_h$  di  $d^h P$ .

(2) Ved. l'opera del VITALI: 18 - *Geometria nello spazio hilbertiano*, Bologna, Zanichelli, 1929, p. 181; ed ampie indicazioni bibliografiche sugli altri lavori del VITALI e della sua Scuola in questo campo di studi a p. 209 e seg. del mio lav. 16.

( $B_{\alpha}^A$  essendo le  $R_n$ -componenti dei vettori  $P_{\alpha}$ ), che io chiamo *tensore di curvatura euleriana di specie  $k$* ; ciascuno di quei vettori  $\Omega_{\alpha r}^k$  è il componente normale a  $\sigma_k$  del corrispondente vettore derivato ordinario (cioè, in  $R_n$ )  $P_{\alpha r}$  (18, p. 201; 16, p. 29). I quadrati scalari,  $\varphi_{2h}$ , dei vettori  $dP$  ed  $\Omega_{r_1 r_2 \dots r_{h-1} r} du^{r_1} du^{r_2} \dots du^{r_{h-1}} du^r$  sono, per  $h = 1$  ed  $h = 2, 3, \dots, k$ , proprio le forme  $L_h^2$  del Bompiani (n. prec.; cfr. 16, pp. 167-170).

Se, in ciascun punto della  $V_m$ , riferiamo i vettori dell' $R_{p_k}$  normale in  $R_n$  al  $\sigma_k$  osculatore a una  $p_k$ -pla ortogonale unitaria  $X^i_k$  ( $i, j = 1, 2, \dots, p_k$ ), e diciamo  $\omega_{\alpha r}^{i,j,k}$  le corrispondenti componenti dei vettori  $\Omega_{\alpha r}^k$ , sotto certe condizioni che ho esplicitamente indicato (16, n. 15, pp. 196-206) il sistema  $\omega_{\alpha r}^{i,j,k}$ , insieme ad un altro sistema  $A_{ijr}^k$  — che, geometricamente, dà luogo a una sorta di connessione metrica fra gli  $R_{p_k}$  normali ai  $\sigma_k$  — costituisce *quel che occorre aggiungere ad  $a_{\alpha, \beta}$  (o al sistema di forme  $\varphi_{2h}$ ) perchè la  $V_m$  risulti individuata a meno di movimenti di  $R_n$* .

4 — Appunto la determinazione di una  $V_m$  in  $R_n$  a meno di movimenti in  $R_n$ , ma mediante forme soltanto (cfr. n. 2) è il primo problema che si sono posti C. Burstin e W. Mayer nel già accennato gruppo di ricerche. Questo « Formenproblem » essi risolvono in due modi. Un primo sistema di forme  ${}_{(a)}K$  ( $a, b, c \dots = 1, 2, \dots, n$ ) <sup>(1)</sup> è costituito nel modo seguente: nel punto  $P$  generico della  $V_m$  si assume un' $n$ -pla  ${}_{(a)}\lambda$  di vettori unitari ortogonali di riferimento, tali che ciascuno di essi giaccia in uno degli spazi  $\Pi_b$ ,  $b = 1, 2, \dots$ , e se  ${}_{(a)}\lambda$ ,  ${}_{(b)}\lambda$  giacciono in  $\Pi_b$ ,  $\Pi_l$ , per  $b > a$  sia  $l \geq b$ . Del vettore derivato  $\frac{d^b P}{ds^b}$  preso in  $P$  lungo una linea  $P = P(s)$  della  $V_m$  uscente da  $P$  si costruisce il componente  $\frac{d^b P}{ds^b}$  (8, p. 95) secondo  $\Pi_b$  (cioè  $J_b$ ). Le componenti scalari di  $\frac{d^b P}{ds^b}$  secondo i vettori dell' $n$ -pla  ${}_{(a)}\lambda$  che stanno in  $\Pi_b$  sono le forme  ${}_{(a)}K$  di  $\Pi_b$  (8, p. 96; 12, p. 205) <sup>(2)</sup>; per  $b = 1, 2, \dots, k$ , —  $k$  essendo ancora (cfr. n. 2) il più piccolo intero tale che i  $\sigma_k$  coincidono coi  $\sigma_{k+1}$  e quindi fra loro — si ottiene così un primo gruppo di  $n$  forme  ${}_{(a)}K$ , le forme aggiunte all' $n$ -pla

(1) Qui supponiamo che sia proprio un  $R_n$  lo spazio euclideo d'appartenenza della  $V_m$ , ma questa non è una restrizione sostanziale. (Cfr. 12, p. 203).

(2) La generica forma  ${}_{(a)}K$  di  $\Pi_b$  si ottiene pure mediante moltiplicazione per righe della matrice  $L_b$  (n. 2) per la matrice che se ne ricava sostituendo alla riga formata dalle componenti di  $\frac{d^b P}{ds^b}$  quella formata dalle componenti del generico vettore  ${}_{(a)}\lambda$  di  $\Pi_b$ . Cioè: facendo il prodotto scalare dei due corrispondenti  $(\mu_{b-1} + 1)$ -vettori.



( $a$ ) $\lambda$ . Le  $k$  « Formenquadrate »,  $I_b$ , somme dei quadrati delle forme ( $a$ ) $K$  di  $\Pi_1$ , di  $\Pi_2$ , ..., di  $\Pi_k$  — le quali costituiscono il secondo sistema di forme nella trattazione di Burstin e Mayer — a meno dei fattori  $(ds)^{2b}$  coincidono ancora con le forme  $L_b^2$  del Bompiani (nn. 2, 3; 9, p. 91; 12, p. 205).

Delle condizioni necessarie e sufficienti perchè a un assegnato sistema di forme ( $a$ ) $K$  o  $I_b$  corrispondano in effetto delle  $V_m$  di  $R_n$  gli AA. indicano la costruzione, senza darne in modo completo le effettive espressioni, indubbiamente assai complesse. Era ben naturale che gli AA. si chiedessero quali elementi geometrici restano fissati, quando le forme  $I_b$  ( $= \varphi_{2b}/ds^{2b} = L_b^2/ds^{2b}$ ) siano assegnate fino a un numero d'ordine  $k$  fissato ad arbitrio; e quindi, che ritrovassero la nozione di *deformazione di specie  $k$* , introdotta da essi — non a conoscenza dei precedenti lavori del Bompiani — in forma affatto analoga a quella del Bompiani, sopra ricordata (n. 2; ved. 9, p. 106; 10, p. 127; cfr. 12, p. 226).

5 — Ancora due elementi comuni ai lavori dei due geometri tedeschi e a quelli del Bompiani e miei vanno posti in luce: essi riguardano estensioni delle nozioni di *curvatura*, e di *parallelismo*. Il Bompiani ha posto a base della sua ricerca degli *invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore* (6) un teorema fondamentale che è la diretta generalizzazione del « theorema egregium » di Gauss sull'invarianza della curvatura totale di una superficie nelle applicabilità; mostrando come, per ciascun valore di  $k$ , gli *invarianti e covarianti effettivi costruiti (con successive spinte) a partire dalla sola forma simbolica  $L_b$  (esprimibili pure pei soli coefficienti della forma effettiva  $L_b^2$ ) sono invarianti e covarianti nelle deformazioni di specie  $b$*  — 1. Essi dal Bompiani vengono detti « invarianti e covarianti gaussiani » (6, Nota II, p. 317). Ecco che cosa corrisponde a questo teorema del Bompiani nella mia trattazione. Ho posto a base della mia ricostruzione del calcolo assoluto generalizzato del Vitali (in ipotesi più generali sulla  $V_m$  cui è relativo, come ho già accennato al n. 3) questa estensione del parallelismo di Levi-Civita: se un vettore  $\xi(s)$  del  $\sigma_k$  osculatore varia lungo una linea  $\gamma$ ,  $P = P(s)$ , di  $V_m$  in modo che il suo differenziale (in  $R_n$ ) si mantiene normale ai  $\sigma_k$ , dico che esso varia, lungo  $\gamma$ , *per parallelismo di specie  $k$*  (14, p. 15, o 15, p. 469; 16, p. 20). Se inoltre si conserva il modulo di  $\xi$ , dico che esso varia *per equipollenza di specie  $k$* . Il trasporto per equipollenza lungo un circuito chiuso infinitesimo dà luogo a un divario che si esprime mediante un « tensore di curvatura riemanniana di specie  $k$  », pel caso normale trovato, in altro modo, anche dal Vitali (18, p. 202 e seg.; 16, p. 187 e seg.). Come pel caso ben noto  $k = 1$ , così per  $k$  qualunque tale tensore  $R'_{\gamma, s; \alpha}^{\dots \beta}$  (o meglio, il sistema delle sue componenti covarianti) si può esprimere in questi due modi formalmente assai diversi: mediante il tensore di curvatura euleriana di specie  $k$  (18, p. 202; 16, p. 188):



$$(1) \quad R'_{r,s;\alpha,\beta} = \Omega_{\alpha r} \times_k \Omega_{\beta s} - \Omega_{\alpha s} \times_k \Omega_{\beta r} = \omega_{\alpha r}^{\cdot\cdot i} \omega_{\beta s}^{\cdot\cdot i} - \omega_{\alpha s}^{\cdot\cdot i} \omega_{\beta r}^{\cdot\cdot i}$$

o mediante i simboli di Christoffel generalizzati « di classe  $k$  » (18, p. 204; 16, p. 189):

$$(2) \quad R'_{r,s;\alpha,\beta} = \frac{\partial C_{\alpha r, \beta}}{\partial u^s} - \frac{\partial C_{\alpha s, \beta}}{\partial u^r} - a^{\gamma, \delta}_k (C_{\alpha r, \gamma} C_{\beta s, \delta} - C_{\alpha s, \gamma} C_{\beta r, \delta}).$$

Ora: si ha

$$(3) \quad \Omega_{\alpha r} \times_k \Omega_{\beta s} = a_{\alpha r, \beta s} - a^{\gamma, \delta}_k a_{\alpha r, \gamma} a_{\beta s, \delta}$$

e d'altra parte, i simboli di Christoffel di classe  $k$  si possono esprimere pei coefficienti  $a_{\alpha, \beta}$  del tensore fondamentale di specie  $k$  (16, pp. 31-33); cosicchè il tensore  $R'_{r,s;\alpha,\beta}$ , costruito, secondo le (1) e (3), con elementi invarianti per deformazioni di specie  $k+1$ , è anche, per le (2) (o pel suo significato geometrico) *invariante per deformazioni di specie  $k$* : esso può dirsi dunque, secondo la terminologia del Bompiani, *un covariante gaussiano*, anzi è sostanzialmente *l'unico covariante gaussiano di specie  $k$* . Nel mio lav. 16 (p. 201) ho dato la (1) appunto come equazione di Gauss generalizzata.

Equivale perfettamente a quella ora accennata la proposizione che W. Mayer stabilisce (9, p. 108; 13, p. 609) circa quello che egli chiama « der  $k^{te}$  Krümmungstensor ». Infatti tale tensore, per quanto ricavato ed espresso diversamente, non è che lo stesso tensore  $R'_{r,s;\alpha,\beta}$ .

Nel lav. (13) più recente il Mayer ha anche, indipendentemente, ritrovato la nozione, da me introdotta, di *parallelismo di specie  $k$*  (che egli chiama «  $J_{12,\dots,k}$ -Parallelverschiebung »: 13, p. 610); e ha pure notato che questo trasporto è integrabile allora e solo che il  $k$ -mo tensore di curvatura è nullo, proprietà ovviamente contenuta in quella da me stabilita circa il trasporto ciclico per tale parallelismo di specie  $k$ .

6. La maggior parte dei risultati stabiliti da Burstin e Mayer circa le  $V_m$  in  $R_n$  sono stati estesi da essi alle  $V_m$  in  $S_n$ . La possibilità di una tale estensione è evidente *a priori*: basta tener presente che uno spazio  $S_n$  a curvatura costante può sempre realizzarsi mediante un'ipersfera (reale o immaginaria) di  $R_{n+1}$ , e osservare che le deformazioni di specie  $k$  di una  $V_m$  in  $S_n$  sono tali anche nell' $R_{n+1}$  ambiente.

Anche la teoria da me sviluppata (16) per le  $V_m$  in  $R_n$  può, in parte, estendersi alle  $V_m$  in  $S_n$ , in parte anche alle  $V_m$  in  $V_n$  qualunque; però l'estensione riesce in modo agevole e completo soltanto per le  $V_m$  di  $S_n$ , e per  $k \leq 3$ ; mentre per  $k > 3$  si presentano difficoltà sostanziali.

Come « deformazioni di specie  $k$  » di una  $V_m$  in  $V_n$  si intenderanno le deformazioni in cui restano inalterate le lunghezze d'arco e le curvature, relative a  $V_n$ , delle curve di  $V_m$ , fino alle  $(k-1)$ -me incluse. Naturalmente ciascuna delle deformate di una  $V_m$  è localizzata in  $V_n$ , se questa non ha un gruppo di movimenti. Appare naturale costruire ora i vettori  $B_\alpha^A$  (cfr n. 3) con questo procedimento ricorrente, a partire dalle equazioni parametriche  $x^A = x^A(u^1 u^2 \dots u^m)$ , (ove le  $x^A$  sono coordinate curvilinee in  $V_n$ ) della  $V_m$  in  $V_n$ :

$$(4) \quad B_r^A = \frac{\partial x^A}{\partial u^r}, B_{r_1 r_2 \dots r_h}^A = \partial_{(r_h} B_{r_1 r_2 \dots r_{h-1}}^A + \left\{ \begin{matrix} D & E \\ A & c \end{matrix} \right\} B_{r_1 r_2 \dots r_{h-1}}^D B_{r_h}^E, \left( \partial_r = \frac{\partial}{\partial u^r} \right)$$

la parentesi ( ) indicando, secondo Schouten, l'operazione del *mischiare* rispetto agli indici che vi sono contenuti, e i simboli di Christoffel riferendosi al tensore metrico fondamentale  $c_{A,B}$  di  $V_n$ . Ma, in generale, soltanto per  $k \leq 3$  il sistema  $B_\alpha^A$  ha, nei riguardi dell'indice composto (di classe  $k$ )  $\alpha$ , carattere di covarianza. In questa ipotesi, posto  $a_{\alpha,\beta} = c_{A,B} B_\alpha^A B_\beta^B$ , il tensore  $a_{\alpha,\beta}$  o la corrispondente forma  $\Phi_k$  (ved. n. 3) individuano la  $V_m$  a meno di deformazioni di specie  $k$  in  $V_n$ . Estesa, il che riesce ovvio, al caso attuale la definizione di « parallelismo di specie  $k$  » (n. prec.) se si va a costruire il corrispondente procedimento di derivazione covariante si trova che come simboli generalizzati di Christoffel, o parametri della derivazione, si debbono prendere le quantità

$$(5) \quad C_{\alpha|r,\beta} = c_{A,B} \left( \partial_r B_\alpha^A + \left\{ \begin{matrix} E & F \\ A & c \end{matrix} \right\} B_\alpha^E B_r^F \right) B_\beta^B = c_{A,B} \nabla_r B_\alpha^A B_\beta^B,$$

$\nabla_r = B_r^A \nabla_A$  indicando derivazione covariante in  $V_n$ . Ora: se, per  $h > 1$ , si ha  $\alpha = s_1 s_2 \dots s_h$ ,  $C_{s_1 s_2 \dots s_h | r, \beta}$  è simmetrico rispetto ad  $s_1 s_2 \dots s_h$ , ma, in generale, non lo è rispetto ad  $s_1 s_2 \dots s_h r$ ; corrispondentemente, accade che non è possibile in generale esprimere tutti i simboli  $C_{\alpha|r,\beta}$  per le  $a_{\alpha,\beta}$  ( $\alpha, \beta$  essendo sempre indici di classe  $k$ ). Cosicché, in generale, se in  $V_n$  una  $V_m$  è assegnata soltanto a meno di deformazioni di specie  $k$  ( $> 1$ ), non risulta per essa individuato il trasporto parallelo di specie  $k$ .

Invece se la  $V_n$  è a curvatura costante, la differenza  $\nabla_r B_\alpha^A - B_{\alpha r}^A$  (nulla se la  $V_n$  è un  $R_n$ ) esprimendosi linearmente pei vettori  $B_\lambda^A$ , con  $\lambda$  di classe  $k-1$ , si ha pure la possibilità di esprimere le  $C_{\alpha|r,\beta}$  per le  $a_{\alpha,\beta}$  (e loro derivate), e si conserva il carattere d'invarianza del parallelismo di specie  $k$  ( $\leq 3$ ) nelle deformazioni d'eguale specie. Il tensore di curvatura euleriana si costruisce nel modo solito (n. prec.):  $\Omega_{\alpha r}^{\lambda A} = D_r B_\alpha^A$ ; l'operatore  $D_r$

agendo però ora su entrambi gli indici  $A$  ed  $\alpha$ , coi parametri  $\left\{ \begin{matrix} B & C \\ A & c \end{matrix} \right\}$  e  $C_{\alpha r}^\beta$  rispettivamente.

Con questi elementi l'ulteriore estensione della teoria alle  $V_n$  in  $S_n$  risulta agevole; anche le condizioni di subordinazione della  $V_m$  in  $S_n$  dati gli elementi  $a_{\alpha, \beta}$ ,  $\omega_{\alpha r}^{..i}$ ,  $A_{ijr}$  ( $k \leq 3$ ) conservano pressochè la stessa forma, soltanto appare un termine dipendente dalla curvatura  $K$  dell' $S_n$  nei primi membri delle equazioni (1) di Gauss generalizzate, i quali ora si scrivono

$$R'_{r,s;\alpha,\beta} = K (a_{r,\alpha} a_{s,\beta} - a_{r,\beta} a_{s,\alpha});$$

e corrispondentemente, vengono pure modificate le condizioni cui debbono soddisfare le  $a_{\alpha, \beta}$  perchè valga, per questo tensore, il teorema di Ricci,  $D_r a_{\alpha, \beta} = 0$  (cfr. 16, pp. 172, 189).

**Matematica.** — Sulla curvatura geodetica delle linee di uno spazio riemanniano ad  $n$  dimensioni. Nota di E. GUGINO, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un punto generico  $P$  di una linea  $\gamma$  di uno spazio riemanniano  $R$  ad  $n$  dimensioni, il vettore curvatura geodetica  $p$  è notoriamente definito <sup>(2)</sup> mediante le componenti contravarianti  $p^k$  espresse dalle relazioni:

$$(1) \quad p^k = \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} r t \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_t}{ds}$$

col manifesto significato dei simboli. Il modulo  $\frac{1}{\rho}$  di tale vettore può definirsi, come è stato rilevato dal Lipka <sup>(3)</sup>, nella seguente maniera: se  $P'$  è un punto di  $\gamma$  vicino a  $P$  e  $\Delta s$  è l'elemento di arco  $PP'$ , si costruisca in  $P'$  la tangente a  $\gamma$  e la direzione della parallela, secondo il prof. Levi-Civita, alla tangente in  $P$ ; sia  $\Delta\omega$  l'angolo di tali direzioni. Il Lipka ha dimostrato la relazione:

$$(1') \quad \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s}$$

che è una naturale estensione della analoga relazione che esprime la curvatura ordinaria delle linee degli spazi euclidei. Per tali linee infatti le due nozioni di curvatura geodetica ed ordinaria coincidono ed il parallelismo del

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, p. 154.

(3) JOSEPH LIPKA, *Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XXXI (1° sem. 1922, pp. 353-356).

prof. Levi-Civita negli spazi euclidei coincide, come è ben noto, col parallelismo ordinario; l'angolo  $\Delta\omega$  per conseguenza si identifica con l'angolo di contingenza relativo all'arco  $PP'$ .

Ciò premesso ci proponiamo di estendere, con riferimento ad una qualsiasi curva  $\gamma$  di uno spazio riemanniano ad  $n$  dimensioni, la ben nota proprietà <sup>(1)</sup> valida per le curve degli spazi riemanniani a due dimensioni (superficie): il vettore  $\mathbf{p}$  relativo al generico punto  $P$  di una curva  $\gamma$  di uno spazio riemanniano  $R$  qualunque, coincide col vettore  $\mathbf{c}$  curvatura ordinaria in  $P$  della curva  $\gamma^*$ , proiezione ortogonale di  $\gamma$  sulla varietà lineare tangente ad  $R$  in  $P$  <sup>(2)</sup>.

Non mi risulta che tale estensione sia stata segnalata; tuttavia, anche in tale eventualità, ritengo non del tutto privo d'interesse di sviluppare la dimostrazione che segue per il suo carattere di espressiva semplicità; rileveremo inoltre la circostanza, credo non trascurabile, che per uno spazio riemanniano qualunque, l'angolo  $\Delta\omega$  superiormente definito coincide con l'angolo di contingenza relativo all'arco infinitesimo  $PP^*$  della curva  $\gamma^*$ , proiezione ortogonale dell'arco  $PP'$  della curva  $\gamma$  sulla varietà lineare tangente in  $P$  ad  $R$ .

Supponiamo lo spazio  $R$ , definito dalla forma quadratica fondamentale:

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^n g_{ik} dx_i dx_k$$

immerso in uno spazio euclideo  $E$  ad  $m > n$  dimensioni, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $y_e$ ; lo spazio  $R$  può allora considerarsi come una varietà ad  $n$  dimensioni dello spazio  $E$ , definita da relazioni del tipo:

$$(3) \quad y_e = y_e(x_1, \dots, x_n) \quad (e = 1, 2, \dots, m)$$

(1) Cfr. EDOUARD GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. I, p. 634, edition 1927, oppure E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann* (Paris, Gauthier-Villars, 1928), pp. 111-114,

(2) Alcuni Autori [veggasi ad esempio P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle* (Paris, Gauthier-Villars, 1926); T. V., *Éléments de calcul Tensoriel*, pp. 124-126; oppure P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Geometria Differenziale* (Bologna, Zanichelli, 1930) Parte II, p. 219] definiscono la curvatura geodetica, relativa allo spazio  $R$ , della linea  $\gamma$  in  $P$  per mezzo del modulo del vettore proiezione ortogonale della curvatura ordinaria  $\mathbf{c}$   $\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$  sulla varietà lineare tangente allo spazio  $R$  in  $P$ . Tale definizione però

non implica la circostanza che il modulo di siffatto vettore proiezione debba rappresentare la curvatura ordinaria della curva proiezione; se si esegue infatti la proiezione su di uno spazio euclideo  $S_n$  qualunque, detta circostanza in generale non ha luogo; essa invece si verifica in base alla nostra proposizione, con riferimento al punto generico  $P$ , nel caso che l' $S_n$  su cui si proietta coincida con la varietà lineare tangente allo spazio  $R$  in  $P$  stesso.

con  $x_1, \dots, x_n$  (coordinate generali di R) parametri essenziali di detta varietà; le (3) inoltre debbono essere tali da soddisfare alla condizione che, sostituendo nella forma quadratica euclidea  $\sum_1^m (dy_e)^2$  le  $x_i$  alle  $y_e$ , si ottenga il  $ds^2$  assegnato. Valgono allora le  $\frac{n(n+1)}{2}$  equazioni distinte:

$$(4) \quad \sum_1^m \frac{\partial y_e}{\partial x_i} \frac{\partial y_e}{\partial x_k} = g_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Sia  $\gamma$  una linea di R di equazioni parametriche:

$$(5) \quad x_i = x_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove  $s$  è l'arco contato a partire dal generico punto  $P_0$  di coordinate  $y_e^0$  nello spazio E ed  $x_i^0$  nello spazio R. Sia P un qualsiasi altro punto di  $\gamma$  di coordinate  $y_e$  ed  $x_i$ . Il vettore  $P - P_0$ , contenuto in E, ha le competenti contravarianti:

$$(6) \quad \beta^e = y_e - y_e^0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, m)$$

funzioni di  $s$  pel tramite delle (3) e delle (5). Si proietti tale vettore sulla varietà lineare tangente ad R in  $P_0$ ; si ottiene il vettore  $P^* - P_0$  avente l'origine  $P_0$  fissa e l'estremo  $P^*$  variabile, definito univocamente dalla condizione, che il vettore differenza:  $(P - P_0) - (P^* - P_0) = P - P^*$  risulti normale allo spazio R in  $P_0$ . Denotiamo con  $y_e^*$  le coordinate cartesiane del punto  $P^*$ , con  $\eta^e = y_e^* - y_e^0$  e  $\xi^i$  le componenti di  $P^* - P_0$  in E ed in R. Manifestamente valgono le relazioni:

$$(7) \quad \eta^e = \sum_1^n \left( \frac{\partial y_e}{\partial x_i} \right)_0 \xi^i \quad (\rho = 1, 2, \dots, m).$$

Per la espressa condizione di ortogonalità del vettore  $P - P^*$  può scriversi:

$$\sum_1^m (\beta^e - \eta^e) \left( \frac{\partial y_e}{\partial x_l} \right)_0 = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

ove le derivate parziali delle  $y_e$  rapporto alle  $x_l$  si suppongono calcolate nel punto  $P_0$ .

Avuto riguardo alle (7) ed alle (4), le precedenti relazioni assumono la forma:

$$\sum_1^m \beta^e \left( \frac{\partial y_e}{\partial x_l} \right)_0 = \sum_1^n (g_{il})_0 \xi^i \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$



con le  $(g_{il})_o$  calcolate nel punto  $P_o$ . Moltiplicando entrambi i membri delle ultime relazioni per  $(g^{lk})_o$ , sommando rispetto all'indice  $l$ , tenendo conto delle (6) e delle proprietà del sistema tensoriale misto  $g_i^k$  che si deduce per moltiplicazione contratta dei sistemi tensoriali fondamentali  $g_{ik}$  e  $g^{ik}$ , si ottengono le componenti contravarianti:

$$(8) \quad \xi^k = \sum_l^n (g^{lk})_o \sum_l^m \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_l} \right)_o (y_l - y_l^o) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

del vettore  $P^* - P_o$  nello spazio  $R$  in funzione del parametro  $s$  pel tramite delle  $y_l$ . Le coordinate  $y_\sigma^*$  del punto  $P^*$ , essendo  $y_\sigma^* - y_\sigma^o = \sum_k^n \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_k} \right)_o \xi^k$ , in base alle (8) risultano definite dalle relazioni:

$$(9) \quad y_\sigma^* = y_\sigma^o + \sum_{kl}^n (g^{lk})_o \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_k} \right)_o \sum_l^m \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_l} \right)_o (y_l - y_l^o) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

che forniscono le equazioni parametriche nello spazio  $E$  della curva proiezione  $\gamma^*$ .

Indichiamo con  $s^*$  l'arco di  $\gamma^*$  contato positivamente a partire dalla origine  $P_o$  nel medesimo senso secondo cui cresce  $s$ ; in un intorno di  $P_o$ ,  $s^*$  può ritenersi funzione monotona di  $s$  e quindi le  $y_l$  possono riguardarsi funzioni di  $s^*$  pel tramite di  $s$ .

Derivando le (9) si ottengono:

$$\frac{dy_\sigma^*}{ds^*} = \sum_{klr}^n (g^{lk})_o \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_k} \right)_o \sum_l^m \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_l} \right)_o \frac{\partial y_l}{\partial x_r} \frac{dx_r}{ds^*} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Una successiva derivazione conduce alle:

$$(10) \quad \frac{d^2 y_\sigma^*}{ds^{*2}} = \sum_{klr}^n (g^{lk})_o \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_k} \right)_o \sum_l^m \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_l} \right)_o \left[ \frac{\partial y_l}{\partial x_r} \frac{d^2 x_r}{ds^{*2}} + \sum_{i'}^n \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_r \partial x_{i'}} \frac{dx_r}{ds^*} \frac{dx_{i'}}{ds^*} \right] \\ (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

che definiscono le componenti in  $E$  del vettore curvatura ordinaria  $e^*$  in un punto generico  $P^*$  di  $\gamma^*$ . Se in particolare  $P^*$  coincide con  $P_o$ , l'elemento di arco  $ds^*$  della curva  $\gamma^*$  a partire da  $P_o$ , si identifica con l'elemento di arco  $ds$  della curva  $\gamma$  a partire dalla medesima origine. Le componenti del vettore curvatura ordinaria  $e_o$  nel punto  $P_o$  di  $\gamma^*$  risultano in conseguenza definite dalle relazioni:

$$(I) \quad \left( \frac{d^2 y_\sigma^*}{ds^{*2}} \right)_o = \sum_{klr}^n (g^{lk})_o \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_k} \right)_o \sum_l^m \left\{ \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_l} \right)_o \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_r} \right)_o \frac{d^2 x_r}{ds^2} + \sum_{i'}^n \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_l} \right)_o \left( \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_r \partial x_{i'}} \right)_o \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_{i'}}{ds} \right\} \\ (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Per le note formule che esprimono i simboli di Christoffel di prima specie in funzione delle derivate parziali delle  $y_e$  rapporto alle  $x_i$ , si ha:

$$\left[ \begin{matrix} r & t \\ l \end{matrix} \right] = \sum_i^m g_{il} \frac{\partial y_e}{\partial x_l} \frac{\partial^2 y_e}{\partial x_r \partial x_l}.$$

In base a tali formule ed alle (4) le (I) assumono l'aspetto:

$$\left( \frac{d^2 y_\sigma^*}{ds^{*2}} \right)_o = \sum_i^n g_{ik} (g_{lr})_o \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_k} \right)_o \left\{ (g_{lr})_o \frac{d^2 x_r}{ds^2} + \sum_i^n \left[ \begin{matrix} r & t \\ l \end{matrix} \right]_o \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_t}{ds} \right\} \\ (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Tenendo conto delle note relazioni tra i simboli di Christoffel di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie e delle proprietà del sistema misto  $g_i^k$ , le precedenti equazioni assumono la forma definitiva:

$$\left( \frac{d^2 y_\sigma^*}{ds^{*2}} \right)_o = \sum_i^n \left( \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_k} \right)_o \left[ \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_i^n r_{li} \left\{ \begin{matrix} r & t \\ k \end{matrix} \right\}_o \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_t}{ds} \right] \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

che esprimono la circostanza essenziale che le componenti:

$$\xi_o^k = \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_i^n r_{li} \left\{ \begin{matrix} r & t \\ k \end{matrix} \right\}_o \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_t}{ds}$$

del vettore  $e_o$  nello spazio riemanniano  $R$ , si identificano con le (1) calcolate nel punto  $P_o$ ; ne segue che i due vettori  $e_o$  e  $p_o$  si equivalgono.

Denotando con  $\chi$  l'angolo di contingenza della curva  $\gamma^*$  relativo all'arco  $\Delta s^* = P_o P^*$ , il modulo  $c_o$  si esprime con la nota relazione:

$$c_o = \lim_{\Delta s^* \rightarrow 0} \frac{\chi}{\Delta s^*}$$

Dalla uguaglianza dei vettori  $p_o$  e  $e_o$  segue l'uguaglianza dei rispettivi moduli; poichè a partire da  $P_o$  risulta  $ds^* = ds$ , per  $P$  e quindi  $P^*$  infinitamente vicino a  $P_o$ , in base all'ultima relazione ed alla (1') si deduce  $\chi = d\omega$ ; quindi l'angolo  $d\omega$  che la tangente in  $P$  forma con la tangente al punto infinitamente vicino  $P_o$  di  $\gamma$ , trasportata in  $P$  per parallelismo, coincide con l'angolo di contingenza relativo all'arco  $P_o P^*$ , proiezione dell'arco  $P_o P$  sulla varietà lineare tangente in  $P_o$  allo spazio  $R$ .

**Matematica** (Analisi). — *Una generalizzazione degli sviluppi in serie delle funzioni determinanti.* Nota di U. BROGGI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio S. PINCHERLE.

Gli sviluppi di una funzione determinante in serie di potenze decrescenti della variabile, in serie di frazioni parziali, in serie di fattoriali, sono casi particolari di altri sviluppi, che ci proponiamo di definire.

1.  $\Phi(t)$  e  $\varphi(t)$  siano funzioni della variabile reale  $t$ , date univocamente nell'intervallo  $(0, \infty)$ , limitate ed integrabili in ogni tratto finito dello stesso. Gli integrali

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} \Phi(t) dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} \varphi(t) dt$$

convercano rispettivamente in un semipiano  $R(x) > \lambda$  il primo,  $R(x) > \mu$  il secondo, e siano  $F(x)$  rispettivamente  $f(x)$  le funzioni analitiche regolari in tutto il semipiano di convergenza, contorno escluso, che i due integrali rappresentano<sup>(2)</sup>.

Se  $\Phi(t)$  è uguale al prodotto di  $\varphi(t)$  per una funzione intera

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots,$$

se la serie

$$S(x) = \alpha_0 \int_0^{\infty} e^{-tx} \varphi(t) dt + \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{-tx} t \varphi(t) dt + \dots$$

converge, e  $x$  è punto interno ai semipiani di convergenza degli integrali (1), è pure

$$(1) \quad F(x) = \alpha_0 f(x) - \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f''(x) - \dots$$

per valori abbastanza grandi della parte reale di  $x$ .

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) Si suppongono note le nozioni della teoria delle funzioni determinanti che il lettore può trovare, ad es. nel cap. XVI degli *Elementi della teoria delle funzioni analitiche*, Parte I, di S. PINCHERLE. Il quale ottiene lo sviluppo I nel caso in cui la funzione determinante di generatrice  $\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots$  è regolare all'infinito. (*Sull'inversione degli integrali definiti*, in « Mem. Soc. It. delle Scienze » (1908), p. 13).

Lo dimostriamo osservando che la derivata  $n$ -esima di  $f(x)$  rispetto ad  $x$  è uguale e

$$(1) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-tx} t^n \varphi(t) dt$$

che il secondo membro della (2) converge nel semipiano  $R(x) > \mu$ , e che, se

$$f(x, u) = \int_0^u e^{-tx} \varphi(t) dt, \quad F(x, u) = \int_0^u e^{-tx} \Phi(t) dt$$

è anche, se  $R(x) > \mu$

$$F(x, u) = \alpha_0 f(x, u) - \alpha_1 f'(x, u) + \alpha_2 f''(x, u) - \dots$$

poichè  $e^{-tx} \varphi(t)$  essendo limitato, la serie  $e^{-tx} \varphi(t) \sum \alpha_n t^n$  converge uniformemente in  $(0, u)$ , qualunque sia  $u$  ( $0 \leq u < \infty$ ).

$F(x, u)$  e

$$f^{(n)}(x, u) = (-1)^n \int_0^u e^{-tx} t^n \varphi(t) dt$$

tendono uniformemente verso  $f(x)$  e  $f^{(n)}(x)$  in ogni area limitata, interna ai semipiani di convergenza di  $f(x)$  e di  $F(x)$ .

È

$$S(x) - F(x, u) = \alpha_0 \int_u^{\infty} e^{-tx} \varphi(t) dt + \alpha_1 \int_u^{\infty} e^{-tx} t \varphi(t) dt + \dots$$

e poichè i termini del secondo membro tendono uniformemente verso 0 per  $\lim u = +\infty$  può scegliersi  $u$  grande per modo che sia

$$|S(x) - F(x, u)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \int_u^{\infty} e^{-tx} \Phi(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| S(x) - \int_0^{\infty} e^{-tx} \Phi(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Sussiste cioè la (1), di cui lo sviluppo di  $F(x)$  in serie di potenze decrescenti di  $x$

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1 \cdot 1!}{x^2} + \frac{\alpha_2 \cdot 2!}{x^3} + \dots$$

è caso particolare, corrispondente a  $\varphi(t) \equiv 1, f(x) = \frac{1}{x}$ .

2. Sia analogamente

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1} \Psi(t) dt$$

$$f(x) = \int_0^1 t^{x-1} \psi(t) dt$$

$$\Psi(t) = \psi(t) (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots) = \psi(t) h(t)$$

e converga

$$(3) \quad h(1) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots$$

È

$$(II) \quad F(x) = \beta_0 f(x) + \beta_1 f(x+1) + \beta_2 f(x+2) + \dots$$

e quindi anche, se  $\psi(t) \equiv 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$

$$(4) \quad F(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x+1} + \frac{\beta_2}{x+2} + \dots$$

Lo sviluppo particolare (4) dimostra che la condizione (3) non è necessaria: la serie di frazioni parziali converge in corrispondenza di ogni valore di  $x$ , che non sia lo zero o un intero negativo, se  $\beta_0 + \frac{\beta_1}{1} + \frac{\beta_2}{2} + \dots$  converge<sup>(1)</sup>.

Dimostriamo la (II) osservando che, se  $t^{x-1} \Psi(t)$ ,  $t^{x-1} \psi(t)$  sono limitate nell'intervallo chiuso  $< 0, 1 >$  ed è

$$f_n(t) = t^{x-1} \psi(t) (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

le funzioni  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $\dots$  sono integrabili nell'intervallo chiuso  $< 0, 1 >$  ed uniformemente limitate in  $< 0, 1 >$ . Può indicarsi cioè un  $A > 0$  tale che

$$|f_n(t)| < A$$

identicamente in  $n$  ed in  $t$ , ( $0 \leq t \leq 1$ ), mentre esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = t^{x-1} \Psi(t)$$

integrabile in  $< 0, 1 >$ . Per il teorema di Arzelà<sup>(2)</sup> può affermarsi che

(1) Cfr. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, § 50 (1906).

(2) « Rend. Acc. Linc. », IV. Vol. I, pp. 321-326 (1885).



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \Phi(x)$$

e quindi anche la (II).

3. Se

$$h(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots$$

è una funzione olomorfa nel circolo  $|t - 1| = 1$  e d'ordine finito su questo circolo, può affermarsi <sup>(1)</sup> che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{(n)}(1)}{n!} t^{x-1} (1-t)^n = t^{x-1} h(t)$$

converge uniformemente nell'intervallo  $0 \leq t \leq 1$ , sempre che  $R(x)$  sia maggiore di un  $\sigma > 0$ .  $\psi(t)$  essendo limitato in  $0 \leq t \leq 1$  converge uniformemente in questo intervallo anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{(n)}(1)}{n!} t^{x-1} \psi(t) (1-t)^n$$

e può venire integrata termine a termine fra 0 ed 1. S'ottiene così

$$\begin{aligned} \text{(III)} F(x) &= \int_0^1 t^{x-1} \Psi(t) dt = \int_0^1 t^{x-1} \psi(t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{(n)}(1)}{n!} (1-t)^n \right) dt \\ &= h(1) f(x) - \frac{h'(1)}{1!} \int_0^1 t^{x-1} (1-t) \psi(t) dt + \\ &+ \frac{h''(1)}{2!} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^2 \psi(t) dt - \dots = h(1) f(x) + \frac{h'(1)}{1!} \Delta f(x) + \\ &+ \frac{h''(1)}{2!} \Delta^2 f(x) + \dots \end{aligned}$$

Ove sia

$$\psi(t) \equiv 1, f(x) = \frac{1}{x}$$

è anche

$$\Delta^n f(x) = (-1)^n \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

(1) Cfr. N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, p. 188 (1926).

e la (III) si riduce alla serie di fattoriali

$$F(x) = \frac{b(1)}{x} - \frac{b'(1)}{x(x+1)} + \frac{b''(1)}{x(x+1)(x+2)} - \dots$$

che appunto converge in un semipiano  $R(x) > \lambda$  e vi ha il valore

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1} h(t) dt$$

se  $h(t)$  è una funzione olomorfa nel circolo  $|t-1|=1$  e d'ordine finito su questo circolo<sup>(1)</sup>.

Date cioè le due funzioni determinanti  $F(x)$  e  $f(x)$  sussiste, per valori abbastanza grandi della parte reale di  $x$ , la (III), sempre che il quoziente  $h(t)$  delle loro funzioni generatrici, supposte limitate ed integrabili in ogni tratto dell'intervallo d'integrazione  $<0, 1>$ , sia una funzione  $h(t)$  olomorfa in  $|t-1|=1$  e d'ordine finito su questo circolo.

**Matematica (Analisi).** — *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto.* Nota di MARIA CIBRARIO, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. G. FUBINI.

Il prof. Tricomi nel primo capitolo di un suo noto lavoro<sup>(3)</sup> si è occupato del problema di ridurre a forma canonica con opportuni cambiamenti di variabili le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto:

$$(1) \quad A\zeta_{xx} + 2B\zeta_{xy} + C\zeta_{yy} = f(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y),$$

dove le  $A, B, C$  sono definite in un dominio  $D$ , semplicemente connesso, contenente una curva  $\gamma$ , lungo cui  $\Delta = AC - B^2 = 0$ .

Il prof. Tricomi giunge, facendo implicitamente alcune ipotesi restrittive sui coefficienti della (1) alla forma canonica:

$$y\zeta_{xx} + \zeta_{yy} = f(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y).$$

(1) Loc. cit., nota (1) a p. 618.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) F. TRICOMI, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto*, «Memorie della R. Acc. dei Lincei», ser. 5ª, vol. XIV, fasc. 7° (1923).

Noi qui abbandonando le ipotesi del prof. Tricomi testè citate, *completeremo questo risultato e troveremo i tipi differenti*<sup>(1)</sup>, a cui si può ridurre l'equazione (1) con un cambiamento di variabili reale e invertibile eseguito in un dominio, interno a  $D$  e contenente la curva  $\gamma$ .

Le  $A, B, C$  coefficienti della (1) abbiano in  $D$  tutte le derivate che occorrono nello studio di ognuno dei varii casi, e non si annullino contemporaneamente in  $D$ ; sarà detto esplicitamente, quando occorrerà l'ipotesi che  $A, B, C$  siano funzioni analitiche. La linea  $\gamma$  sia di un solo pezzo. Cerchiamo di far scomparire il termine in  $\gamma_{xy}$  e di ridurre eguale ad uno il coefficiente di  $\gamma_{yy}$ , portando nello stesso tempo la curva  $\gamma$  a coincidere con uno degli assi; determiniamo cioè due funzioni finite e continue con tutte le derivate che ci potranno occorrere:

$$(2) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

che soddisfino le:

$$(3) \quad A\xi_x \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + C\xi_y \eta_y = 0$$

$$(4) \quad A\eta_x^2 + 2B\eta_x \eta_y + C\eta_y^2 \neq 0.$$

Ci limiteremo a considerare il caso, in cui, lungo la curva  $\gamma$ ,  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  non si annullino contemporaneamente<sup>(2)</sup> e il caso in cui per  $\Delta = 0$ , sia pure identicamente  $\Delta_x = \Delta_y = 0$ , e anzi, per maggior generalità, si annullino identicamente tutte le derivate di  $\Delta$ , fino a quelle di ordine  $n - 1$  incluse, e le derivate di ordine  $n$  non si annullino contemporaneamente; in questo caso si può dimostrare che:  $\Delta(x, y) = H^n(x, y) M(x, y)$ , dove  $M(x, y) \neq 0$  in  $D$ , e  $H(x, y) = 0$  lungo la curva  $\gamma$ ; nei punti di  $\gamma$ ,  $H_x$  e  $H_y$  non si annullano contemporaneamente<sup>(3)</sup>; nel caso  $n = 1$  si porrà:  $\Delta(x, y) = H(x, y)$ ;  $M(x, y) = 1$ <sup>(4)</sup>. Dovremo ora distinguere due casi.

Supponiamo, in primo luogo, che la  $H(x, y) = 0$  non sia mai tangente ad una caratteristica della (1), cioè che lungo  $\gamma$ , e quindi in un dominio contenente  $\gamma$  sia:

$$(5) \quad AH_x^2 + 2BH_x H_y + CH_y^2 \neq 0.$$

(1) Cioè non riducibili l'uno all'altro con un cambiamento reale di variabili, determinato da funzioni finite, continue, derivabili, che sia invertibile in un dominio contenente la curva  $\gamma$ .

(2) Il caso, cioè, in cui la curva  $\gamma$  non abbia punti doppi.

(3)  $\gamma$  è dunque priva di punti doppi.

(4) I ragionamenti che seguono per  $n = 1$  valgono lungo l'intera curva  $\gamma$ , per  $n > 1$  in un dominio contenente un arco di  $\gamma$ , lungo cui sia  $\frac{\partial^n \Delta}{\partial x^n} \neq 0$ , oppure  $\frac{\partial^n \Delta}{\partial y^n} \neq 0$ .

Posto  $\eta = H(x, y)$ , la (4) è soddisfatta in  $\delta$ ; per la (3) le  $\xi(x, y) = \text{cost.}$  sono le caratteristiche dell'equazione

$$(6) \quad (AH_x + BH_y) \xi_x + (BH_x + CH_y) \xi_y = 0,$$

per i punti di  $\gamma^{(1)}$ ; nel dominio  $\delta_1$  ricoperto da esse e contenuto in  $\delta$  è determinato il cambiamento di variabili, che si cercava; poichè in  $\delta_1$ :  $\xi_v = \rho(BH_x + CH_y)$ ;  $\xi_y = -\rho(AH_x + BH_y)$ , dove  $\rho(x, y)$  non si annulla mai in  $\delta_1$  <sup>(2)</sup>, è:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \rho(BH_x + CH_y) H_y + \rho(AH_x + BH_y) H_x \neq 0$$

per la (5); il cambiamento di variabili così definito è dunque invertibile <sup>(3)</sup> in  $\delta_1$ , e con facile calcolo si vede che in  $\delta_1$  la (1) diviene:

$$(7) \quad \eta^n k(\xi, \eta) \alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, \alpha, \alpha_\xi, \alpha_\eta) \quad (\text{dove } k(\xi, \eta) \neq 0).$$

Supponiamo in secondo luogo, che lungo  $\gamma$  sia sempre:

$$(8) \quad AH_x^2 + 2BH_x H_y + CH_y^2 = 0.$$

La  $\eta(x, y)$  sia un integrale della:

$$(9) \quad n(x, y) \eta_x - m(x, y) \eta_y = 0,$$

dove  $m$  ed  $n$  sono funzioni finite e continue con tutte le derivate che ci potranno occorrere e soddisfano in un dominio  $\delta$  contenente  $\gamma$  alla:

$$(10) \quad Am^2 + 2Bmn + Cn^2 \neq 0,$$

da cui segue che  $\eta(x, y)$  soddisfa alla (4). Per soddisfare la (10) occorre qualche condizione ulteriore; se  $A \neq 0$  ( $C \neq 0$ ) in  $D$  si può prendere

(1) Per l'integrazione nel campo reale della (6) e di altre equazioni dello stesso tipo che si incontrano nel seguito vedere M. CIBRARIO, *Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali*. Nota I, « Rendic. R. Acc. dei Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, vol. XIII, 1<sup>o</sup> sem. 1931, pp. 26-31; ved. in particolare il t. IV del § 1 e il § 2, e M. CIBRARIO, *Su alcuni notevoli cambiamenti di variabili e sulle loro applicazioni ad alcune equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico e parabolico*, in corso di stampa negli « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », § 1, t. II.

(2) Ved. per questo i lavori citati nella nota precedente.

(3) Nella mia Nota citata sopra: *Su alcuni notevoli cambiamenti di variabili* ecc. § 1, t. I, si dimostra che la condizione  $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$  è sufficiente ad assicurare l'invertibilità del cambiamento di variabili.

$\eta(x, y) = x$ , cioè  $m = 1$ ,  $n = 0$  ( $\eta(x, y) = y$ ,  $m = 0$ ,  $n = 1$ ); si può pure determinare un dominio  $\delta$  in cui valgano la (4) e la (10), se supposti  $A \geq 0$ ,  $C \geq 0$  lungo  $\gamma^{(1)}$ , ivi è  $B \geq 0$ , oppure se nei punti di  $\gamma$ , in cui  $B < 0$ , è  $A \neq C$ : basta allora prendere  $m = A$ ,  $n = C$ . Supposto di poter soddisfare la (10) e la (4) nel dominio  $\delta_1$ , interno a  $\delta$  e ricoperto dalle caratteristiche della (9) per i punti di  $\gamma$ , si determini un integrale della (3); le  $\xi(x, y) = \text{cost.}$  sono le caratteristiche della (3) uscenti per es. dalla  $\eta = 0$ ; fra esse prenderemo come curva  $\xi = 0$  quella per il punto comune a  $\gamma$  e alla  $\eta = 0$ . Nel dominio  $\delta_2$  ricoperto dalle  $\xi = \text{cost.}$  e dalle  $\eta = \text{cost.}$  è determinato un cambiamento di variabili, certo invertibile<sup>(2)</sup>. Posto:  $H(x, y) = \bar{H}(\xi, \eta)$ , si trova con facile calcolo che lungo  $\gamma$ :  $\bar{H}_\xi \neq 0$ ,  $\bar{H}_\eta = 0$ ; dalla  $\bar{H}(\xi, \eta) = 0$ , si ricava  $\xi = \text{cost.}$  lungo  $\gamma$ ; poichè  $\xi = 0$  in un punto di  $\gamma$ ,  $\gamma$  coincide colla  $\xi = 0$ .

Essendo  $\bar{H}(0, \eta) = 0$ , risulta:

$$\bar{H}(\xi, \eta) = \xi \bar{H}_\xi[\vartheta(\xi, \eta), \eta] = \xi N(\xi, \eta),$$

dove  $\vartheta$  è compreso tra zero e uno e  $N(\xi, \eta) \neq 0$ .

Con facile calcolo si vede che in  $\delta_3$  la (1) diviene:

$$(11) \quad \xi^n k(\xi, \eta) \chi_{\xi\xi} + \chi_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, \chi, \chi_\xi, \chi_\eta),$$

dove  $k(\xi, \eta) \neq 0$ .

*I variî tipi di equazioni (7) e (11) non si possono ridurre l'uno all'altro, con un cambiamento di variabili reale e invertibile, che non presenti singolarità per  $\eta = 0$  o per  $\xi = 0$ .*

Se una equazione della forma (7) con un cambiamento di variabili:

$$(12) \quad X = X(\xi, \eta), \quad Y = Y(\xi, \eta)$$

si può ricondurre ad una dello stesso tipo, ottenuta per un valore differente di  $n$ , si deve integrare il sistema:

$$(13) \quad \begin{cases} \eta^n k(\xi, \eta) X_\xi Y_\xi + X_\eta Y_\eta = 0 \\ \eta^n k(\xi, \eta) X_\xi^2 + X_\eta^2 = Y^n h(X, Y) [\eta^n k Y_\xi^2 + Y_\eta^2] \end{cases}$$

$$\eta^n k Y_\xi^2 + Y_\eta^2 \neq 0,$$

in cui  $h(X, Y)$  è una funzione da determinarsi.

(1) Il che è sempre possibile, perchè lungo la  $AC - B^2 = 0$ ,  $A$  e  $C$ , che hanno lo stesso segno e non si annullano contemporaneamente (chè altrimenti  $A, B, C$  si annullerebbero insieme), possono annullarsi, ma non cambiare di segno.

(2) Si vede subito, come nel primo caso, che dalle (3) e (4) segue  $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$ .



Se  $X$  è funzione solo di  $\xi$ ,  $Y$  solo di  $\eta$ , la prima delle (13) è soddisfatta, la seconda dà:

$$\eta^n k X'^2(\xi) = Y^m h Y'^2(\eta).$$

Supposto  $X' \neq 0$ ,  $Y' \neq 0$  (il che è necessario perchè il cambiamento di variabili sia invertibile) si ha:  $Y = \eta^{\frac{n}{m}} N(\eta)$ , (dove  $N(\eta) \neq 0$ ), che per  $\eta = 0$  dà  $Y' = 0$  se  $n > m$ , e  $Y' = \infty$  se  $n < m$ , il che è assurdo.

Nel caso più generale la prima delle (13) per  $\eta = 0$  diviene  $X_\eta Y_\eta = 0$ ; se  $Y_\eta = 0$  dalla seconda si ricava  $X_\eta = 0$ , e quindi  $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)} = 0$ , per  $\eta = 0$ . Dunque:

$$(14) \quad X_\eta = 0; Y = 0; Y_\eta \neq 0; X_\xi \neq 0, \text{ per } \eta = 0.$$

Allora per  $|\eta|$  abbastanza piccolo  $X_\xi \neq 0$ ,  $Y_\eta \neq 0$ , e posto  $\frac{X_\xi}{Y_\eta} = \rho \neq 0$ , dalla prima delle (13) si ottiene:  $X_\eta = -\rho \eta^n k Y_\xi$ , e dalla seconda  $Y^m h(X, Y) = \rho^2 \eta^n k(\xi, \eta)$ . Se  $n$  è dispari, anche  $m$  deve essere dispari; se  $n$  è pari, anche  $m$  è pari e  $h(X, Y)$  ha il segno di  $k(\xi, \eta)$ ; dunque:

$$Y = \eta^{\frac{n}{m}} \sqrt[m]{\frac{k}{h}} \rho^2,$$

che per  $\eta = 0$  dà  $Y_\eta = 0$  se  $n > m$ , dà  $Y_\eta = \infty$ , se  $n < m$ ; dunque  $n = m$ .

In modo analogo si dimostra che una equazione della forma (11) con un cambiamento di variabili non si può ricondurre ad una dello stesso tipo, ottenuta per un valore differente di  $n$ , e che una equazione della forma (7) non si può ridurre ad una della forma (11).

Se si può ridurre  $k = \pm 1$  nella (7),  $X, Y$  soddisfano le:

$$(15) \quad \begin{cases} \eta^n k X_\xi Y_\xi + X_\eta Y_\eta = 0 \\ \eta^n k X_\xi^2 + X_\eta^2 = \epsilon Y^n [\eta^n k Y_\xi^2 + Y_\eta^2] \end{cases}$$

$$(15') \quad \eta^n k Y_\xi^2 + Y_\eta^2 \neq 0.$$

( $\epsilon = \pm 1 = \text{sgn } k$ ; se  $n$  è dispari, si può supporre sempre  $k > 0$ ). Si vede subito che se e solo se  $k$  è prodotto di una funzione di  $\xi$  per una di  $\eta$ , si possono determinare  $X = X(\xi)$ ,  $Y = Y(\eta)$  ( $X' \neq 0$ ,  $Y' \neq 0$ ), in modo da soddisfare le (15).

In generale si vede, col ragionamento fatto per il sistema (13), che valgono le (14) e che posto per  $|\eta|$  abbastanza piccolo:

$$(16) \quad X_{\xi} = \rho(\xi, \eta) Y_{\eta}; \quad X_{\eta} = -\rho \eta^n k Y_{\xi} \quad (\rho \neq 0)$$

dalla seconda delle (15) si ha:  $Y = \rho^{\frac{2}{n}} \eta \sqrt[n]{|k|}$ .

Posto  $U = \rho^{\frac{n+2}{n}}; h = \sqrt[n]{|k|}$ , sostituendo nelle (16) e tenendo conto della condizione di integrabilità segue:

$$(17) \quad 2\eta h[U_{\eta\eta} + \epsilon \eta^n h^n U_{\xi\xi}] + (n+4)(h + \eta h_{\eta})U_{\eta} + \epsilon(3n+4)\eta^{n+1} h^n h_{\xi} U_{\xi} + \\ + (n+2)[2h_{\eta} + \eta h_{\eta\eta} + \epsilon n \eta^{n+1} h^{n-1} h_{\xi}^2 + \epsilon \eta^{n+1} h^n h_{\xi\xi}] U = 0.$$

Anche se  $A, B, C$  e quindi  $h, k$  sono funzioni analitiche, non si può dire nulla circa l'esistenza di un integrale reale della (17) in un dominio contenente la  $\eta = 0$ . Se si può determinare  $U$ , si può ridurre  $k = \pm 1$  nella (7).

Se si può ridurre  $k = \pm 1$  nella (11),  $X, Y$  soddisfano le:

$$(18) \quad \begin{cases} \xi^n k X_{\xi} Y_{\xi} + X_{\eta} Y_{\eta} = 0 \\ \xi^n k X_{\xi}^2 + X_{\eta}^2 = \epsilon X^n [\xi^n k Y_{\xi}^2 + Y_{\eta}^2] \end{cases} \quad (\epsilon = \operatorname{sgn} k),$$

$$(18') \quad \xi^n k Y_{\xi}^2 + Y_{\eta}^2 \neq 0.$$

Inoltre <sup>(1)</sup>:

$$(19) \quad X_{\eta} = 0; \quad X = 0; \quad X_{\xi} \neq 0; \quad Y_{\eta} \neq 0 \text{ per } \xi = 0.$$

Posto per  $|\xi|$  abbastanza piccolo:

$$(20) \quad X_{\xi} = \rho Y_{\eta}; \quad X_{\eta} = -\rho \xi^n k Y_{\xi} \quad (\rho(\xi, \eta) \neq 0),$$

dalla seconda delle (18) si ha:  $X = \xi \rho^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{|k|}$ .

Affinchè  $Y_{\xi}$  sia finita per  $\xi = 0$ , deve essere:

$$\rho^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{|k|} = \xi^{n-1} M(\xi, \eta) + N(\xi) \quad (N(0) \neq 0),$$

come si vede, sostituendo nelle (20); le (20) danno  $Y_{\xi}$  e  $Y_{\eta}$ , e per la condizione di integrabilità si ha:

$$(21) \quad M_{\eta\eta} + \xi^n k M_{\xi\xi} + F(\xi, \eta, M, M_{\xi}, M_{\eta}) = 0,$$

(1) Tralasciamo il caso  $X = X(\xi), Y = Y(\eta)$ , per cui, a meno che sia  $k = k(\eta)$  occorre uno studio minuto.

(2) Se  $n = 1$  si pone  $\rho^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{|k|} = M(\xi, \eta)$  colla condizione  $M \neq 0$ , e si pone invece  $N = 0$ .

dove  $F$  è una funzione razionale di  $M, M_\xi, M_\eta$ , finita e continua se:  $\xi^{n-1} M + N \neq 0$ ; presa ad arbitrio  $N(\xi)$  ( $N(0) \neq 0$ ), per es. posto  $N(\xi) = c$  costante non nulla, se si determina un integrale reale della (21) finito e continuo<sup>(1)</sup> in un dominio contenente la  $\xi = 0$ , si può ridurre  $k = \pm 1$  nella (11); si prova che si può determinare  $M(\xi, \eta)$  almeno se  $A, B, C$  sono funzioni analitiche, e quindi  $k$  e  $F$  sono olomorfe in un dominio contenente il punto  $\xi = \eta = 0$ .

In conclusione, usando di nuovo le coordinate  $x, y$ , nel primo caso si sono trovati i seguenti tipi di equazioni, essenzialmente distinti:

$$y^{2k+1} K(x, y) \chi_{xx} + \chi_{yy} = f(x, y, \chi, \chi_x, \chi_y); \quad y^{2k} K \chi_{xx} + \chi_{yy} = f;$$

$$y^{2k} K \chi_{xx} - \chi_{yy} = f,$$

che in casi particolari si possono ridurre a:

$$(a) \quad y^{2k+1} \chi_{xx} + \chi_{yy} = f; \quad (b) \quad y^{2k} \chi_{xx} + \chi_{yy} = f^{(2)}; \quad y^{2k} \chi_{xx} - \chi_{yy} = f.$$

Nel secondo caso, almeno se  $A, B, C$  sono analitiche, ci si può ridurre ad uno dei tipi<sup>(3)</sup>:

$$(a') \quad x^{2k+1} \chi_{xx} + \chi_{yy} = f; \quad (b') \quad x^{2k} \chi_{xx} + \chi_{yy} = f; \quad (c') \quad x^{2k} \chi_{xx} - \chi_{yy} = f.$$

(1) Per  $n = 1$  inoltre mai nullo.

(2) Equazioni della forma (a) e (b) sono considerate da HOLMGREN, *Sur un problème aux limites pour l'équation*  $y^m \chi_{xx} + \chi_{yy} = 0$ , « Arkiv », B. 19, 1926.

(3) Un'esposizione completa delle questioni qui trattate sarà data prossimamente nei « Rendic. del R. Istituto Lombardo ».

**Matematica (Analisi).** — *Funzioni a variazione limitata continue verso destra.* Nota di T. VIOLA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio S. PINCHERLE.

1.  $F(x)$  sia una funzione continua verso destra in  $a^-b$ . Supposto che essa abbia variazione limitata, i suoi punti di discontinuità in  $a^-b$  sono tutti di prima specie e costituiscono un aggregato numerabile. Se  $x_0$  è un punto generico di  $a^-b$ , chiamo « salto di  $F(x)$  in  $x_0$  » il valore assoluto  $|F(x_0) - F(x_0 - 0)|$ .

Indico per brevità con  $I(x, y)$  il valore assoluto dell'incremento di  $F(x)$  fra due punti generici  $x, y$  di  $a^-b$ :

$$I(x, y) = |F(x) - F(y)|.$$

**TEOREMA.** — Se  $F(x)$  è una funzione continua verso destra e a variazione limitata su tutto l'intervallo  $a^-b$ , assegnato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , ne esiste un altro  $\delta > 0$  tale che, se  $\alpha^- \beta$  è un qualunque intervallo parziale di  $a^-b$  di ampiezza  $\lambda \leq \delta$ , l'oscillazione di  $F(x)$  in  $\alpha^- \beta$  differisce per meno di  $\varepsilon$  dal maggiore dei salti di  $F(x)$  in  $\alpha^- \beta$ .

*Dim.* I punti di  $a^-b$  diversi da  $b$  nei quali il salto di  $F(x)$  è  $\geq \frac{\varepsilon}{2}$ , se esistono, sono in numero finito: siano essi, disposti in ordine crescente,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

In  $a$  la  $F(x)$  è continua verso destra. Esiste perciò un punto  $a''$  tale che  $a < a'' < \xi_1$  e che per ogni coppia di punti  $x, x'$  appartenente ad  $a^-a''$ , è  $I(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$ . A causa che  $b$  non può essere punto di discontinuità di seconda specie esiste un punto  $b'$  tale che  $\xi_n < b' < b$  e che per ogni coppia di punti  $x, x'$  appartenenti a  $b'^-b$  ed entrambi  $\neq b$ , è  $I(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Rinchiudiamo ora ciascuno dei punti  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) in un intorno bilaterale  $\xi'_i - \xi''_i$  tale che l'oscillazione di  $F(x)$  nell'intervallo semichiuso  $\xi'_i - \xi_i$  sia  $< \frac{\varepsilon}{4}$  e nell'intervallo chiuso  $\xi_i - \xi''_i$  sia  $< \frac{\varepsilon}{4}$ . Allora l'oscillazione di  $F(x)$  in  $\xi'_i - \xi''_i$  differisce per meno di  $\frac{\varepsilon}{2}$  dal salto in  $\xi_i$ . La scelta degl'intorni  $\xi'_i - \xi''_i$  sia fatta in modo che

$$a'' < \xi'_1, \quad \xi''_i < \xi'_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \xi''_n < b'.$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

Poniamo quest'ultima condizione non perchè sia necessaria al ragionamento che segue, ma soltanto per evitare complicazioni inutili.

Consideriamo uno qualunque dei segmenti  $\xi_i'' - \xi_{i+1}'$ . Ogni suo punto ha salto  $< \frac{\varepsilon}{2}$  e si può quindi rinchiudere in un intorno bilaterale nel quale

l'oscillazione di  $F(x)$  è ancora  $< \frac{\varepsilon}{2}$ . Per il noto lemma di Heine-Borel

si può quindi ricoprire l'intero segmento  $\xi_i'' - \xi_{i+1}'$  con un insieme  $\Delta_{i+1}$  d'intervalli in numero finito, in ciascuno dei quali l'oscillazione di  $F(x)$  è  $< \frac{\varepsilon}{2}$ . Analogamente dicasi per i segmenti  $a'' - \xi_1'$ ,  $\xi_n'' - b'$ .

Indico con  $\Delta$  l'aggregato costituito da tutti gl'intorni così determinati dei punti  $a, \xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $b$  e da tutti gl'intervalli di tutti i  $\Delta_{i+1} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ . L'aggregato  $\Delta$  ricopre l'intero intervallo  $a - b$  ed è composto di un numero finito di segmenti i cui estremi possiamo indicare, nell'ordine in cui s'incontrano andando da  $a$  verso  $b$ , con  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Dico che basta prendere  $\delta$  minore del minimo dei segmenti  $a_j - a_{j+1} (j = 1, 2, \dots, m-1)$ . Infatti se  $\alpha - \beta$  è un qualunque segmento contenuto in  $a - b$  e di ampiezza  $\lambda \leq \delta$ , osserviamo anzitutto che in  $\alpha - \beta$  cade al più uno dei punti di divisione  $a_j$  e quindi al più uno dei punti  $\xi_i$ . In quest'ultimo caso  $\xi_i$  è certamente il punto di  $\alpha - \beta$  nel quale il salto di  $F(x)$  è massimo e l'oscillazione di  $F(x)$  in  $\alpha - \beta$  differisce dal salto  $\xi_i$  per meno di  $\varepsilon$ . Se  $\alpha - \beta$  non contiene nessun  $\xi_i$ , l'oscillazione di  $F(x)$  in  $\alpha - \beta$  è  $< \varepsilon$  e quindi, a più forte ragione, differisce per meno di  $\varepsilon$  dal maggior salto contenuto in  $\alpha - \beta$ . c. d. d.

Il teorema dimostrato enuncia una proprietà che offre analogia con quella della continuità uniforme delle funzioni continue bilateralmente.

2. LEMMA. — Se  $F(x)$  è una funzione continua verso destra e a variazione limitata su tutto l'intervallo  $a - b$ , assegnato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , ne esiste un altro  $\delta > 0$  tale che, se  $\alpha - \beta$  è un qualunque intervallo parziale di  $a - b$  di ampiezza  $\lambda \leq \delta$  e se  $\gamma$  è un qualunque punto interno ad  $\alpha - \beta$ , è

$$I(\alpha, \beta) > I(\alpha, \gamma) + I(\gamma, \beta) - \varepsilon.$$

Dim. Determiniamo il  $\delta$  definito nel teorema precedente corrispondentemente al valore  $\frac{\varepsilon}{4}$  di  $\varepsilon$ : sia  $\alpha - \beta$  un intervallo di ampiezza  $\lambda \leq \delta$ . In esso sia  $\xi$  il punto ove il salto è massimo. A causa della costruzione fatta al numero precedente, negl'intervalli semi aperti  $\alpha - \xi$ ,  $\xi - \beta$  non esistono salti  $\geq \frac{\varepsilon}{8}$  e quindi l'oscillazione è  $< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{3}{8}\varepsilon$ . Ciò posto, preso  $\gamma$



ad arbitrio, sia, per fissare le idee,  $\gamma - \beta$  l'intervallo in cui non cade  $\xi$ . È

$$I(\gamma, \beta) < \frac{3}{8} \varepsilon,$$

$$I(\alpha, \beta) \geq I(\alpha, \gamma) - I(\gamma, \beta) = I(\alpha, \gamma) + I(\gamma, \beta) - \\ - 2 I(\gamma, \beta) > I(\alpha, \gamma) + I(\gamma, \beta) - \frac{6}{8} \varepsilon.$$

3. Anche per le funzioni continue verso destra a variazione limitata vale il seguente teorema fondamentale, ben noto per le funzioni continue bilateralmente.

**TEOREMA.** — *La variazione di una funzione  $F(x)$  continua verso destra e a variazione limitata, relativa a una divisione qualunque, tende uniformemente verso la variazione totale di questa funzione quando il massimo  $\lambda$  delle lunghezze degli intervalli impiegati tende a zero.*

*Dim.* Dico che, assegnato ad arbitrio un numero  $\eta > 0$ , esiste un numero  $\delta > 0$  tale che, se  $v$  è la variazione corrispondente ad una qualunque divisione  $D$  di  $a - b$  in parti tutte di ampiezza  $< \delta$ , è

$$V - v < \eta,$$

essendo  $V$  la variazione totale di  $F(x)$  in  $a - b$ .

Poichè  $V$  è, per definizione, il limite superiore delle variazioni corrispondenti a tutte le divisioni possibili di  $a - b$  in parti, esiste una divisione  $\bar{D}$  di  $a - b$  in parti tale che la corrispondente variazione  $\bar{v}$  differisce per meno di  $\frac{\eta}{2}$  da  $V$ . Dico precisamente che basta scegliere  $\delta$  minore di tutte le lunghezze degli intervalli di  $\bar{D}$  e inoltre tale che si verifichi il lemma del numero precedente con  $\varepsilon < \frac{\eta}{2n}$ , essendo  $n$  il numero dei punti di divisione di  $\bar{D}$ .

Infatti anzitutto, in queste ipotesi, in ogni intervallo della divisione  $D$  cade al più un punto di divisione di  $\bar{D}$ . Sia  $\bar{a}_i$  uno dei punti di divisione in  $\bar{D}$ . Siano  $a_i, a'_i$  i due punti della divisione  $D$  più prossimi ad  $\bar{a}_i$ , tali che  $a_i \leq \bar{a}_i < a'_i$ . La variazione  $v$  relativa a  $D$  è la somma delle variazioni calcolate mediante la divisione  $D$  negli intervalli  $a'_{i-1} - a_i$ , variazione che indichiamo con  $v(a'_{i-1}, a_i)$ , e degli incrementi (in valore assoluto) nei singoli intervalli  $a_i - a'_i$ . Si ha

$$I(a_i, a'_i) > I(a_i, \bar{a}_i) + I(\bar{a}_i, a'_i) - \varepsilon,$$

e quindi

$$v > \sum v(a'_{i-1}, a_i) + \sum [I(a_i, \bar{a}_i) + I(\bar{a}_i, a'_i)] - n\varepsilon.$$

Ma è

$$\bar{v} = \Sigma I(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}) < \Sigma [I(\bar{a}_i, a'_i) + v(a'_i, a_{i+1}) + I(a_{i+1}, \bar{a}_{i+1})]$$

e cioè

$$\bar{v} < \Sigma v(a'_{i-1}, a_i) + \Sigma [I(a_i, \bar{a}_i) + I(\bar{a}_i, a'_i)].$$

Quindi

$$v > \bar{v} - n\varepsilon > \bar{v} - \frac{\eta}{2},$$

$$V - v < V - \bar{v} + \frac{\eta}{2} < \eta \quad \text{c. d. d.}$$

4. Invece di considerare delle suddivisioni dell'intervallo  $a \text{---} b$  in un numero finito di parti, si possono considerare delle suddivisioni di  $a \text{---} b$  in un numero infinito di parti, prendendo cioè come intervalli parziali gl'intervalli contigui a un insieme chiuso riduttibile di punti. Questo tipo di suddivisioni è più generale e fornisce delle variazioni  $v$  che non sono più delle somme finite, ma delle serie, ogni addendo essendo costituito dal valore assoluto della differenza dei valori delle funzioni negli estremi di un intervallo contiguo.

Orbene, mentre per le funzioni continue bilateralmente si dimostra <sup>(1)</sup> che anche questo tipo più generale  $v$  di variazione tende uniformemente verso la variazione totale, quando il massimo  $\lambda$  della lunghezza degli intervalli contigui tende a 0, tale proprietà non è più vera per le funzioni che sono continue da una parte sola. Un esempio semplice ce ne convince subito: se per la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } 0 \text{---} 1 \\ 1 & \text{in } 1 \text{---} 2 \end{cases}$$

si calcola  $v$  relativamente a un aggregato avente come punto limite, e precisamente punto limite verso la sua sinistra, il punto  $x = 1$ , si trova  $v = 0$  qualunque sia tale aggregato, mentre è chiaro che la variazione totale è  $V = 1$ .

5. Da ultimo vale la pena di osservare che le dimostrazioni dei numeri 1 — 3 non sfruttano come condizione *essenziale* la continuità di  $F(x)$  da una *medesima* parte in tutto  $a \text{---} b$ . Le proposizioni sono vere per le funzioni  $F(x)$  continue da una sola parte in ciascun punto di  $a \text{---} b$ , anche se tale parte è per alcuni punti la destra e per gli altri la sinistra.

(1) Vedi per es. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 1928, p. 55.

**Matematica.** — *Un teorema di univocità relativo all'equazione di Poisson.* Nota di A. MASOTTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CUSOTTI.

1. Sia  $S$  un campo spaziale connesso, il cui contorno  $\sigma$  consta di una o più superficie, in ciascun punto delle quali è determinata la normale  $n$ , che si suppone orientata verso l'interno del campo. Assunto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O(x, y, z)$ , sia  $u(x, y, z)$  una funzione che soddisfa le seguenti condizioni: nel campo e sul contorno è funzione uniforme, finita e continua, ed ammette derivate prime finite e continue; ammette derivate seconde, finite ed integrabili, nel campo, escluso eventualmente il contorno e superficie, linee e punti interni; se il campo è infinito, la funzione e la sua derivata secondo una direzione generica  $r$ , in un punto qualunque  $P$  del campo, rispettano le disequaglianze

$$(1) \quad \rho |u| < Q \quad , \quad \rho^2 \left| \frac{du}{dr} \right| < Q$$

essendo  $\rho$  la distanza di  $P$  da un punto fisso; e  $Q$  una costante positiva; nel campo,  $u$  soddisfa l'equazione di Poisson:

$$(2) \quad \Delta_2 u = f(x, y, z);$$

sul contorno,  $u$  e la sua derivata normale

$$(3) \quad v = \frac{du}{dn},$$

sono collegate da una relazione del tipo

$$(4) \quad F(x, y, z, u, v) = 0,$$

o, sopra parti diverse del contorno, da relazioni diverse dello stesso tipo (cioè involgenti le stesse variabili, potendo una o più di esse mancare):  $F$  è simbolo di funzione non necessariamente continua rispetto agli argomenti  $x, y, z$  ma derivabile rispetto agli argomenti  $u$  e  $v$ , e tale che, in ogni punto del contorno, le derivate  $F'_u$  e  $F'_v$  non possano essere, per qua-

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

lunque coppia di valori di  $u$  e  $v$ , contemporaneamente maggiori, oppure minori, dello zero, nè contemporaneamente nulle (eccezion fatta, eventualmente, di punti e linee del contorno, dove le predette derivate si possono insieme annullare, o possono avere lo stesso segno).

Ci proponiamo di dimostrare che la funzione  $u$  è generalmente l'unica che soddisfa a queste condizioni; solo nel caso in cui il campo è limitato, e la relazione (4) non contiene esplicitamente la  $u$ , altre funzioni soddisfano alle stesse condizioni: tutte le funzioni che differiscono dalla  $u$  per una costante additiva.

La dimostrazione di questo teorema di univocità, che è esposta nel § 2, sussiste anche per l'analogo teorema relativo al caso in cui il campo considerato è piano.

Qui vogliamo osservare che se la relazione (4) è del tipo

$$(5) \quad u - \varphi(x, y, z) = 0,$$

oppure del tipo

$$(6) \quad v - \psi(x, y, z) = 0,$$

il teorema è già noto: è il teorema di univocità di Lejeune Dirichlet<sup>(1)</sup>. Lo stesso si deve dire se la relazione (4) è del tipo

$$(7) \quad \alpha u + \beta v + \gamma = 0,$$

essendo  $\alpha, \beta, \gamma$  funzioni di  $x, y, z$ ; in tal caso, infatti, si possiede il teorema di univocità, con la condizione che abbiano sempre segni opposti le due funzioni  $\alpha$  e  $\beta$ <sup>(2)</sup>.

(1) V. ad es. MAGGI, *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico*, § 57 (Milano, Hoepli, 1931). LEJEUNE DIRICHLET, *Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène* (« Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) », Bd. 32, 1846, pp. 80-84), e *Ueber die charakteristischen Eigenschaften des Potentials einer auf einer oder mehreren endlichen Flächen verteilten Masse* (« Bericht über die Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften », 1846, pp. 211-212) (*Werke*, vol. II, pp. 9-16 e 17-20. Berlin, 1897); *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, Erster Abschnitt, § 7 (lezioni pubblicate da Grube; Leipzig, Teubner, 1876).

(2) V. ad es. FRANK und v. MISES, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Erster Teil, p. 622 (2. Auf., Braunschweig, Vieweg, 1930). - V. anche PICARD, *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm*, §§ 13 e 14 (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXII, 1906, pp. 241-259); BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare*, § 8 (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVII, 1911-1912, pp. 22-37); GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. III, §§ 524 e 612-614 (IV ed.; Paris, Gauthier-Villars, 1927). - Ci permettiamo di rilevare qui, incidentalmente, la opportunità di chiamare « problema di Fourier » quello che concerne la determinazione di una funzione armonica soddisfacente la condizione al contorno (7): v. FOURIER, *Théorie de la Chaleur*, Ch. II, Sect. VI-VII (*Oeuvres*, vol. I, pp. 107-132. Paris, 1888).

Rileviamo ancora che, analogamente a quanto si fa pel teorema di Dirichlet, si dimostra che il precedente teorema di univocità sussiste anche se, ferme restando le altre condizioni, la funzione  $u$  e le sue derivate prime cessano di essere continue sopra una o più superficie  $\sigma^*$ , immerse nel campo, pur mantenendosi la continuità sulle due opposte pagine di ciascuna di esse, e manifestandosi in un salto della  $u$  e della derivata normale quando si passa da un punto  $P_1$  di una pagina di  $\sigma^*$  al punto  $P_2$ , ad esso affacciato, dell'altra: alle predette condizioni si devono, però, aggiungere ora quelle espresse dalle eguaglianze

$$(8) \quad u_1 - u_2 = \mu(x, y, z),$$

$$(9) \quad v_1 - v_2 = \nu(x, y, z),$$

che caratterizzano la discontinuità della  $u$  e quella della derivata normale  $v$  (secondo la normale a  $\sigma^*$  comunque orientata) quando si passa da  $P_1$  a  $P_2$  <sup>(1)</sup>. Lo stesso si deve dire se il campo  $S$  è diviso da superficie  $\sigma^{**}$  in parti  $S_1, S_2, \dots$  alle quali competono costanti positive  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  tali che sulla superficie che separa due regioni  $S_i$  e  $S_j$  sia soddisfatta per la  $u$  una relazione del tipo (8), e per la  $v$  una relazione del tipo <sup>(2)</sup>

$$(10) \quad \lambda_i v_i - \lambda_j v_j = \nu(x, y, z).$$

2. Ammessa l'esistenza di una seconda funzione  $u'$ , che rispetta le condizioni qualitative enunciate sul principio del § 1, è soluzione della (2), e soddisfa, insieme alla sua derivata normale

$$(11) \quad v' = \frac{du'}{dn},$$

la condizione al contorno (4), sicchè

$$(12) \quad \Delta_2 u' = f(x, y, z), \quad \text{in } S$$

$$(13) \quad F(x, y, z, u', v') = 0, \quad \text{su } \sigma$$

constateremo che dev'essere

$$(14) \quad u' = u,$$

(1) MAGGI, loc. cit., § 57.

(2) MAGGI, loc. cit., § 129; v. anche la Nota dello stesso Autore *Sulla generalizzazione e applicazione di un teorema di univocità* («Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», ser. II, vol. LXIII, 1930, pp. 1040-1042, e vol. LXIV, 1931, p. 1328; ristampata nel volume *Selecta*, pp. 187-189). KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mathematische Physik*, Dritter Band: *Electricität und Magnetismus*, Neunte Vorlesung, §§ 1-3 (Leipzig, Teubner, 1891).



o, in circostanze particolari che saranno specificate,

$$(14^{bis}) \quad u' = u + \text{costante.}$$

Infatti, posto

$$(15) \quad U = u' - u,$$

sicchè

$$(16) \quad \frac{dU}{dn} = v' - v,$$

discende dalle (2) e (12) che, nel campo S,

$$(17) \quad \Delta_2 U = 0,$$

mentre sul contorno

$$(18) \quad F(x, y, z, u', v') - F(x, y, z, u, v) = 0.$$

Al primo membro della (18) si può dare, in virtù del teorema dell'aumento finito, la forma seguente:

$$(u' - u) F'_u(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) + (v' - v) F'_v(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}),$$

dove

$$\bar{u} = u + \vartheta(u' - u), \quad \bar{v} = v + \vartheta(v' - v)$$

essendo  $\vartheta$  un conveniente numero reale compreso fra lo zero e l'unità; tenendo anche conto delle (15) e (16), la (18) diviene:

$$(19) \quad U F'_u(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) + \frac{dU}{dn} F'_v(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) = 0.$$

Da questa eguaglianza si trae l'annunciato teorema di univocità, come ora vedremo <sup>(1)</sup>.

a) Se, in ogni punto del contorno,  $F'_u$  e  $F'_v$  non si annullano per nessuna coppia di valori di  $u$  e  $v$ , ed hanno segni opposti (eccezion fatta, eventualmente, di punti e linee del contorno dove  $F'_u$  e  $F'_v$  si possono annullare, separatamente od insieme, od avere lo stesso segno), in virtù della

(1) L'artificio, semplice ed elegante, mediante il quale si passa dalla (18) alla (19), è già stato utilizzato: PICARD, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Ch. III, § 1 (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », IV série, t. VI, 1890, pp. 145-210). V. anche FRANK und v. MISES, loc. cit., p. 786.

(19)  $U$  e  $dU/dn$ , sul contorno (esclusi tali punti e linee), hanno lo stesso segno, o sono ambedue nulle; ma la relazione ben nota

$$(20) \quad \int_S \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dS = - \int_{\sigma} U \frac{dU}{dn} d\sigma,$$

che vale per qualunque funzione armonica che soddisfa le condizioni qualitative enunciate sul principio del § 1 — e tale è la nostra  $U$  — esclude la prima eventualità, sicchè si deve concludere che  $U$  e  $dU/dn$  sono nulle sul contorno; ne segue che  $U = 0$  in tutto il campo, e quindi  $u' = u$ . — Le predette condizioni concernenti la funzione  $F$  sono verificate, per esempio, quando  $F$  è funzione sempre crescente di  $u$  e sempre decrescente di  $v$ , o viceversa; questo avviene, in particolare, quando la relazione (4) è del tipo

$$(21) \quad F(x, y, z, \alpha u - \beta v) = 0,$$

$\alpha$  e  $\beta$  essendo funzioni di  $x, y, z$  (eventualmente costanti) che hanno sempre lo stesso segno, ed  $F'_t(x, y, z, t)$  non si annulla per alcun valore di  $t$ .

*b)* Se  $F'_v$  è identicamente nulla, sicchè  $F$  non contiene  $v$ , ed  $F'_u$ , in ogni punto del contorno, non si annulla per nessun valore di  $u$  (eccezion fatta, eventualmente, di punti o linee del contorno dove  $F'_u$  si può annullare), si deduce direttamente dalla (19) che  $U = 0$  sul contorno (anche in tali punti o su tali linee, in virtù della continuità di  $U$ ), e quindi  $U = 0$  in tutto il campo, ed  $u' = u$ . — Le predette condizioni sono verificate, per esempio, quando la (4) è del tipo (5): in questo caso  $F'_u = 1$ , e si ha il teorema di univocità per il problema di Dirichlet generalizzato <sup>(1)</sup>.

*c)* Se  $F'_u$  è identicamente nulla, sicchè  $F$  non contiene  $u$ , ed  $F'_v$ , in ogni punto del contorno, non si annulla per nessun valore di  $v$  (eccezion fatta, eventualmente, di punti o linee del contorno dove  $F'_v$  si può annullare), si deduce direttamente dalla (19) che  $dU/dn = 0$  sul contorno (anche in tali punti o su tali linee, in virtù della continuità di  $dU/dn$ ), e quindi, dalla (20), discende che  $U = \text{costante}$  in tutto il campo, e quindi  $u' = u + \text{costante}$ . Se il campo è illimitato si ha addirittura, in virtù della prima condizione (1), che  $U = 0$ , e alla stessa conclusione si perviene se, pur essendo il campo limitato, sopra parte del contorno la relazione (4) rientra nel tipo *b*); allora  $u' = u$ . — Le predette condizioni riguardanti la funzione  $F$  sono verificate, per esempio, quando la (4) è del tipo (6): in questo caso  $F'_v = 1$ ; se il campo è illimitato, o se, pur essendo limitato il campo, sopra parte del contorno la relazione (4) rientra nel tipo (5), allora si ha il teorema di univocità per il problema di Neumann generalizzato <sup>(2)</sup>.

(1) MAGGI, loc. cit., § 74.

(2) MAGGI, loc. cit., § 77.

**Matematica.** — *Sopra una generalizzazione del centro della sfera osculatrice.* Nota di M. ZEULI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Considero, in questa Nota, una varietà  $V_n$ , ad un numero qualunque  $n$  di dimensioni, immersa in uno spazio euclideo con  $2n$  dimensioni e definisco per ogni tangente di una curva della  $V_n$  un punto determinato, situato su una normale (pure ben determinata) alla varietà stessa. Pertanto ad ogni retta tangente in un punto ad una curva della  $V_n$  viene associata una normale, ben determinata, alla  $V_n$  stessa. Nel caso di  $n = 1$  il punto sopra definito è il centro del cerchio osculatore alla curva (piana) considerata.

Studio poi il caso di una  $V_n$  immersa in uno spazio euclideo con  $3n$  dimensioni e definisco, in corrispondenza ad ogni piano osculatore di una curva della  $V_n$ , un punto determinato, che nel caso particolare di  $n = 1$  viene ad essere il centro della sfera osculatrice alla curva considerata dello spazio ordinario.

1. Sia  $S_{2n}$  uno spazio euclideo a  $2n$  dimensioni e consideriamo una varietà generica  $V_n$  ad  $n$  dimensioni, luogo dei punti  $Q = Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , immersa in esso. Su essa prendiamo una linea qualunque  $l$  e ne siano  $Q, Q'$  due punti. Ricordando <sup>(2)</sup> che le normali a  $V_n$  in  $Q$  formano un  $S_n$ , osserveremo che gli  $S_n$  normali a  $V_n$  in  $Q$  e  $Q'$  avranno a comune un punto dell' $S_{2n}$ ; se ora si fa tendere  $Q'$  verso  $Q$  esso tenderà verso una posizione limite  $A$ , ed è chiaro che il vettore  $A - Q$  è normale in  $Q$  alla  $V_n$ .

Per ottenere questo vettore osserviamo che per ogni punto  $A$  dell' $S_n$  normale a  $V_n$  in  $Q$  sussistono le relazioni:

$$(1) \quad (A - Q) \times \frac{\partial Q}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Così, per ogni punto  $A$  dell' $S'_n$  normale nel punto  $Q' = Q + dQ$  alla  $V_n$ , sussisteranno le relazioni che risultano differenziando le (1), le quali sono:

$$(1') \quad (A - Q) \times d \frac{\partial Q}{\partial q_i} = dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

(2) BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, p. 166. (Zanichelli, Bologna, a. 1930). Indicheremo brevemente quest'opera con *Geom. diff.*

Il punto A deve pertanto soddisfare alle (1), (1').

Se si indica con  $d_n \frac{\partial Q}{\partial q_i}$  la proiezione ortogonale del vettore  $d \frac{\partial Q}{\partial q_i}$  sullo spazio  $S_n$  normale alla  $V_n$  in  $Q$ , si ha ancora dalle (1'):

$$(A - Q) \times d_n \frac{\partial Q}{\partial q_i} = dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_i}$$

od anche, indicando per brevità con  $\alpha_i$  l'omografia vettoriale

$$\alpha_i = \frac{d_n}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_i}$$

che trasforma vettori tangenti alla  $V_n$  in  $Q$  in vettori dell' $S_n$  normale a  $V_n$  in  $Q$ :

$$(1'') \quad (A - Q) \times \alpha_i dQ = dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_i}.$$

Il vettore  $A - Q$  appartiene all' $S_n$  normale alla  $V_n$  in  $Q$ , ed essendo note, mercè la (1''), le sue componenti (ortogonali) secondo gli  $n$  vettori linearmente indipendenti  $\alpha_i dQ$  di tale  $S_n$ , si può determinare  $A - Q$  con una formula del prof. Boggio<sup>(1)</sup>, che in questo caso può scriversi:

$$(2) \text{ am } (\alpha_1 dQ, \dots, \alpha_n dQ) (A - Q) = dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_1} \cdot E(\alpha_2 dQ, \dots, \alpha_n dQ) - \\ - dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_2} \cdot E(\alpha_1 dQ, \alpha_3 dQ, \dots, \alpha_n dQ) + \dots + \\ + (-1)^{n-1} dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_n} \cdot E(\alpha_1 dQ, \dots, \alpha_{n-1} dQ);$$

di qui, supponendo  $\text{am}(\alpha_1 dQ, \dots, \alpha_n dQ) \neq 0$ , si ricava  $A - Q$  e quindi il punto A.

Nella formula precedente il simbolo  $\text{am}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  indica il volume, con segno del parallelepipedo, ad  $n$  dimensioni, determinato dai vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , immaginati spiccati su uno stesso punto di  $S_n$ , (*Geom. diff.*, p. 141).

Il simbolo  $E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1})$ , che rappresenta il *prodotto esterno* della successione di vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$ , è quel vettore tale che, preso un vettore arbitrario  $\mathbf{a}$ , si ha (*Geom. diff.*, p. 158; oppure: LEVI-CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 182, Stock, Roma, a. 1925)

$$\mathbf{a} \times E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}) = \text{am}(\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}).$$

(1) BOGGIO, *Formule di calcolo vettoriale negli iperspazi e applicazioni*, p. 265 («Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVI, 1931).

Pertanto, ad ogni vettore  $dQ$  dell'  $S_n$  tangente corrisponde un solo vettore  $A - Q$  e quindi un solo punto  $A$  dello  $S_n$  normale; mentre invece, essendo  $\text{am}(\alpha_1 dQ, \dots, \alpha_n dQ)$  funzione di grado  $n$  in  $dQ$  ad ogni  $A - Q$  dello  $S_n$  normale corrispondono  $n$  vettori  $dQ$  dello  $S_n$  tangente. Si ha quindi una corrispondenza  $[1, n]$ .

Il luogo delle direzioni  $dQ$  per cui il punto  $A$  corrispondente è all'infinito è dato ovviamente dalla equazione:

$$\text{am}(\alpha_1 dQ, \alpha_2 dQ, \dots, \alpha_n dQ) = 0.$$

Il caso  $n = 2$  rientra nella trattazione perchè, se  $u, u_1, u_2$  sono vettori di un piano  $\pi$ , allora  $\text{am}(u_1, u_2) = \text{mod}(u_1 \wedge u_2)$ , ed  $E(u) = iu$  (dove  $i$  è il rotore di un retto nel piano  $\pi$ ).

Nel caso  $n = 1$  la costruzione prima indicata per ottenere il punto  $A$  ci dà il centro del cerchio osculatore in  $Q$  alla  $V_1$  (curva piana) contenuta nel piano  $S_2^{(1)}$ .

2. Si può studiare in modo analogo il caso di una generica  $V_n$  immersa in uno spazio euclideo  $S_{3n}$  con  $3n$  dimensioni.

Fissata sulla  $V_n$  una linea  $l$ , consideriamo in essa tre punti  $Q, Q', Q''$ . Le normali in essi alla  $V_n$ , formano (*Geom. differ.* p. 166) degli  $S_{2n}$ , con  $2n$  dimensioni, che, appartenendo ad un  $S_{3n}$ , avranno in generale a comune un sol punto dell' $S_{3n}$ ; se poi si fanno tendere  $Q'$  e  $Q''$  verso  $Q$ , tale punto tenderà ad una posizione limite  $A$ . Il vettore  $A - Q$  è normale in  $Q$  alla  $V_n$  e per ottenerlo partiamo dalle equazioni

$$(3) \quad (A - Q) \times \frac{\partial Q}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

che sussistono per ogni punto  $A$  dell' $S_n$  normale a  $V_n$  in  $Q$ . Seguendo il procedimento di poco sopra, e quindi differenziando le (3), una volta, se ci riferiamo al punto  $Q' = Q + dQ$ , e due volte per il punto  $Q'' = Q + dQ + d^2Q/2$ , si trova

$$(4) \quad \begin{cases} (A - Q) \times d \frac{\partial Q}{\partial q_i} = dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_i} \\ (A - Q) \times d^2 \frac{\partial Q}{\partial q_i} = dQ \times \frac{\partial Q}{\partial q_i} + 2 dQ \times d \frac{\partial Q}{\partial q_i} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

(1) Il caso  $n = 3$  è stato studiato nella Nota della dott. SACIOTTO: *Normali associate alle direzioni di una varietà generica a tre dimensioni di uno spazio lineare a 6 dimensioni*. (« Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », anno 1928-29, tomo LXXXVIII, parte II). Però i calcoli ivi fatti secondo i metodi del calcolo differenziale assoluto, sono assai meno semplici di quelli qui esposti.



Poichè il vettore  $A - Q$  appartiene all' $S_{2n}$  normale in  $Q$  alla  $V_n$ , è chiaro che i primi membri delle (4) non mutano sostituendo alle  $d \frac{\partial Q}{\partial q_i}$ ,  $d^2 \frac{\partial Q}{\partial q_i}$  le loro proiezioni ortogonali  $d_n \frac{\partial Q}{\partial q_i}$ ,  $d_n^2 \frac{\partial Q}{\partial q_i}$  su questo  $S_{2n}$ , e allora le (4) ci danno le proiezioni ortogonali del vettore  $A - Q$  sopra i  $2n$  vettori ora considerati. Si vengono così ad ottenere  $2n$  equazioni che ci danno le  $2n$  proiezioni del vettore  $A - Q$  sopra  $2n$  vettori linearmente indipendenti di tale  $S_{2n}$ , perciò si può subito avere  $A - Q$  valendoci della citata formula del prof. Boggio. In tal modo vediamo che ad ogni piano osculatore di una curva  $l$  della  $V_n$  viene a corrispondere un solo punto  $A$ , situato su una normale determinata della  $V_n$  in  $Q$ .

Nel caso di  $n = 1$  la costruzione per ottenere  $A$  ci porta al centro della sfera osculatrice nel punto  $Q$  della  $V_1$  (curva sghemba) contenuta nello spazio ordinario  $S_3$ .

3. In modo analogo si potrebbe considerare una  $V_n$  immersa in un  $S_{kn}$ , una curva  $l$  di essa ed il punto comune ai  $k$  spazi normali alla  $V_n$  in  $k$  punti infinitamente vicini della  $l$ .

**Matematica.** — *La détermination d'une fonction harmonique par des conditions initiales globales.* Nota di N. CIORANESCU, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Généralement, la plupart des problèmes aux limites qu'on rencontre dans la physique mathématique et qui ont pour objet la détermination d'une certaine fonction harmonique  $U(M)$ , régulière dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Sigma$ , sont de la forme:

$$(1) \quad a(P) U(P) + b(P) \left( \frac{dU}{dn} \right)_P = f(P)$$

où  $a(R)$ ,  $b(P)$ ,  $f(P)$  sont des fonctions données du point  $P$  de  $\Sigma$ . À cause de la linéarité de la condition (1), par rapport aux valeurs de  $U$  et de sa dérivée normale sur  $\Sigma$ , ces problèmes aux limites conduisent, comme l'on sait très bien, à des équations intégrales du type de Fredholm. Je me suis proposé de voir s'il n'y a pas des conditions complémentaires, en un certain sens plus générales que les conditions (1), susceptibles aussi de déterminer une fonction harmonique dans  $\Omega$ , d'une manière univoque ou avec un degré d'indétermination bien délimité.

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

Ces conditions complémentaires porteront non pas seulement sur les valeurs de  $U$  et de sa dérivée normale sur la frontière du domaine, mais sur les valeurs de ces quantités dans tout le domaine  $\Omega$ . Par conséquent, nous chercherons à déterminer  $U$  par des *conditions globales*, telles que les conditions à la frontière en seront des cas particuliers. Ces conditions globales seront aussi linéaires par rapport aux valeurs de  $U$  et de ses dérivées du premier ordre, ces seront des fonctionnelles linéaires par rapport à ces valeurs.

Comme il n'y a pas des difficultés provenant du nombre de dimensions, nous allons supposer qu'il s'agit des fonctions harmoniques à deux variables.

2. Soit  $D$  un domaine à deux dimensions, dont la frontière  $C$  est une courbe simple fermée, représentée par:

$$(2) \quad x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad (0 \leq t < 1)$$

et on suppose en outre que  $t$  est l'arc sur  $C$ , ce qui peut se faire par un choix convenable d'unité. Considérons une famille de courbes simples fermées, à un paramètre,  $C_\lambda$ , définies par les relations:

$$(3) \quad x = x(t; \lambda) \quad ; \quad y = y(t; \lambda) \cdot [0 \leq t < 1 \quad ; \quad 0 \leq \lambda \leq 1]$$

les fonctions étant continues par rapport aux deux arguments. Les courbes  $C_\lambda$  doivent en outre satisfaire aux conditions suivantes:

1° par chaque point de  $D$  il passe une courbe  $C_\lambda$  et une seule;

2° pour  $\lambda = 0$   $C_0$  se réduit à un point  $M_0$  situé dans  $D$ ;

3° la courbe correspondante à  $\lambda = 1$  est identique à la frontière  $C$  de  $D$ .

Si la courbe  $C$  est considérée comme homéomorphe au cercle unité, les courbes  $C_\lambda$  peuvent être considérées comme homéomorphes à la famille de cercles:

$$x = \lambda \cos 2\pi t \quad ; \quad y = \lambda \sin 2\pi t.$$

Proposons nous de déterminer une fonction  $U$ , harmonique dans  $D + C$ , par la condition initiale:

$$(4) \quad \int_0^1 U_{C_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t)$$

$U_{C_\lambda}$  désignant la valeur de  $U(M)$  sur la courbe  $C_\lambda$ ,  $\alpha(\lambda)$  étant une fonction à variation bornée dans  $(0, 1)$  et  $f(t)$  étant une fonction continue donnée.

On suppose en outre, pour des raisons qu'on verra plus bas, que la fonction  $\alpha(\lambda)$  à un saut à gauche pour  $\lambda = 1$ , qu'on suppose égal à un, sans diminuer la généralité.

L'interprétation de la condition globale (4) est facile à faire: (tout au moins dans le cas  $\int_0^1 d\alpha(\lambda) \neq 0$ ). On cherche à déterminer la fonction harmonique  $U$  connaissant la moyenne de ses valeurs prises avec un certain poids sur les courbes  $C_\lambda$ , et en attribuant un poids fini à ses valeurs frontières. On voit facilement que le problème classique de Dirichlet pour  $C$ , est un cas particulier des conditions (4).

3. Pour montrer l'existence d'une solution satisfaisant à la condition (4), cherchons  $U$  sous la forme d'un potentiel de double couche:

$$(5) \quad U(P) = \int_0^1 \rho(\tau) \frac{\cos \varphi}{r} d\tau$$

où  $\rho(\tau)$  est la densité de la couche au point  $M(\tau)$  de  $C$ ,  $r = \overline{MP}$ . Écrivons d'abord la condition (4) de manière à mettre en évidence le saut de  $\alpha(\lambda)$ . Elle peut s'écrire sous la forme:

$$(4') \quad U_{C-} + \int_0^{1-\alpha} U_{C_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t)$$

$U_{C-}$  désignant la valeur de  $U$  donnée par (5) lorsque  $P \rightarrow C$  par l'intérieur. En tenant compte de propriétés élémentaires du potentiel de double couche et du fait que  $P$  tends vers le point  $\tau = t$  de  $C$ , on trouve que la densité  $\rho(t)$  de ce potentiel, vérifie l'équation:

$$(6) \quad \rho(t) + \int_0^1 \Phi(t; \tau) \rho(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} f(t)$$

où l'on a posé:

$$\Phi(t; \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{\cos \varphi}{r} \right)_{C_\lambda} d\alpha(\lambda).$$

Par conséquent, comme dans le cas du problème de Dirichlet,  $\rho(t)$  est donnée par une équation de Fredholm.

Il en résulte qu'il existe en général une solution unique  $U$  satisfaisant aux conditions (4). Mais, il peut se faire que la valeur  $un$  soit une valeur singulière pour le noyau  $\Phi(t; \tau)$  et l'équation intégrale (6) dans laquelle on a introduit un paramètre. Dans ce cas-là il en résulte qu'il existe une solution  $U \neq 0$  dans  $D + C$ , satisfaisant à la condition:

$$\int_0^1 U_{C_\lambda} d\alpha(\lambda) = 0.$$

On dira dans ce cas que les courbes  $C_\lambda$  et la fonction  $\alpha(\lambda)$  correspondent à des conditions complémentaires singulières. Nous nous dispensons de donner ici un tel exemple.

4. Si l'on suppose que les courbes  $C_\lambda$  sont douées de normales en chacun de leurs points, on peut se proposer de chercher la fonction harmonique qui satisfait dans  $D + C$  à la condition initiale:

$$(7) \quad \int_0^1 \left( \frac{dU}{dn} \right)_{C_\lambda} d\beta(\lambda) = f(t)$$

$\left( \frac{dU}{dn} \right)_{C_\lambda}$  désignant la dérivée de  $U(P)$  suivant la direction de la normale en  $P$  à la courbe  $C_\lambda$  qui passe par  $P$ . Cherchons dans ce cas  $U$  sous la forme d'un potentiel de simple couche:

$$U(P) = \int_0^1 \rho(\tau) \log \frac{1}{r} d\tau.$$

On trouve facilement que l'on a, en considérant  $P$  comme appartenant à la courbe  $C_\lambda$ :

$$\left( \frac{dU}{dn} \right)_{C_\lambda} = \int_0^1 \rho(\tau) \frac{\cos \psi_\lambda}{r} d\tau$$

en désignant par  $\psi_\lambda$  l'angle de  $PM$  avec la normale en  $P$  à  $C_\lambda$ . En tenant compte du saut à gauche (égal à un) de  $\beta(\lambda)$  pour  $\lambda = 1$  et du fait lorsque  $P \rightarrow C$  on a:

$$\left( \frac{dU}{dn} \right)_{C-} = -\pi\rho(t) + \int_0^1 \rho(\tau) \frac{\cos \psi}{r} d\tau$$

on trouve que la densité  $\rho(t)$  satisfait à l'équation intégrale:

$$(8) \quad \rho(t) - \int_0^1 \Psi(t; \tau) \rho(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} f(t) = 0$$

où l'on a posé:

$$\Psi(t; \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos \psi_\lambda}{r} d\beta(\lambda).$$

Le problème de Neumann est un cas particulier de la condition globale (7).

Enfin, les conditions globales de la forme:

$$(9) \quad \int_0^1 \tilde{\omega}_1(t; \lambda) U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) + \int_0^1 \tilde{\omega}_2(t; \lambda) \left( \frac{dU}{dn} \right)_{c_\lambda} d\beta(\lambda) = f(t)$$

conduisent, pour la densité du potentiel auquel on identifie  $U$ , à des équations intégrales de troisième espèce, et par conséquent on ne peut plus affirmer, dans le cas général, l'existence d'une solution holomorphe dans  $D + C$ .

Ces considérations seront développées dans un mémoire qui paraîtra ailleurs.

**Matematica.** — *Sur les limites de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche.* Nota di RUY LUIS GOMES, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. De l'article antérieur<sup>(2)</sup> nous savons que

$$\left[ \frac{dV}{dn} \right]_P = - \int_S \mu \frac{\cos \psi_1}{r'^2} d\sigma$$

et nous y avons démontré que l'intégrale figurant au second membre ne cesse pas d'avoir une valeur finie quand le point  $P$  coïncide avec un point quelconque de la surface  $S$ .

Maintenant nous nous proposons de déterminer les limites de la dérivée normale  $\left[ \frac{dV}{dn} \right]_P$  quand le point  $P$  tend vers un point  $P_0$  de  $S$ , en restant toujours d'un même côté de la surface  $S$ .

Pour cela, nous supposons vérifiées les trois hypothèses de notre premier article: continuité de  $\mu$  au point ordinaire  $P_0$  et limitation des dérivées secondes du premier membre de l'équation  $F(x, y, z) = 0$  de la surface  $S$ ; et nous admettons de plus que dans son mouvement vers  $P_0$  le point  $P$  ne sort jamais d'une droite invariable que au voisinage de  $P_0$  est toute intérieure ou extérieure à  $S$ .

Ces conditions satisfaites, nous démontrerons les deux formules déjà connues<sup>(3)</sup> (bien que les hypothèses soient moins générales)

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) Pp. 533-535 de ce même volume des « Rendiconti ».

(3) GOURSAT, vol. III de l'Analyse, pp. 281, 282, 283, 284.



$$\left[ \frac{dV}{dn} \right]_i = \lim_{P_i \rightarrow P_o} \left[ \frac{dV}{dn} \right]_{P_i} = - 2 \pi \mu_{P_o} - \int_S \mu \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma$$

$$\left[ \frac{dV}{dn} \right]_e = \lim_{P_e \rightarrow P_o} \left[ \frac{dV}{dn} \right]_{P_e} = 2 \pi \mu_{P_o} - \int_S \mu \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma,$$

en représentant par  $P_i$  et  $P_e$ , respectivement, un point intérieur et un point extérieur à la surface  $S$ .

2. Soit  $\varphi_i$  l'angle de la direction  $M'P_i$  avec la normale intérieure au point  $M'$  de  $S$ .

En conservant les autres notations déjà employées<sup>(1)</sup>, nous avons, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos \psi_i = \cos \varphi_i \cos \theta + \sin \varphi_i \sin \theta \cos \Psi_i$$

et il s'en suit

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dV}{dn} \right]_{P_i} + \int_S \mu \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma + 2 \pi \mu_{P_o} = & - \{ W(P_i) - [W(P_o) + 2 \pi \mu_{P_o}] \} \\ & - \int_S \mu \sin \theta \left[ \frac{\sin \varphi_i \cos \Psi_i}{r'^2} - \frac{\sin \varphi \cos \Psi}{r^2} \right] d\sigma, \end{aligned}$$

$W$  étant le potentiel de double couche dû à une masse attirante concentrée sur  $S$  avec la densité  $\mu' = \mu \cos \theta$ .

Quand le point  $P_i$  tend vers  $P_o$  d'une manière quelconque  $W(P_i)$  tend vers  $W(P_o) + 2 \pi \mu_{P_o}$  — le crochet qui figure dans l'égalité précédente tend vers zéro.

Étudions alors l'intégrale étendue à la surface  $S$ .

Nous pouvons l'écrire comme cela :

$$\begin{aligned} & \int_{S-\sigma} \mu \sin \theta \left[ \frac{\sin \varphi_i \cos \Psi_i}{r'^2} - \frac{\sin \varphi \cos \Psi}{r^2} \right] d\sigma + \\ & + \int_{\sigma} \mu \frac{\sin \theta}{r^2} \left[ \sin \varphi_i \cos \Psi_i \frac{r^2}{r'^2} - \sin \varphi \cos \Psi \right] d\sigma \end{aligned}$$

$\sigma$  représentant une petite région de  $S$  contenant le point  $P_o$  dans son intérieur.

Le rapport  $\frac{r}{r'}$  qui figure au seconde intégrale admet une limite supé-

(1) Article cité.

rière quelque soit la position du point  $P_i$  dans son mouvement rectiligne vers  $P_o$ .

En effet, si nous représentons par  $d$  la distance d'un point quelconque  $M'$  de  $S$  à la droite  $P_o P_i$  et par  $\alpha$  l'angle  $P_i P_o M'$  nous aurons

$$\frac{r}{r'} \leq \frac{r}{d} = \frac{r}{r \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Or, si le point  $M'$  se rapproche de  $P_o$ ,  $\alpha$  tend vers l'angle de la direction  $P_o P_i$  avec une certaine droite du plan  $\pi$  tangent en  $P_o$  à la surface  $S$  et cet angle ne peut pas être inférieur à l'angle  $\alpha_o$  d'inclinaison de  $P_o P_i$  — trajectoire rectiligne de  $P_i$  — sur le plan  $\pi$ .

Par conséquent, la droite  $P_o P_i$  étant invariable, le rapport  $\frac{1}{\sin \alpha}$  et à plus forte raison,  $\frac{r}{r'}$  resteront toujours inférieurs à une certaine limite  $L(\alpha_o)$ .

Nous le représentons ainsi parce qu'il dépend évidemment de la valeur de  $\alpha_o$ ; il tend même vers l'infini quand la droite correspondante se rapproche du plan tangent  $\pi$  — quand l'angle  $\alpha_o$  tend vers zéro.

Et c'est cette raison même que nous oblige à restreindre le mouvement de  $P_i$ , le supposant rectiligne<sup>(1)</sup>. Le rapport  $\frac{r}{r'}$  admettant ainsi la limite supérieure  $L(\alpha_o)$ , l'intégrale étendue à la petite région  $\sigma$  ne peut pas dépasser cet'autre :

$$\int_{\sigma} \mu [L(\alpha_o) + 1] \frac{\sin \theta}{r^2} d\sigma.$$

Mais nous avons démontré au premier article que

$$\sin \theta < l^2 r,$$

la petite région  $\sigma$  étant supposée intérieure à  $\gamma$ .

L'intégrale en question se comporte donc comme le potentiel de surface

$$\int_{\sigma} \mu l^2 [L(\alpha_o) + 1] \frac{d\sigma}{r}$$

et il s'en suit que

$$\left| \int_{\sigma} \mu \frac{\sin \theta}{r^2} \left[ \sin \varphi_i \cos \Psi_i \frac{r^2}{r'^2} - \sin \varphi \cos \Psi \right] d\sigma \right| < \frac{\delta}{3},$$

dès que la région  $\sigma$  ait été choisie suffisamment petite.

(1) Il suffit même que la trajectoire de  $P_i$  ne soit pas tangent à la surface  $S$  au point-limite  $P_o$ .

Déterminée ainsi la région  $\sigma$ , il vient immédiatement

$$\left| \int_{S-\sigma} \mu \sin \theta \left[ \frac{\sin \varphi_i \cos \Psi_i}{r'^2} - \frac{\sin \varphi \cos \Psi}{r^2} \right] d\sigma \right| < \frac{\delta}{3}$$

sous la seule condition

$$|P_i - P_o| < \varepsilon,$$

vu que la fonction intégrande se conserve uniformément continue dans toute la région  $S - \sigma$ , le point  $P_i$  ne faisant pas partie de cette même région.

Nous avons, donc, en dernier résultat

$$\begin{aligned} \left| \left[ \frac{dV}{dn} \right]_{P_i} + \int_S \mu \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma + 2 \pi \mu_{P_o} \right| &\leq |W(P_i) - [W(P_o) + 2 \pi \mu_{P_o}]| \\ &+ \left| \int_S \mu \sin \theta \left[ \frac{\sin \varphi_i \cos \Psi_i}{r'^2} - \frac{\sin \varphi \cos \Psi}{r^2} \right] d\sigma \right| \\ &< \frac{\delta}{3} + 2 \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

sous la condition

$$|P_i - P| < \varepsilon,$$

le point  $P_i$  ne sortant jamais d'une droite déterminée  $P_o P_i$ .

La première formule est donc démontrée.

Pour la seconde, on doit procéder de la même façon ayant regard pourtant aux propriétés du potentiel de double couche dans l'extérieur de la surface attirante  $S^{(1)}$ .

(1) Sur le sujet de cet article on peut consulter tous les livres déjà cités (au premier article).

**Meccanica.** — *A proposito della influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa.* Nota II di G. COLONNETTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. C. GUIDI.

Vi è un modo di mettere in evidenza il meccanismo dell'influenza dello sforzo di taglio sulle deformazioni elastiche di una trave inflessa, che mi è sempre sembrato tanto semplice quanto convincente: ed è quello di studiare il problema nel caso di una *trave reticolare a correnti paralleli*.

È noto infatti che in una tale trave gli sforzi nei correnti si esprimono in funzione del *solo* momento flettente, mentre quelli nelle aste di parete sono funzioni del *solo* sforzo di taglio <sup>(2)</sup>.

Si possono perciò con tutta facilità isolare i due fattori della deformazione, costruendo la deformata della trave nella ipotesi che siano nulle le deformazioni che dipendono solo dall'uno o solo dall'altro.

Volendo mettere in evidenza l'influenza dello sforzo di taglio basterà prescindere dalle deformazioni che dipendono dal solo momento flettente, vale a dire dalle variazioni di lunghezza delle aste di contorno.

Un simile calcolo è estremamente istruttivo.

Nella figura che accompagna questa Nota, esso è stato eseguito per una trave semplicemente appoggiata agli estremi e sollecitata da un unico carico in corrispondenza della sua mezzeria.

Nell'intento di meglio mettere in luce tutti gli aspetti del fenomeno, si è supposto che — conformemente del resto a quel che si verifica in pratica — le sezioni delle aste di parete vadan decrescendo dagli appoggi verso la mezzeria della trave; più precisamente, si è adottata una certa sezione resistente per le aste

1.2 , 2.3 , 3.4 , 4.5

e per le loro simmetriche

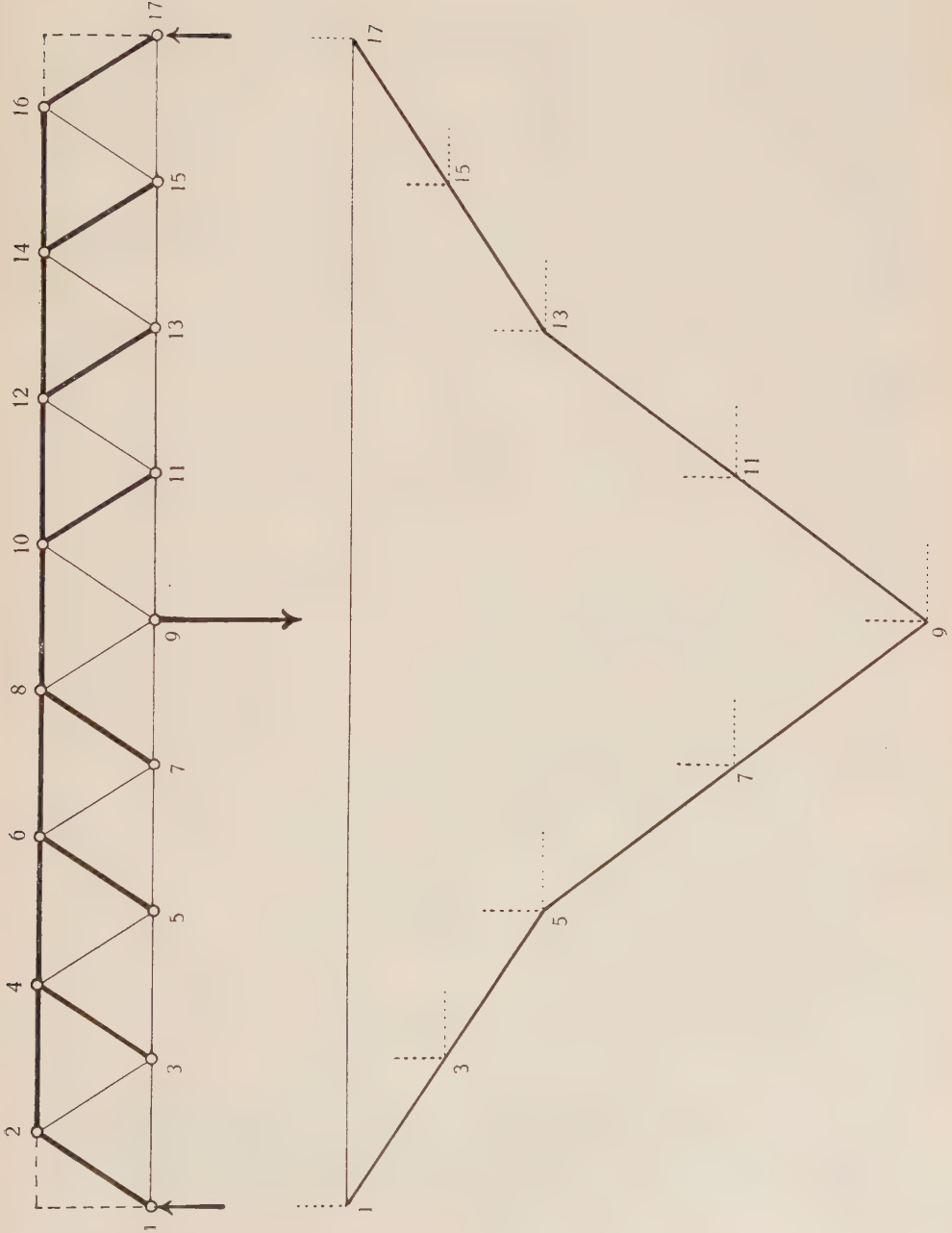
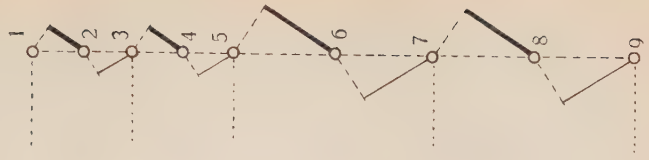
13.14 , 14.15 , 15.16 , 16.17

e si è supposto che tutte le altre aste di parete abbiano una sezione pari alla metà soltanto della precedente.

Il diagramma di Williot si può tracciare partendo dal nodo 9 in mezzeria e tenendo conto che, data la posizione simmetrica e la ipotetica inde-

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(2) Cfr.: C. GUIDI, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, Parte quarta, *Teoria dei Ponti* (Torino, 1928), p. 139 e sg.





formabilità dell'asta 8.10, gli estremi di questa non possono subire che spostamenti verticali. La costruzione del diagramma non presenta in queste condizioni la menoma difficoltà. Quando si suppongono nulle tutte le variazioni di lunghezza delle aste costituenti i due correnti, il diagramma assume la semplicissima e caratteristica forma che nella nostra figura si vede disegnata a destra. Da esso si è poi dedotta la deformata del corrente inferiore della trave.

Un semplice sguardo all'andamento di questa deformata ci permette di stabilire subito alcune conclusioni che sono essenziali ai fini di questa nostra discussione; e sono le seguenti:

1°) Lo sforzo di taglio determina da solo — vale a dire indipendentemente dal momento flettente che lo accompagna, ed i cui effetti sono stati qui a bella posta trascurati — una vera e propria deformazione del corrente, ciascun nodo del quale subisce per effetto di esso un certo spostamento verticale, ciascun'asta del quale assume per effetto di esso una certa inclinazione sulla sua primitiva direzione orizzontale.

2°) Questa inclinazione dipende, oltrechè dai valori dello sforzo di taglio, anche dalle dimensioni delle sezioni resistenti su cui esso opera; essa si mantiene pertanto costante fin che son costanti tanto lo sforzo di taglio che le dimensioni della sezione; ad ogni variazione del valore dello sforzo di taglio o delle dimensioni della sezione corrisponde una variazione dell'inclinazione, che si rivela, nel caso concreto, in un punto angoloso del corrente deformato.

Si ha così in primo luogo una conferma del fatto che, nel caso della trave a sezione costante, uno sforzo di taglio costante non influisce sulla curvatura, bensì sull'inclinazione.

In secondo luogo riesce confermato, e nel tempo stesso chiarito, l'altro fatto — avvertito già da Bertrand De Fontviolant — che le variazioni dello sforzo di taglio debbono determinare delle variazioni di inclinazione; o, per usare il linguaggio a cui siamo avvezzi nel caso della trave a parete piena, che la curvatura è funzione della derivata dello sforzo di taglio.

Si può poi aggiungere, in terzo luogo, che un'analogia influenza sulla curvatura dovrà riscontrarsi, pur sotto sforzo di taglio costante, ogniquale volta varino le dimensioni della sezione resistente al taglio, ciò che Bertrand De Fontviolant non ha potuto mettere in chiaro solo perchè egli ha dovuto limitare il suo studio al caso della trave a sezione costante.

\*  
\* \* \*

Io non so se a questo punto qualche lettore sarà tentato di obiettare che la trave reticolare di cui io sto discorrendo non è la trave a parete piena, e che il fenomeno della deformazione elastica si svolge nei due casi con modalità affatto distinte.

Io spero tuttavia che quel lettore non mancherà di convenire che intanto le travi reticolari rappresentano una così importante frazione delle travi di cui ha occasione di occuparsi l'ingegnere, che il risolvere direttamente nei loro confronti il grave dubbio che la comunicazione del prof. Mesnager aveva potuto far sorgere è già di per sè un risultato singolarmente importante.

Se poi si aggiunge che le considerazioni che qui sono state svolte non sono legate ad alcuna particolare ipotesi sulla forma del traliccio che costituisce la parete della trave <sup>(1)</sup>, e che d'altronde non si tratta qui di analizzare quel che durante la deformazione può accadere in ciascun elemento resistente di detta parete, bensì di rendersi conto del modo con cui le deformazioni di essa influiscono sulla freccia della trave, si dovrà ben convenire che - nei confronti della trave a parete piena - la trave reticolare a correnti parallele rappresenta bensì soltanto uno schema, o, se più piace, un modello; ma un modello che si presta egregiamente a chiarire la portata ed il significato delle considerazioni che, a proposito del problema che ci occupa, io ero venuto svolgendo nelle mie Note precedenti.

**Meccanica.** — *Sugli impulsi nei corpi elastici isotropi.* Nota di F. CONFORTO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. In un precedente lavoro <sup>(3)</sup> è stato dimostrato che, ove si ammetta che l'applicazione ad un dato istante  $t_0$  di un campo di impulsi in un corpo elastico isotropo generi un brusco cambiamento delle velocità di tutti i punti del corpo in tale istante, le equazioni, dalle quali dipende il problema analitico della determinazione di tale discontinuità si scrivono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho u + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \rho X = 0 \\ \rho v + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \rho Y = 0 \\ \rho w + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \rho Z = 0 \end{array} \right.$$

$u, v, w$  indicando le componenti del vettore differenza delle velocità dei vari punti dopo e prima dell'istante dell'urto,  $X, Y, Z$  essendo le compo-

(1) Per le travi a graticcio cfr. C. GUIDI, loc. cit., p. 303.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) Cfr. F. CONFORTO, *Considerazioni sugli impulsi nei corpi elastici isotropi*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XV, 1° sem., fasc. 2, gennaio 1932.

nenti unitarie di un generico campo di impulsi,  $\rho$  la densità del corpo. Quanto alle sei quantità:

$$(2) \quad X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y$$

esse sono da considerarsi come delle funzioni delle sei quantità:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si è visto con quali osservazioni e restrizioni si possano considerare le sei quantità (2) come funzioni lineari delle sei quantità (3).

Noi vogliamo tuttavia in questo lavoro ammettere la forma lineare e precisamente porre tra le (2) e le (3) delle relazioni uguali alle relazioni, che intercorrono nella ordinaria teoria della elasticità tra le componenti di deformazione e gli sforzi. Noi faremo cioè:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -X_x = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad -Y_y = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad -Z_z = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ -Y_z = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad -Z_x = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad -X_y = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

Sostituendo allora le relazioni (4) nelle equazioni generali (3), ove si avverta che si è posto

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

queste assumono la forma:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho X + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta_2 u - \rho u = 0 \\ \rho Y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta_2 v - \rho v = 0 \\ \rho Z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta_2 w - \rho w = 0. \end{array} \right.$$

Le (5) costituiscono allora un ben determinato sistema di equazioni alle derivate parziali, dal quale si tratta di ricavare  $u, v, w$  in funzione di  $x, y, z$ .

Scopo di questa Nota è di determinare una classe particolare di integrali delle equazioni (5), integrali, i quali si prestano a dare una immagine di quanto avviene in un corpo elastico isotropo indefinito, quando in un

determinato istante sopra gli elementi di una superficie limitante una piccola cavità nell'interno del corpo elastico, agiscono delle forze, aventi carattere impulsivo.

§ 2. Poniamo in generale (1):

$$(6) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} X = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ Y = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ Z = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

La determinazione delle funzioni incognite  $\Phi, F, G, H$  si potrà allora far dipendere, come si vede sostituendo le (6) e le (7) nelle (5) e ponendo

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \Omega^2 \quad \frac{\mu}{\rho} = \omega^2$$

dalle equazioni:

$$(8) \quad \begin{cases} \Omega^2 \Delta_2 \Phi - \Phi + \psi = 0 \\ \omega^2 \Delta_2 F - F + L = 0 \\ \omega^2 \Delta_2 G - G + M = 0 \\ \omega^2 \Delta_2 H - H + N = 0 \end{cases}$$

Noi vogliamo ora supporre ovunque:  $X = Y = Z = 0$ .

Si potrà soddisfare a questa condizione ponendo

$$(9) \quad \psi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{r} \quad L = 0 \quad M = \frac{\partial}{\partial z} \frac{r}{r} \quad N = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{r}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Le (8) divengono allora:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \Delta_2 \Phi - \Phi &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{r} & \omega^2 \Delta_2 F - F &= 0 & \omega^2 \Delta_2 G - G &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{r}{r} \\ & & \omega^2 \Delta_2 H - H &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{r}{r}. \end{aligned}$$

(1) Cfr. la posizione analoga nel trattato del LOVE: *The mathematical theory of elasticity*, pp. 183-184, quarta edizione, Cambridge, 1927.

A queste si può soddisfare, tenendo conto che la funzione  $u = \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$  soddisfa all'equazione differenziale  $a^2 \Delta_2 u - u = 0$ , ponendo:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}} - 1}{r} \right) & F &= 0 & G &= \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\omega}} - 1}{r} \right) \\ H &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\omega}} - 1}{r} \right).\end{aligned}$$

Così essendo fissate le quattro funzioni  $\Phi, F, G, H$  mediante le (6) si potranno costruire le funzioni  $u, v, w$  e si otterrà una terna di funzioni, che soddisfa alle (5). Precisamente viene:

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}} - 1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\omega}} - 1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\omega}} - 1}{r} \right) \\ v &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}} - e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right) \\ w &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial \chi} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}} - e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right).\end{aligned}$$

Tenendo conto che si ha identicamente:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right) = \frac{1}{\omega^2} \frac{e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right)$$

ed essendo  $\frac{1}{r}$  funzione armonica, si può in definitiva dare ad  $u, v, w$ , moltiplicandole per una costante del tipo  $aX_0$ , la forma:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= aX_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}} - e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right) + \frac{aX_0}{\omega^2} \frac{e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \\ v &= aX_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}} - e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right) \\ w &= aX_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \chi} \left( \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}} - e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \right) \end{aligned} \right.$$

§ 3. Si tratta ora di determinare le proprietà delle soluzioni del tipo (9). Quando il punto di coordinate  $x, y, \chi$  tende all'infinito, si vede che  $u, v, w$  tendono allo zero. Inoltre le funzioni  $u, v, w$  sono ovunque



finite e continue, assieme anche alle loro derivate, fatta eccezione della origine. Se pertanto si vuol concepire  $u, v, w$  come una soluzione delle equazioni (5) che abbia significato fisico, converrà immaginare un corpo elastico indefinito, possedente però una cavità, la quale contiene nel suo interno l'origine delle coordinate. Chiamiamo con  $\sigma$  la superficie, che limita tale cavità. Le (9) si potranno allora riguardare come le funzioni che determinano la discontinuità, che subiscono le velocità dei singoli punti del corpo elastico, quando sopra i punti della superficie  $\sigma$  si fanno agire degli impulsi, le cui componenti unitarie sono <sup>(1)</sup>:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_n = X_x \cos ux + X_y \cos uy + X_z \cos uz \\ Y_n = Y_x \cos ux + Y_y \cos uy + Y_z \cos uz \\ Z_n = Z_x \cos ux + Z_y \cos uy + Z_z \cos uz \end{array} \right.$$

le  $X_x, Y_y, \dots$  ecc. essendo determinate delle formule (4) applicate ponendo  $u, v, w$  uguali alle espressioni (9).

Noi otteniamo dunque una soluzione particolare del problema generale e questo per ogni superficie  $\sigma$ , che contenga nel suo interno l'origine.

§ 4. Tra tutte le superficie, che contengono nel loro interno l'origine, consideriamo in particolare le superficie di rotazione intorno all'asse  $x$ . Per tali superficie le (9) presentano una circostanza speciale, compendiate nella seguente proposizione:

Per ogni superficie di rotazione intorno all'asse  $x$ , la somma vettoriale di tutti gli impulsi, applicati alla superficie stessa, è parallela all'asse  $x$ . Si può inoltre per ogni superficie determinare la costante  $a$  in maniera che tale somma vettoriale abbia il modulo dato ad arbitrio uguale ad  $X_0$ .

Per dimostrare ciò nella maniera più comoda, poniamo

$$\varphi(r) = \frac{e^{-\frac{r}{\Omega}}}{r} \quad \varphi_1(r) = \frac{1}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1(r)}{dr} \quad \varphi_3(r) = \frac{d\varphi_2(r)}{dr}$$

e analogamente:

$$\psi(r) = \frac{e^{-\frac{r}{\omega}}}{r} \quad \psi_1(r) = \frac{1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} \quad \psi_2(r) = \frac{1}{r} \frac{d\psi_1(r)}{dr} \quad \psi_3(r) = \frac{1}{r} \frac{d\psi_2(r)}{dr}.$$

Si constata allora con molta facilità, ponendo per il momento al posto di  $xyz$  rispettivamente  $x_1, x_2, x_3$ , che si ha:

(1) Cfr. loc. cit.: formule (3).

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x_i} = \varphi_1(r) x_i$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi_2(r) x_i x_j + \varphi_1(r) \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi(r)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \varphi_3(r) x_i x_j x_k + \varphi_2(r) [x_j \delta_{ik} + x_i \delta_{jk} + x_k \delta_{ij}]$$

analoghe formule valendo per la serie  $\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ ;  $i, j, k$  essendo numeri qualsiasi fra 1, 2 e 3 e  $\delta_{ij}$  avendo il solito significato.

Con questi elementi, tenendo conto delle (9) è estremamente facile calcolare tutte le derivate di  $u, v, w$ , rispetto a  $x, y, z$ . (Derivate, che si esprimono come derivate terze o di  $\psi(r)$  o di  $\varphi(r)$ ). Precisamente viene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = aX_o [\varphi_3(r) x^3 + 3 \varphi_2(r) x] - aX_o [\psi_3(r) x^3 + 3 \psi_2(r) x] + \frac{aX_o}{\omega^2} \psi_1(r) x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = aX_o [\varphi_3(r) x^2 y + \varphi_2(r) y] - aX_o [\psi_3(r) x^2 y + \psi_2(r) y] + \frac{aX_o}{\omega^2} \psi_1(r) y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = aX_o [\varphi_3(r) x^2 z + \varphi_2(r) z] - aX_o [\psi_3(r) x^2 z + \psi_2(r) z] + \frac{aX_o}{\omega^2} \psi_1(r) z$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = aX_o [\varphi_3(r) x^2 y + \varphi_2(r) y] - aX_o [\psi_3(r) x^2 y + \psi_2(r) y]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = aX_o [\varphi_3(r) xy^2 + \varphi_2(r) x] - aX_o [\psi_3(r) xy^2 + \psi_2(r) x]$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = aX_o \varphi_3(r) xy z - aX_o \psi_3(r) xy z$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = aX_o [\varphi_3(r) x^2 z + \varphi_2(r) z] - aX_o [\psi_3(r) x^2 z + \psi_2(r) z]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = aX_o \varphi_3(r) xy z - aX_o \psi_3(r) xy z$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = aX_o [\varphi_3(r) xz^2 + \varphi_2(r) x] - aX_o [\psi_3(r) xz^2 + \psi_2(r) x].$$

Da questo complesso di formule è facile calcolare  $\theta$  e tutte le quantità (3) e successivamente le (4), le quali risultano:

$$\begin{aligned} -X_x = & a\lambda X_o [\varphi_3(r) - \psi_3(r)] x r^2 + 5 a\lambda X_o [\varphi_2(r) - \psi_2(r)] x + \frac{a\lambda X_o}{\omega^2} \psi_1(r) x + \\ & + 2 a\mu X_o [\varphi_3(r) x^3 + 3 \varphi_2(r) x] - 2 a\mu X_o [\psi_3(r) x^3 + 3 \psi_2(r) x] + \\ & + \frac{2 a\mu X_o}{\omega^2} \psi_1(r) x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -Y_y &= a\lambda X_o [\varphi_3(r) - \psi_3(r)] x r^2 + 5 a\lambda X_o [\varphi_2(r) - \psi_2(r)] x + \frac{a\lambda X_o}{\omega^2} \psi_1(r) x + \\
 &\quad + 2 a\mu X_o (\varphi_3(r) x y^2 + \varphi_2(r) x) - 2 a\mu X_o [\psi_3(r) x y^2 + \psi_2(r) x] \\
 -Z_z &= a\lambda X_o [\varphi_3(r) - \psi_3(r)] x r^2 + 5 a\lambda X_o [\varphi_2(r) - \psi_2(r)] x + \frac{a\lambda X_o}{\omega^2} \psi_1(r) x + \\
 &\quad + 2 a\mu X_o [\varphi_3(r) x z^2 + \varphi_2(r) x] - 2 a\mu X_o [\psi_3(r) x z^2 + \psi_2(r) x] \\
 -Y_z &= 2 a\mu X_o [\varphi_3(r) - \psi_3(r)] x y z \\
 -Z_x &= 2 a\mu X_o [\varphi_3(r) x^2 z + \varphi_2(r) z] - 2 a\mu X_o [\psi_3(r) x^2 z + \psi_2(r) z] + \\
 &\quad + \frac{a\mu X_o}{\omega^2} \psi_1(r) z \\
 -X_y &= 2 a\mu X_o [\varphi_3(r) x^2 y + \varphi_2(r) y] - 2 a\mu X_o [\psi_3(r) x^2 y + \psi_2(r) y] + \\
 &\quad + \frac{a\mu X_o}{\omega^2} \psi_1(r) y.
 \end{aligned}$$

A questo punto è necessario introdurre la particolare superficie  $\sigma$  di rotazione scelta, costruire le quantità (10) e si tratta di far vedere che si ha sempre:

$$(11) \quad \int_{\sigma} Y_n d\sigma = \int_{\sigma} Z_n d\sigma = 0$$

$\sigma$  essendo superficie di rotazione intorno all'asse  $x$ , si potrà pensare di calcolare i due integrali (11), immaginando la superficie  $\sigma$  decomposta in tante zone ottenute segandola con piani perpendicolari all'asse  $x$ . Queste zone potranno essere in particolare determinate da due piani infinitamente vicini. Si riesce a dimostrare che il contributo di ciascuna di tali zone infinitesime è nullo ed allora sarà verificata la (11). Ora ciò discende dalle seguenti due circostanze:

a) Per ognuna delle zone infinitesime sopradette è costante  $x$  ed è costante  $r$ .

b) Per ognuna delle zone infinitesime sopradette è costante  $\cos ux$ , mentre  $\cos uy$  e  $\cos uz$  cambiano di segno passando da un punto al suo simmetrico rispetto al piano  $xz$  e al piano  $xy$  rispettivamente. Passando invece da un punto al suo simmetrico rispetto al piano  $xy$  e al piano  $xz$ ,  $\cos uy$  e  $\cos uz$  mantengono rispettivamente inalterato il loro valore.

Queste due circostanze sono sufficienti a dare la dimostrazione del fatto che si ha in vista. Infatti basta osservare gli integrali che si dovrebbero calcolare, per trovare le due quantità (11) per vedere che sempre in tali integrali, in virtù delle circostanze a) e b), il contributo di ciascuna

zona infinitesima è nullo, giacchè si può sempre associare gli elementi differenziali in modo tale, che essi si eliminino a vicenda.

Questa circostanza non si dà per l'  $\int_{\sigma} X_n d\sigma$ . D'altra parte la quantità  $aX_0$  comparando ovunque come un fattore costante, ne segue che il valore di tale integrale sarà del tipo:

$$(12) \quad \int_{\sigma} X_n d\sigma = aX_0 L_{\sigma}$$

$L_b$  essendo una costante, dipendente però dalla superficie  $b$ . La (12) indica chiaramente che si può scegliere la costante  $a$  in modo tale che si abbia

$$\int_{\sigma} X_n d\sigma = X_0.$$

È quanto si era affermato <sup>(1)</sup>.

(1) Con considerazioni dello stesso tipo ci si potrà facilmente persuadere anche del fatto che il momento risultante di tutti gli impulsi agenti su  $\sigma$ , calcolato rispetto all'origine è nullo, di modo che gli impulsi sopra  $\sigma$  costituiscono un sistema di vettori equivalente ad un unico vettore di modulo  $X_0$ , applicato nella origine e diretto secondo l'asse delle  $x$ .

**Meccanica.** — *Gli invarianti adiabatici come metodo di integrazione approssimata di equazioni differenziali.* Nota di D. GRAFFI, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. In una Nota<sup>(2)</sup> pubblicata qualche anno fa abbiamo studiato per una questione di elettrologia la ben nota equazione differenziale:

$$(1) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 q$$

con  $\omega > 0$  e variabile col tempo  $t$ . Con la sostituzione:

$$(2) \quad q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin \theta \quad \frac{dq}{dt} = \sqrt{2J\omega} \cos \theta$$

l'integrazione della (1) era ricondotta a quella del sistema:

$$(3) \quad \frac{dJ}{dt} = -\frac{J\omega'}{\omega} \cos 2\theta \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega + \frac{\omega'}{2\omega} \sin 2\theta.$$

Poi supponendo  $\omega$  variabile lentamente col tempo, mediante la nozione d'invariante adiabatico avevamo dimostrato che una soluzione approssimata del sistema (3) e quindi della (1) era:

$$(4) \quad J = J_0 \quad \theta = \int_0^t \omega dt + \theta_0$$

dove  $J_0$  e  $\theta_0$  erano due grandezze costanti da determinarsi con le condizioni iniziali.

Invece a tutto rigore si avrebbe avuto dalle (3):

$$(5) \quad J = J_0 e^{-\int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\theta dt} \quad \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt + \int_0^t \frac{\omega'}{2\omega} \sin 2\theta dt.$$

Ma tale soluzione non avrebbe alcun significato pratico, perchè la  $J$  e la  $\theta$  sarebbero espresse mediante la stessa  $\theta$  che è incognita.

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

(2) « Rendiconti Accademia dei Lincei », 1° sem., 1929, p. 867.



Ora il concetto d'invariante adiabatico portava a concludere che i due integrali  $\int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\theta dt$ ,  $\int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt$  erano in modulo trascurabili, e perciò dalle (5) si ricadeva nelle (4) in cui  $J$  e  $\theta$  sono dati in forma esplicita.

Ma tale concetto d'invariante adiabatico presuppone che  $\omega$  vari in modo infinitamente lento. Ora questa è una proprietà limite che nelle applicazioni non può essere mai verificata. Perciò in questa Nota ci proponiamo trovare un limite superiore per l'errore che si commette nel ritenere valide le (4) il che ci può far vedere entro quali limiti è certamente valida l'integrazione approssimata del sistema (3) e della (1). Per quanto si è detto basta trovare una limitazione per i due integrali che abbiamo scritto poco fa.

Noi otterremo tale limitazione valida per qualunque  $\omega(t)$  <sup>(1)</sup> ma si vedrà che essa tende a diventare molto piccola quando la  $\omega$  varia con molta lentezza. Così si può in particolare vedere entro quali limiti si può ritenere  $J_0$  costante, cioè entro quali limiti esso è invariante adiabatico. Si potrà poi precisare un po' la frase variabile lentamente di solito poco chiara.

In questa Nota ci limitiamo a considerare l'equazione (1) che è del resto importantissima, per le numerose questioni in cui si presenta.

Vedremo poi in ulteriori ricerche, se sarà possibile estendere questo metodo d'integrazione approssimata ad altre questioni, specie a quei problemi di meccanica celeste, che recentemente il Levi-Civita <sup>(2)</sup> e il Krall <sup>(3)</sup> hanno trattato con grande successo mediante la nozione d'invariante adiabatico.

2. Dobbiamo dunque trovare un limite superiore per  $I = \left| \int_0^{t_1} \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt \right|$  e  $\left| \int_0^{t_1} \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\theta dt \right|$  valido per l'intervallo  $(0, t_1)$  (si è messo  $t_1$  al posto di  $t$

per evitare possibili confusioni). Osserviamo subito che, siccome con un opportuno cambiamento della costante iniziale  $\theta_0$  (che non compare come si vedrà nel cercato limite superiore) il secondo di questi integrali si riduce al primo, ci basterà trovare solo il limite superiore per  $I$  in quanto che lo stesso limite sarà valido, per quanto si è detto, anche per l'altro integrale.

Siccome dovremo spesso considerare il valore massimo o minimo in  $(0, t_1)$  dei moduli di  $\omega$  e delle sue derivate, o di una combinazione fra esse, indicheremo questi massimi o minimi ponendo vicino alla grandezza

(1) S'intende nell'ipotesi che  $\omega(t)$  soddisfi alle solite condizioni di derivabilità ecc.

(2) LEVI-CIVITA, «Atti del Congresso dei Matematici», Bologna 1928, tomo V, p. 17.

(3) KRALL, «Rendiconti Accademia dei Lincei», 2° sem., 1931, pp. 79 e 280.

considerata l'indice max o min. Per esempio  $\omega_{\max}$  e  $\omega_{\min}$  saranno rispettivamente il massimo e il minimo di  $\omega$  in  $(0, t_1)$ .

Da questa definizione segue subito intanto che la funzione sotto il segno d'integrazione in I è sempre in modulo minore di  $\left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max}$ .

Posto ciò calcoliamo il limite superiore dell'integrale I. Dividiamo l'intervallo  $(0, t_1)$  in  $n$  parti mediante i punti  $\tau_1, \tau_2, \tau_{n-1}$  tali che sia:

$$\tau_1 = \frac{\pi}{\omega(0)} \quad \tau_2 = \tau_1 + \frac{\pi}{\omega(\tau_1)} \cdots \tau_{n-1} = \tau_{n-2} + \frac{\pi}{\omega(\tau_{n-2})}$$

e infine sia:

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \frac{\pi}{\omega(\tau_{n-1})} > t_1.$$

Ponendo in generale:  $(0 \leq i \leq n-2)$

$$I_{i, i+1} = \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt \right|$$

si ha:

$$(7) \quad I \leq I_{01} + I_{12} \cdots I_{n-2, n-1} + \left| \int_{\tau_{n-1}}^{t_1} \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt \right|.$$

Si trova facilmente un limite superiore per l'ultimo integrale al secondo membro di (7). Si ha subito infatti:

$$(8) \quad \left| \int_{\tau_{n-1}}^{t_1} \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt \right| \leq \left| \int_{\tau_{n-1}}^{t_1} \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt \right| \leq \left| \frac{\omega'}{\omega}_{\max} (t_1 - \tau_{n-1}) \right| \leq \left| \frac{\omega'}{\omega}_{\max} (\tau_n - \tau_{n-1}) \right|.$$

Vediamo ora di trovare un limite superiore per uno qualunque degli altri integrali al secondo membro di (7) cioè per esempio per  $I_{i, i+1}$ .

A questo scopo ricordiamo che si ha dalla seconda equazione del sistema (3) per  $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$

$$(9) \quad \theta(t) = \theta(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \omega(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^t \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt.$$

E posto:

$$(10) \quad \alpha = \theta(\tau_i) + \omega(\tau_i)(t - \tau_i)$$

$$(11) \quad \beta = \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^t \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt - \omega(\tau_i)(t - \tau_i) + \int_{\tau_i}^t \omega(t) dt.$$

Si ha:

$$\theta(l) = \alpha + \beta.$$

Allora si ottiene subito con ovvie trasformazioni:

$$(12) \quad I_{i,i+1} \leq \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{\omega'(\tau_i)}{\omega(\tau_i)} \sin 2\alpha dt \right| + \\ + \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \frac{\omega'}{\omega} \sin(2\alpha + 2\beta) - \frac{\omega'(\tau_i)}{\omega(\tau_i)} \sin 2\alpha \right\} dt \right|.$$

Ora il primo integrale al secondo membro di (12) è nullo. Infatti:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{\omega'(\tau_i)}{\omega(\tau_i)} \sin 2\alpha dt = \frac{\omega'(\tau_i)}{\omega(\tau_i)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sin(2\omega(\tau_i)(t - \tau_i) + 2\theta(\tau_i)) dt = 0.$$

D'altra parte per il teorema del valor medio si può scrivere:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega'(\tau_i)}{\omega(\tau_i)} + \left( \frac{d}{dt} \frac{\omega'}{\omega} \right)_M (t - \tau_i)$$

essendo  $\left( \frac{d}{dt} \frac{\omega'}{\omega} \right)_M$  un valore di  $\frac{d}{dt} \frac{\omega'}{\omega}$  compreso fra  $\tau_i$  e  $t$ .

Si avrà così dalla (12) ricordando la (13)

$$(14) \quad I_{i,i+1} \leq \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{\omega'(\tau_i)}{\omega(\tau_i)} \{ \sin(2\alpha + 2\beta) - \sin 2\alpha \} dt \right| + \\ + \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left( \frac{d}{dt} \frac{\omega'}{\omega} \right)_M (t - \tau_i) \sin(2\alpha + 2\beta) dt \right| \leq \\ \leq \left| \frac{2\omega'(\tau_i)}{\omega(\tau_i)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \cos(2\alpha + \beta) \sin \beta dt \right| + \left| \frac{d}{dt} \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (t - \tau_i) dt \leq \\ \leq 2 \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\sin \beta| dt + \left| \frac{d}{dt} \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} \frac{(\tau_{i+1} - \tau_i)^2}{2}.$$

Ora si ha come è noto  $|\sin \beta| \leq |\beta|$ .

Cerchiamo perciò una limitazione per  $|\beta|$ . A questo scopo osserviamo che  $\omega(t) = \omega(\tau_i) + \omega'_M(t - \tau_i)$  essendo ancora  $\omega'_M$  un valore di  $\omega'$  compreso fra  $\tau_i$  e  $t$ . Allora è:

$$(15) \quad |\beta| \leq \left| \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^t \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\theta dt \right| + \left| \int_{\tau_i}^t \omega'_M(t - \tau_i) dt \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} (t - \tau_i) + \frac{1}{2} |\omega'_{\max}| (t - \tau_i)^2$$

e sostituendo nella (14):

$$(16) \quad I_{i,i+1} \leq \left| \frac{d \frac{\omega'}{\omega}}{dt} \right|_{\max} \frac{(\tau_{i+1} - \tau_i)^2}{2} + \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max}^2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (t - \tau_i) dt + \\ + |\omega'|_{\max} \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (t - \tau_i)^2 dt.$$

Cerchiamo di semplificare un po' questa espressione. Osserviamo perciò che è:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{i+1} - \tau_i &= \frac{\pi}{\omega(\tau_i)} \leq \frac{\pi}{\omega_{\min}} & \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} &\leq \frac{|\omega'|_{\max}}{\omega_{\min}} \\ \left| \frac{d \frac{\omega'}{\omega}}{dt} \right|_{\max} &\leq \left| \frac{\omega''}{\omega} \right|_{\max} + \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max}^2 \leq \frac{\omega''_{\max}}{\omega_{\min}} + \frac{|\omega'|_{\max}^2}{\omega_{\min}^2}. \end{aligned} \right.$$

Si ha così eseguendo gli integrali al secondo membro di (16):

$$(18) \quad I_{i,i+1} \leq \frac{1}{2} \left| \frac{d \frac{\omega'}{\omega}}{dt} \right|_{\max} \frac{\pi^2}{\omega_{\min}^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max}^2 \frac{\pi^2}{\omega_{\min}^2} + \frac{1}{3} |\omega'|_{\max} \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} \frac{\pi^3}{\omega_{\min}^3} \leq \\ \leq \left( \pi^2 + \frac{\pi^3}{3} \right) \frac{|\omega'|_{\max}^2}{\omega_{\min}^4} + \frac{\pi^2}{2} \frac{|\omega''|_{\max}}{\omega_{\min}^3}.$$

Si è così trovato un limite superiore a un generico integrale al secondo membro di (7) (escluso l'ultimo). Ora questi integrali, sempre escluso l'ultimo, sono in un numero certamente minore di  $t_1$  diviso per il più piccolo dei  $\tau_{i+1} - \tau_i$ : cioè sono in un numero minore di  $\frac{t_1 \omega_{\max}}{\pi}$ . Allora la somma di tutti gli integrali al secondo membro di (7) è minore del

limite superiore dell'ultimo integrale dato dalla (8) più  $\frac{t_1 \omega_{\max}}{\pi}$  moltiplicato per il limite superiore di  $I_{i,i+1}$  ora calcolato. Cioè in definitiva si ha ricordando le (17):

$$(19) \quad I \leq \frac{\pi |\omega'|_{\max}}{\omega_{\min}^2} + \left( \pi + \frac{\pi^2}{3} \right) \frac{\omega'^2_{\max}}{\omega_{\min}^3} \omega_{\max} t_1 + \frac{\pi}{2} \frac{|\omega''_{\max}| \omega_{\max} t_1}{\omega_{\min}^3}.$$

La stessa formula vale per  $\left| \int_0^{t_1} \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\theta dt \right|$  e così si è trovata la

limitazione che ci eravamo proposti.

3. Diamo ora una interpretazione delle formule ora ricavate.

Chiameremo massima variazione di  $\omega$  nell'intervallo  $(0, t_1)$  il prodotto  $\omega'_{\max} t_1$  mentre chiameremo massima variazione di  $\omega$  o di  $\omega'$  per un periodo il prodotto  $|\omega'|_{\max} \frac{2\pi}{\omega_{\min}}$  e  $|\omega''|_{\max} \frac{2\pi}{\omega_{\min}}$ . Queste due ultime grandezze verranno indicate con  $\Delta\omega$  e  $\Delta\omega'$ . Scriviamo allora la (19) nel seguente modo:

$$I \leq \frac{\Delta\omega}{2\omega_{\min}} + \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \frac{\Delta\omega}{\omega_{\min}} \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \frac{|\omega'|_{\max} t_1}{\omega_{\min}} + \\ + \frac{1}{4} \frac{\Delta\omega'}{|\omega'|_{\max}} \frac{|\omega'_{\max}| t_1}{\omega_{\min}} \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}.$$

Da questa formula si vede che a parità del rapporto fra la variazione massima di  $\omega$  rispetto a  $\omega_{\min}$  e del rapporto  $\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}$  la soluzione della equazione differenziale è tanto più approssimata (e in particolare si può supporre con maggiore approssimazione la  $J$  costante) quanto più è piccola la massima variazione di  $\omega$  in un periodo rispetto a  $\omega_{\min}$  e la massima variazione di  $\omega'$  in un periodo rispetto a  $|\omega'|_{\max}$  (1).

È poi superfluo notare che in queste formule la frase piccolo va intesa nel senso di piccolo rispetto all'unità, perchè si tratta sempre di rapporti fra grandezze omogenee cioè fra numeri puri.

(1) Che nelle limitazioni per l'invarianza adiabatica si debba considerare anche la variazione di  $\omega'$  è già stato messo in evidenza da qualche autore. Vedi p. e. T. LEVI-CIVITA, *Alcune applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*, « Bollettino Unione Matematica Italiana », dicembre 1928, Nota I, p. 2 (della ristampa).



4. Vediamo ora come esempio di applicare i risultati ora ottenuti al problema da noi studiato, nella Nota citata<sup>(1)</sup>.

Si aveva:

$$\omega = \omega_0 (1 - h \sin(pt + \varphi_0)).$$

Dove  $\omega_0$  è una pulsazione radiotelefonica, mentre  $p$  è una pulsazione acustica

$$\omega_{\max} = \omega_0 (1 + h) \quad \omega_{\min} = \omega_0 (1 - h) \quad |\omega'|_{\max} = p\omega_0 h \quad |\omega''|_{\max} = p^2 \omega h.$$

Allora l'errore commesso valeva al massimo:

$$\frac{\pi p h}{\omega_0 (1 - h)^2} + \left( \pi + \frac{\pi^2}{3} \right) \frac{h^2 p}{\omega_0 (1 - h)^4} p t_1 + \frac{\pi}{2} h \frac{p}{\omega_0 (1 - h)^3} p t_1.$$

Da questa formula segue subito che se  $t_1 = \frac{2\pi}{p}$  cioè per l'intervallo di una oscillazione acustica l'errore che si commette è dell'ordine di  $h \frac{p}{\omega_0}$  cioè molto piccolo perchè nelle applicazioni è molto piccolo  $\frac{p}{\omega_0}$  e  $h$ .

Anzi in molte questioni la nostra approssimazione può valere anche per valori di  $t_1$  molto più grandi di  $\frac{2\pi}{p}$ .

Osserviamo da ultimo, che in base alla nostra dimostrazione segue subito, che se dividiamo l'intervallo  $(0, t_1)$  in  $n$  parti mediante i punti  $(t_2, t_3, t_{n-1})$  l'errore commesso nell'intervallo  $(0, t_1)$  è minore o al più uguale a quello commesso nei singoli intervalli  $(0, t_2) (t_1, t_3) \dots (t_{n-1}, t_1)$ .

Ciò può essere molto comodo specie nei casi in cui  $|\omega'_{\max}|$  o  $|\omega''_{\max}|$  diventano grandi rispetto  $\omega_{\min}$  o  $|\omega'|_{\max}$  in intervalli di ampiezza molta piccola.

(1) Colgo l'occasione per far osservare che a pagina 871 di detta Nota (riga 9) la  $i$  va scritta con le dette approssimazioni,

$$i = \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{LC_0}(1 + 2hf(t))}} \sin \theta = \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{LC_0}}} \left( 1 - \frac{h}{2} f(t) \right) \sin \theta$$

e la riga (11)

$$i = \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{LC_0}}} \left( 1 - \frac{h}{2} \sin(pt + \varphi_0) \right).$$

Così pure nella riga 14 a pag. 871 la  $\frac{\Gamma}{4}$  va letta  $\frac{\pi}{4}$ . Infine a pag. 869 riga 19 dall'alto va cancellato il termine  $\frac{1}{300}$ . Vi è poi in detta Nota qualche altro lieve errore di stampa facilmente correggibile.

**Meccanica.** — *Mete lontane del moto di un sistema planetario.*  
Nota di G. KRALL, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Consideriamo un sistema planetario costituito da un numero qualunque di corpi celesti, tra loro sufficientemente lontani per poterli riguardare come punti, sufficientemente estesi perchè l'energia cinetica del loro *moto rigido* relativo al baricentro non sia trascurabile per raffronto a quella del moto orbitale.

Se il movimento è generale, necessariamente, nei corpi suddetti, avranno luogo maree, più o meno energiche, prodotte da oceani, che in parte o tutti li ricoprono, o conseguenti a deformazioni elastiche dei nuclei che li costituiscono.

A queste maree s'accompagnano, nel loro rinnovarsi quasi periodico, azioni di natura dissipativa, lente ma incessanti, dell'energia totale  $\dot{H} = \dot{E}$  del sistema, somma di quella cinetica  $T$  del moto dei baricentri (moto orbitale),  $T'$  del moto ad essi relativo (moto di *precessione*) e di quella posizionale  $U$  che deriva dal campo di forza newtoniana.

Queste azioni dissipative, aventi ben evidente *carattere interno*, porteranno, a lungo andare, l'energia totale ad un minimo, subordinato, per lo specifico carattere qualitativo testè rilevato, all'invariante sussistere del *momento vettoriale totale delle quantità di moto*  $\dot{\mathbf{K}}$ , dato iniziale ed immutabile.

Questo minimo va inteso nel senso più lato, vale a dire considerato non soltanto di fronte a tutte le possibili determinazioni dei vari parametri, che figurano nelle equazioni del problema e nell'assegnato momento risultante (*costanti delle aree*, coseni direttori degli assi di rotazione, ecc.) ma anche di fronte ad ogni altra soluzione del problema stesso. Ciò richiede che sia, incondizionatamente,

$$(I) \quad \frac{\partial \left( \dot{H} + \sum_i \omega_i \dot{\mathbf{K}}_i \right)}{\partial \tilde{\alpha}} = 0.$$

In queste equazioni, ben manifeste condizioni di *estremo*, le  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) designano tre *moltiplicatori lagrangiani*,  $\dot{\mathbf{K}}_i$  le componenti del vettore momento delle quantità di moto  $\dot{\mathbf{K}}$ ,  $\tilde{\alpha}$  infine rappresenta una generica delle incognite del sistema differenziale rispettivamente una della costanti,

(1) Nella seduta del 3 aprile 1932.

p. e. derivante da integrali, che conseguentemente alle azioni di cui si tratta, si debbono far variare.

Richiamando una precedente Nota <sup>(1)</sup> per meglio veder lumeggiate le conseguenze più immediate delle (1), caratterizzanti con le due indicate specificazioni delle  $\chi$ , *soluzioni* cosiddette *stazionarie* di Routh e Levi-Civita, rispettivamente, tra queste, dei tipi particolari, passiamo ad affrontare il nostro problema.

Oltre a caratterizzare (nelle suddette condizioni limiti) il carattere stazionario del moto degli  $(n + 1)$  corpi che, ancor non era stato, a quanto ci consta, posto in rilievo, trarremo previsioni le più suggestive sugli, sotto certi aspetti, inevitabili atteggiamenti finali, semplici e simmetrici, del moto d'un sistema planetario qualunque.

## § 2. PROBLEMA DEGLI $n + 1$ CORPI.

FORMA CANONICA DEL POINCARÉ PER LE EQUAZIONI DEL MOTO <sup>(2)</sup>.

Nel caso di mutue attrazioni newtoniane il potenziale del campo dipende notoriamente dalle sole differenze

$$x_i = \xi_i - \xi_0 \quad , \quad y_i = \eta_i - \eta_0 \quad , \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0 \quad ,$$

fra le coordinate assolute del generico punto  $P_i$  e di uno prefissato  $P_0$  (cosidetto *corpo centrale*). Ciò porta spontaneamente ad assumere come *parametri lagrangiani* del sistema le  $3n$  coordinate relative di  $n$  punti rispetto a quello centrale  $P_0$  e le coordinate assolute di quest'ultimo.

Così procedendo si perviene, ove si designino con  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $r_i$  gli impulsi

$$p_i = m_i \dot{\xi}_i \quad , \quad q_i = m_i \dot{\eta}_i \quad , \quad r_i = m_i \dot{\zeta}_i \quad ,$$

alla *funzione caratteristica* classica, dovuta a Poincaré,

$$(2) \quad H = \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2)}{m_i} + \frac{1}{2m_0} \left\{ \left( \sum_i^n p_i \right)^2 + \left( \sum_i^n q_i \right)^2 + \left( \sum_i^n r_i \right)^2 \right\} - U,$$

la quale, risultando esplicitamente indipendente dal tempo  $t$ , eguagliata ad una costante  $E$ , porge *l'integrale dell'energia*, cioè l'energia  $E$  del moto orbitale.

(1) G. KRALL, *Intorno agli effetti asintotici delle maree sul moto dei corpi celesti*. Questi « Rendiconti », fasc. 3, febbraio 1932.

(2) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, pp. 386-389, Bologna, Zanichelli, 1927.

§ 3. FUNZIONE CARATTERISTICA GENERALE PER CORPI ROTANTI.

Ove i corpi, che supponiamo aventi *struttura giroscopica*, sieno dotati di moto libero, cioè *precessionale*, rispetto al baricentro, dovremo considerare per ognuno l'energia cinetica additiva  $\Delta_i$ ,

$$(3) \quad \Delta_i = \frac{k_i^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \Theta_i^*}{A_i} + \frac{\cos^2 \Theta_i^*}{C_i} \right),$$

$k_i$ ,  $\Theta_i^*$ ,  $A_i$ ,  $C_i$  designando il *momento della quantità di moto* (precessionale), l'*angolo di precessione*, i *momenti principali d'inerzia* del solido.

Potendosi ormai esprimere l'energia totale  $\bar{E}$ , in base alla relazione

$$(4) \quad \bar{E} = E + \sum_0^n \Delta_i,$$

resta a valutare l'espressione del *momento totale delle quantità di moto*.

Per quanto concerne il moto orbitale, si hanno le componenti del vettore  $\mathbf{K}$ ,

$$(5) \quad K_1 = \sum_1^n (y_i r_i - z_i q_i), \quad K_2 = \sum_1^n (z_i p_i - x_i r_i),$$

$$K_3 = \sum_1^n (x_i q_i - y_i p_i),$$

e, in particolare, quando, come avremo occasione di fare più avanti, l'asse  $z$  sia orientato in modo che riesca  $K_2 = K_3 = 0$  (per il che basta portarlo a coincidere con  $\mathbf{K}$ ), risulterà nelle nuove coordinate, senza mutar scrittura,

$$(5a) \quad K_3 = \sum_1^n (x_i q_i - y_i p_i) \quad , \quad K_1 = K_2 = 0.$$

Indicando, come convenuto, con  $\bar{\mathbf{K}}$  il vettore *momento totale*, potremo scrivere per il suo *modulo*, ove con  $\beta$  ed  $\alpha_i$  si indichi l'angolo che il versore caratterizzante  $\mathbf{K}$ , rispettivamente  $\mathbf{k}_i$  del solo moto precessionale del corpo  $i^{\text{mo}}$ , fa con esso,

$$(6) \quad \bar{K} = K \cos \beta + \sum_0^n k_i \cos \alpha_i.$$

§ 4. CARATTERIZZAZIONE DELLA CONDIZIONE DI ESTREMO.

Immaginiamo ora di scegliere il riferimento in modo che sia (non  $K_2 = K_3 = 0$ , sibbene)  $\overset{*}{K}_1 = \overset{*}{K}_2 = 0$ . Il nostro problema di minimo (*che non è certo subordinato ad alcuna direzione privilegiata, fissa nello spazio*) si riconduce a render esplicite e ad interpretare le (1) per una funzione da render estrema, data da

$$\mathcal{H} = H + \sum_0^n \Delta_i - \omega \left( K \cos \beta + \sum_0^n k_i \cos \alpha_i \right)$$

dove ho scritto  $-\omega$  per  $\omega_3$ . Come si vede (in causa di  $\overset{*}{K}_2 = \overset{*}{K}_3 = 0$ ) due dei tre *moltiplicatori lagrangiani* che prima intervenivano rimangono automaticamente eliminati. Per semplificare quanto possibile il calcolo, anzichè esplicitare in blocco le (1), conviene distinguerle in gruppi, cominciando coll'assumere come argomento  $\alpha$  l'angolo  $\beta$ . La condizione che si annulli  $\frac{\partial H}{\partial \beta}$  si riduce semplicemente a

$$(7) \quad \omega K \sin \beta = 0,$$

ossia (siccome supponiamo essenzialmente  $K$  e  $\omega$  diversi da zero)  $\sin \beta = 0$ . Ciò val quanto dire che il vettore  $\mathbf{K}$  deve essere (nello stato limite che stiamo caratterizzando) parallelo a  $\overset{*}{\mathbf{K}}$ . Con ciò l'asse  $\alpha$ , che abbiamo, in principio di questo paragrafo, supposto parallelo a  $\overset{*}{\mathbf{K}}$ , riesce necessariamente parallelo anche a  $\mathbf{K}$ , e quindi sussistono le formule (5a).

Ciò posto, soffermiamoci sul gruppo di equazioni che risultano dall'identificare la  $\alpha$  con le variabili canoniche  $(x_i, p_i)$ ;  $(y_i, q_i)$ ;  $(z_i, r_i)$ .

Otteniamo anzitutto

$$(8) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\omega y_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \omega x_i, \quad \frac{\partial H}{\partial r_i} = 0;$$

$$(8a) \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} + \omega q_i = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} - \omega p_i = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0.$$

Or troviamo, in base alle equazioni canoniche

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial r_i},$$

in luogo delle (8),

$$\dot{x}_i = -\omega y_i, \quad \dot{y}_i = \omega x_i, \quad \dot{z}_i = \text{cost.}$$



L'interpretazione ne è immediata; tutti i punti  $P_i$  ruotano intorno a  $P_0$  con la medesima velocità angolare  $\omega$  in piani invariabili normali a  $\mathbf{K}$ . Questi piani anzi, coincidono con uno unico, passante per il baricentro  $G$  del sistema.

Invero, le

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{\chi}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

del gruppo (8a) non possono esser soddisfatte che, a patto sieno tutte eguali le  $\tilde{\chi}_i = \text{cost}$ . Se così non fosse, la componente secondo  $\tilde{\chi}$  dell'attrazione (precisamente la  $\frac{\partial U}{\partial \tilde{\chi}_i}$ ) non potrebbe annullarsi per ogni punto, *indistintamente*.

Senza passare all'ulteriore discussione delle (8a) le quali in sostanza esprimono nient'altro che una condizione finale di *equilibrio relativo* nel caso piano di  $n + 1$  corpi, possiamo affermare intanto che, *immobile* essendo il baricentro  $G$ , le orbite saranno cerchi con centro in  $G$ , percorse tutte con lo stesso periodo.

Lumeggiato in tal guisa, come c'eravamo proposti, l'aspetto delle *soluzioni stazionarie* del problema degli  $n + 1$  corpi, consideriamo concorrenti al minimo il secondo gruppo delle  $\tilde{\chi}$ , i parametri ordinariamente costanti. Identificandoli con gli angoli  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), con le lunghezze  $k_i$  dei momenti  $\mathbf{I}_i$ , infine con le semiaperture  $\tilde{\Theta}_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) dei coni di *precessione*, troviamo ordinatamente, tenendo presenti le (3), (4), (5) e (6),

$$(9) \quad \omega k_i \sin \alpha_i = 0,$$

$$(10) \quad k_i \left( \frac{\sin^2 \tilde{\Theta}_i}{A_i} + \frac{\cos^2 \tilde{\Theta}_i}{C_i} \right) - \omega \cos \alpha_i = 0,$$

$$(11) \quad k_i^2 \left( \frac{\sin \tilde{\Theta}_i \cos \tilde{\Theta}_i}{A_i} - \frac{\sin \tilde{\Theta}_i \cos \tilde{\Theta}_i}{C_i} \right) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Dalle (9), poichè non si annulla  $\omega$  e nemmeno  $k_i$  (come segue facilmente avendo riguardo alle (10)) si trae  $\sin \alpha_i = 0$ .

Rimane con ciò provato l'annunciato parallelismo, della normale al piano del moto, oltre che con il vettore  $\mathbf{K}$ , cogli assi di rotazione dei singoli corpi. Si desume poi subito dalle (11) a meno di multipli di  $\pi$ ,  $\tilde{\Theta}_i = 0$ , e quindi, dalle (10),

$$\frac{k_i}{C_i} = \omega, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Rilevando che  $k_i : C_i$ , per  $\dot{\Theta}_i = 0$ , dà la velocità angolare  $\mu_i$  della rotazione, possiamo concludere, raccogliendo i risultati, sia pur con qualche ripetizione delle premesse, che, *i corpi celesti di un sistema planetario, soggetto a maree o qualsivogliono azioni dissipative interne, tendono ad atteggiare le loro orbite a circonferenze con centro comune, tutte in un piano ben determinato dai dati iniziali, nonchè a disporre gli assi delle precessioni degeneri (rotazioni) normalmente al piano suddetto, assumendo per le medesime periodo eguale a quello, comune, di rivoluzione.*

**Meccanica.** — *Ostacolo ellittico girevole, investito da una corrente piana irrotazionale.* Nota di A. CONSIGLIO, pres. dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geodesia.** — *Stazione astronomico-geodetica eseguita nel vertice di 1° ordine Bric Torniola, nel luglio 1928.* Nota di U. BARBIERI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. SOLER.

Questa stazione ebbe luogo nelle notti dall'undici al quattordici luglio 1928; essa seguiva quella tenuta nei giorni immediatamente precedenti, nel vertice Eremo di Cherasco: non si credè necessario prostrarla oltre il termine anzidetto, il materiale raccolto essendo apparso sufficiente, ed essendosi, alla fine, mutate le condizioni atmosferiche; il continuarle avrebbe portato ad un ulteriore soggiorno, con aggravio delle spese già ingenti. Come nelle altre stazioni eseguite in precedenza dallo scrivente lungo il meridiano di Mondovì, vennero in essa determinate la latitudine, l'azimut, la longitudine e la gravità.

Il segnale trigonometrico che doveva, se conservato, consistere in una solida costruzione muraria, fu trovato, invece, ridotto ad un cumulo informe di pietre, frammiste ad arbusti, onde, essendo impossibile in dette condizioni individuare la verticale di esso, si pose a nudo il centrino, sul quale a piombo si dispose un robustissimo treppiede a traliccio di legno e ferro, sostegno dell'Universale Bamberg. Attorno si innalzò, come di consueto, il casotto d'osservazione, e le determinazioni, una volta tanto, poterono essere compiute in centro.

A operazioni ultimate si ricoprì con cura il centrino, in guisa da dar riparo almeno ad esso, contro le ulteriori cause di rovina, naturali o volute, a cui era andata incontro l'intera costruzione.

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

Le modalità d'osservazione, sia per la latitudine, che per l'azimut e la longitudine, furono del tutto identiche a quelle seguite nelle precedenti campagne; pertanto si ritiene superfluo il descriverle o il richiamarle. Per le determinazioni di azimut, compiute al tramonto, fu scelto come mira il segnale di 3° ordine ben visibile di Govone, a dieci chilometri dalla stazione, e opportunamente collegato, per le operazioni dell'Istituto Geografico Militare, a vertici di 1° e 2° ordine.

Nelle determinazioni di tempo si seguì il metodo di Döllén, come sempre in precedenza; il cronometro Kullberg, di cui si osservava la correzione, lasciato presso agli apparecchi radiotelegrafici necessari alla osservazione della longitudine, e nel locale della gravità, costituito da una piccola costruzione prossima all'Universale, era collegato al cronografo di quelli, al relais dell'apparato pendolare ed al cronografo sito presso l'Universale, vicino al quale trovavasi un cronometro Fletch, su cui leggevasi il primo siderale, essendo detto cronometro concordante col Kullberg nell'indicazione oraria, a meno di pochi secondi.

Qui appresso si riportano, in tre piccoli specchi, i risultati delle osservazioni di latitudine, tempo ed azimut.

*Latitudine.*

Luglio 1928	1° gruppo	2° gruppo	3° gruppo	4° gruppo	5° gruppo
12	44° 49' 25".1	44° 49' 26".9	44° 49' 24".1	44° 49' 21".4	44° 49' 23".1
13	24.0	24.7	25.0	21.5	23.9
Media . . .	24.5	25.8	24.6	21.4	23.5

Da questi risultati si ottiene, nella loro media semplice, quale valore della latitudine astronomica di Bric Torniola

$$44^{\circ} 49' 23''.9 \pm 0''.7$$

(epoca 1928, 6)

*Determinazioni di tempo.*

Luglio 1928	Oraria	Correzione del Kullberg	Ora siderale corrispondente	Andamento orario
11	$\beta$ Herculis $\chi$ Ophiuci $\alpha$ Ophiuci	+ 0 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup> 49 <sup>s</sup> .60	17 <sup>h</sup> 05 <sup>m</sup> 02 <sup>s</sup> .49	+ 0 <sup>s</sup> .0700
12	49 Herculis $\delta$ Herculis $\alpha$ Ophiuci	+ 51.27	17 03 00.57	+ 0 <sup>s</sup> .1107
13	$\beta$ Erculis $\chi$ Ophiuci $\alpha$ Ophiuci	+ 53.87	16 32 04.75	

*Determinazione dell'azimut di Govone.*

Luglio 1928	Reiterazione	Azimut
11	0°	101° 17' 15".0
	45°	16.8
12	90°	21.6
13	135°	18.1

La media dei valori così ottenuti dà, in definitiva, quale azimut di Govone sull'orizzonte di Bric Torniola

$$101^{\circ} 17' 17''.9 \pm 1''.3$$

*Attrazione locale.*

I dati precedenti, e quelli geodetici, forniti dall'Istituto Geografico Militare, consentono, quindi, il calcolo seguente

$$\text{Latitudine di Bric Torniola} \left\{ \begin{array}{ll} \text{astronomica} & \varphi_a = 44^{\circ} 49' 23''.9 \\ \text{geodetica} & \varphi_g = 44 \ 49 \ 19.9 \end{array} \right.$$

$$\varphi_a - \varphi_g = + \ 0^{\circ} 00' 04''.0$$

$$\text{Azimut della direzione a Govone. . . . .} \left\{ \begin{array}{ll} \text{astronomico} & A_a = 101^{\circ} 17' 17''.9 \\ \text{geodetico} & A_g = 101^{\circ} 17' 11''.0 \end{array} \right.$$

$$A_a - A_g = + 0^{\circ} 00' 06''.9$$

$$\text{da cui le componenti dell'attrazione locale . . . .} \left\{ \begin{array}{ll} \xi = + 04''.0 \\ \eta = (A_a - A_g) \cotg \varphi_a = 06''.9 \end{array} \right.$$

$$\text{l'azimut ellissoidico del piano dell'attrazione locale . . . . .} A = 60^{\circ} 03' 06''.4$$

$$\text{e l'attrazione locale . . . . .} \theta = 8''.01$$

### Determinazione della longitudine.

Questa ulteriore ricerca si compì, come le altre analoghe nelle precedenti stazioni, a mezzo di ricezione radiotelegrafica dei segnali orari europei; si tenne peraltro soltanto conto dei segnali di Parigi, perchè percepiti in modo più completo ed esatto delle altre stazioni di Bordeaux e Nauen.

Le modalità seguirono identiche alle già più volte descritte: l'apparato ricevente fu collocato nell'abiente medesimo ove era disposto il pendolo per le determinazioni gravimetriche, e, come già si disse, il suo cronografo inserito nel circuito del cronometro Kullberg.

I risultati delle segnalazioni ricevute, e le conseguenti deduzioni, vengono riportati nello specchio seguente.

Risulta pertanto, come media della differenza di longitudine astronomica di Bric Torniola, rispetto a Greenwich, in valore assoluto

$$\omega'_m = 0^h 31^m 54^s.973 = 7^{\circ} 58' 44'',640$$

Tenuto allora conto della medesima differenza, ma geodetica, fornita dall'Istituto Geografico Militare

$$\omega = 7^{\circ} 58' 34'',759,$$

e della differenza  $A_a - A_g$  precedentemente determinata, fra l'azimut astronomico e il geodetico di Govone, l'equazione di Laplace

$$A_a - A_g = (\omega' - \omega) \text{ sen } \varphi$$

diventa, sostituendo,

$$6''.90 = 6''.97,$$

con minimo residuo di chiusura.



*Parigi F. L.*

Luglio 1928	Ora siderale locale di ricezione R. T. 1° segnale	Ora di Greenwich al 1° segnale	Differenza di longitudine su Greenwich	Andamento astronomico	Correzione astronomica locale alla ricezione del 1° segnale	Ora corretta di ricezione del 1° segnale	Differenza di longitudine corretta su Greenwich
11 Sera . . . .	18 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> 24 <sup>s</sup> .293	17 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup> .866	0 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> 05 <sup>s</sup> .427	+ 0 <sup>s</sup> .0700	+ 0 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup> 49 <sup>s</sup> .738	18 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 14 <sup>s</sup> .031	0 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> 55 <sup>s</sup> .114
12 Mattina . . . .	5 22 11.505	4 51 07.271	04.234	+ 0.0700	+ 50.932	5 23 02.437	54.694
12 Sera . . . .	18 24 19.017	17 53 15.418	03.599	+ 0.1107	+ 51.348	18 25 10.365	55.013
13 Mattina . . . .	5 26 06.273	4 55 03.841	02.432		+ 52.640	5 26 58.913	55.072

**Geofisica.** — *La periodicità della temperatura media annua in rapporto a quella delle macchie solari.* Nota di G. VIOLA presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Dopo che venne riconosciuto il regolare e ben determinato influsso del periodo di circa 11 anni delle macchie solari sulla variazione degli elementi magnetici, si presentava ovvia la ricerca se tale influsso non si estendesse in simil modo agli elementi meteorologici; ma soltanto nel 1870 si iniziarono da più lati e con grande zelo le relative ricerche, specialmente per opera di Meldrum in Maurizio, e poi da meteorologi indiani, per i quali la supposta influenza tenderebbe a spiegare le periodiche carestie dell'India.

Carlo Meldrun, direttore dell'Osservatorio di Maurizio, ha per il primo reso noto la periodicità dei cicloni e delle meteore in rapporto al periodo delle macchie solari. Più tardi, Köppen è riuscito a spiegare l'influenza delle macchie solari sulle variazioni della temperatura media annua, per i tropici e per le latitudini normali.

Nella presente Nota dimostreremo la non coincidenza che sussiste tra la periodicità delle macchie solari e quella della temperatura media annua. La periodicità delle macchie solari la stabiliremo in base alle osservazioni raccolte dal Wolf ed altri all'Osservatorio di Zurigo. Con le dette osservazioni che abbracciano un periodo di tempo che va dal 1808 fino al 1929, abbiamo costruito la curva di frequenza, la quale, sebbene presenti delle oscillazioni più o meno marcate, risulta di grande ausilio per la determinazione delle epoche dei massimi e dei minimi. Dal confronto di dette epoche con quelle che danno i massimi ed i minimi di temperatura, dovrebbe nascere se la temperatura seguisse una legge di variazione analoga a quella delle macchie solari, una relazione semplice fra minimi e massimi correlativi dei due fenomeni. Questa correlazione per le temperature che passeremo ad esaminare, non sussiste.

Infatti, dalla curva predetta dell'Osservatorio di Zurigo otteniamo per i massimi ed i minimi di macchie le seguenti epoche:

Massimi	1816	1830	1837	1848	1860	1871	1884	1894	1906	1917	1929
Δ Massimi	14	7	11	12	11	13	10	12	11	12	
Minimi	1811	1823	1834	1844	1856	1867	1879	1890	1902	1913	1932
Δ Minimi	12	11	10	12	11	12	11	12	10	11	

(1) Nella seduta del 20 marzo 1932.

*Valori perequati della temperatura media  
per Roma, Napoli e Gaeta.*

Anno	Roma	Anno	Roma	Napoli	Anno	Roma	Napoli	Gaeta	Anno	Roma	Napoli	Gaeta
1812	15.52	1841	16.10	—	1869	15.30	15.66	—	1897	15.37	15.92	17.62
1813	15.42	1842	15.90	—	1870	15.15	15.98	—	1898	15.60	16.26	17.38
1814	15.32	1843	15.85	—	1871	15.22	15.49	—	1899	15.47	16.22	17.38
1815	15.20	1844	16.05	—	1872	15.62	15.99	—	1900	15.37	16.01	17.11
1816	15.25	1845	16.05	—	1873	15.55	15.92	—	1901	15.37	15.75	16.45
1817	15.62	1846	15.65	—	1874	15.05	15.46	—	1902	15.40	15.70	16.27
1818	15.92	1847	15.05	—	1875	15.05	15.65	—	1903	15.45	15.85	16.82
1819	16.10	1848	14.77	—	1876	15.40	16.07	—	1904	15.72	15.88	16.99
1820	16.42	1849	14.55	—	1877	15.55	16.04	—	1905	15.27	15.77	16.13
1821	16.55	1850	14.20	—	1878	15.42	15.85	—	1906	15.12	15.42	15.31
1822	16.72	1851	14.30	—	1879	15.05	15.87	—	1907	15.05	15.47	15.48
1823	16.10	1852	14.75	—	1880	15.42	16.12	—	1908	15.00	15.49	16.17
1825	15.02	1853	14.82	—	1881	15.57	16.25	—	1909	15.00	15.43	16.19
1826	14.72	1854	14.85	—	1882	15.45	15.97	—	1910	—	15.57	15.79
1827	15.00	1855	15.17	—	1883	15.07	15.56	—	1911	—	15.81	15.98
1828	15.68	1856	15.75	—	1884	15.07	15.41	—	1912	—	15.88	16.67
1829	15.62	1857	15.05	—	1885	15.52	15.76	—	1913	—	15.90	16.93
1830	15.72	1858	15.02	—	1886	15.62	15.90	—	1914	—	15.79	16.57
1831	15.75	1859	15.17	—	1887	15.32	15.76	—	1915	—	15.87	15.77
1832	15.47	1860	15.30	—	1888	15.07	15.43	15.58	1916	—	16.10	16.01
1833	15.50	1861	15.50	—	1889	14.95	15.69	15.79	1917	—	16.02	16.26
1834	15.45	1862	15.72	—	1890	14.90	15.14	15.98	1918	—	15.74	16.05
1835	15.07	1863	15.62	—	1891	15.12	15.37	16.42	1919	—	15.86	16.19
1836	14.90	1864	15.42	—	1892	15.62	15.74	17.39	1920	—	16.32	16.79
1837	14.97	1865	15.50	—	1893	15.50	15.81	17.40	1921	—	16.36	16.95
1838	15.35	1866	15.60	—	1894	15.57	15.74	16.84	1922	—	16.20	16.54
1839	15.65	1867	15.60	16.17	1895	15.30	15.66	16.99	1923	—	16.29	16.62
1840	15.87	1868	15.40	15.97	1896	15.10	15.83	17.43	1924	—	16.20	16.32
									1925	—	—	16.33

Le differenze  $\Delta$  presentano un andamento più regolare per i minimi che per i massimi.

La semplice ispezione di esse dimostra che il periodo di variabilità delle macchie oscilla da un massimo di 14 anni ad un minimo di 7. Come valore medio del periodo di frequenza possiamo assumere 11.5. Beninteso, il valore 11.5 non bisogna confonderlo con il supposto periodo di anni 23 ammesso dal Turner. Infatti, l'astronomo in parola, nell'elaborare le osservazioni raccolte a Zurigo, conclude: « Now in the first place we find that there is not a satisfactorily uniform period of 11 years, but rather a double period of 23 years, the halves of which are not quite symmetrical ».

Il periodo di 23 anni, detto comunemente periodo magnetico delle macchie solari, esprime la durata di tempo dopo il quale si ripetono nell'istesso emisfero macchie di polarità omonime; mentre il periodo di 11.5 anni esprime la frequenza della maggiore o minore intensità di macchie sul disco solare.

Le temperature medie che esamineremo si riferiscono alle città: Roma, Napoli e Gaeta, che essendo distanti l'una dall'altra non oltre 100 Km., si adattano meglio allo studio della variabilità della temperatura media. Allo scopo di porre bene in rilievo le oscillazioni in esame abbiamo creduto opportuno costruire 3 serie di curve e scegliere tra queste quella che pone meglio in evidenza la realtà del fenomeno.

La prima serie di curve è stata costruita con i valori normali, tenendo presente:

a) che la somma degli scarti positivi e negativi sia minima;

b) che la somma dei quadrati di essi scarti sia minima.

La seconda serie l'abbiamo costruita con i valori normali perequati di 3 in 3 con il metodo dato dallo Schiaparelli.

La terza invece, l'abbiamo costruita con i valori normali perequati di 3 in 3 nel modo che esponiamo:

Siano

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_n \text{ } n \text{ valori normali}$$

con il metodo Schiaparelli abbiamo:

$$a_{3p} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \quad , \quad a_{4p} = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} \text{ ecc.} \dots$$

nella quale diamo l'istesso peso ai valori che concorrono a dare quello perequato.

Invece, perequando in quest'altra maniera

$$a_{2p} = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4} \quad , \quad a_{3p} = \frac{a_2 + 2a_3 + a_4}{4} \text{ ecc.} \dots$$

veniamo a dare al valore normale corrispondente a quello perequato un peso doppio. In tal modo i valori perequati risultando più prossimi ai veri, messi in curva rappresentano con maggiore probabilità la realtà del fenomeno. Le tre serie di curve non concordano perfettamente nelle epoche dei massimi e dei minimi, ma abbracciano uno stesso numero di fluttuazioni. Le curve della terza serie sono in perfetta concordanza con quelle della prima e presentano inflessioni più regolari. Su di esse si fonderà la nostra discussione.

Per Roma ci avvarremo dei valori medi ricavati dal Prof. Eredia nella elaborazione del materiale d'osservazione raccolto dal 1811 al 1910. La curva comprende due tratti: il primo (vedi fig. 1) che abbraccia le osservazioni

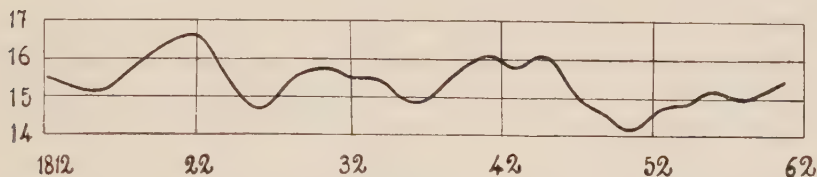


Fig. 1. - Andamento della temperatura media a Roma (1812-1862).

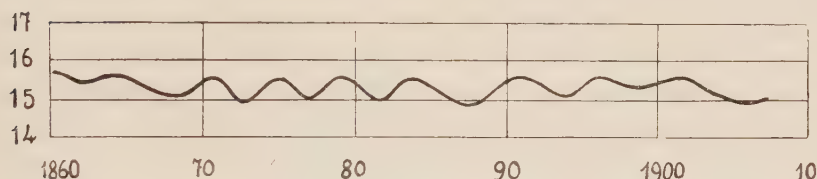


Fig. 2. - Andamento della temperatura media a Roma (1860-1910).

che vanno dal 1811 al 1854, presenta delle oscillazioni molto marcate e irregolari; il secondo invece, è più regolare (vedi fig. 2) e presenta oscillazioni meno ampie delle precedenti.

La divergenza dei due tratti di curva in esame è dovuta essenzialmente alla diversità degli apparecchi di misura, del luogo delle osservazioni ed al modo in cui esse venivano fatte. Per le epoche dei massimi e dei minimi di temperatura ricaviamo :

#### 1° Tratto di Curva

Massimi	1821	1831	1841	1845	
$\Delta$ Massimi		10	10	4	
Minimi	1815	1825	1836	1843	1850
$\Delta$ Minimi		10	11	7	7



## II° Tratto di Curva

Massimi	1862	1867	1872	1877	1881	1886	1893	1898	1904
$\Delta$ Massimi		5	5	5	4	5	7	5	6
Minimi	1858	1864	1870	1875	1879	1884	1890	1896	1901
$\Delta$ Minimi		6	6	5	4	5	6	6	5

Nel primo tratto il periodo oscilla da un massimo di anni 11 ad un minimo di 4, e l'andamento delle differenze  $\Delta$  non risulta abbastanza regolare. Nel secondo le differenze  $\Delta$  presentano un andamento più regolare ed il periodo di variabilità oscilla da un massimo di 7 anni ad un minimo di 4.

Da quest'ultimo tratto, che riteniamo più preciso del primo, ricaviamo per le epoche dei massimi una periodicità di anni 5.3, e per le epoche dei minimi una periodicità di anni 5.4. Come valore del periodo assumeremo il medio 5.35.

Esamineremo per Gaeta i valori medi normali della temperatura, ricavati per il periodo 1887-1926 ed elaborati a loro volta per lo studio della climatologia della città.

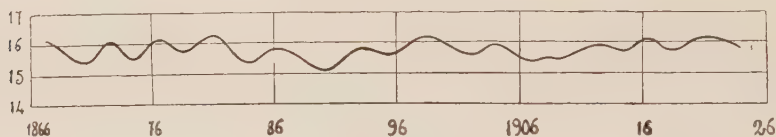


Fig. 3. - Andamento della temperatura media a Napoli (1866-1926)

La curva (vedi fig. 3) costruita in base ai valori perequati, presenta delle oscillazioni più forti di quelle riscontrate nel secondo tratto della curva precedente e meno regolari. Per le epoche dei massimi e dei minimi, otteniamo i seguenti valori:

Massimi	1892	1897	1903	1909	1913	1917	1921
$\Delta$ Massimi		5	6	6	4	4	4
Minimi	1894	1902	1906	1910	1915	1919	1925
$\Delta$ Minimi		8	4	4	5	4	6

Le  $\Delta$  risultano meno regolari delle precedenti ed accusano una periodicità variabile da un massimo di anni 8 ad un minimo di anni 4. Per i massimi otteniamo come valore della periodicità 4.9, e per i minimi il valore 5.2. In definitiva assumeremo come valore del periodo di variazione della temperatura, la media 5.05.

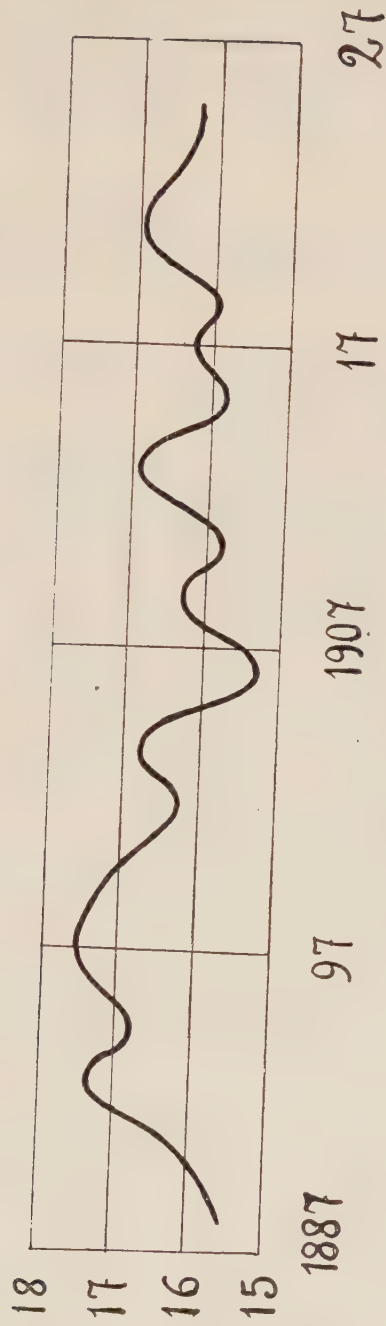


Fig. 4. - Andamento della temperatura media a Gaeta.

Per Napoli elaboreremo le osservazioni raccolte dal 1866 al 1925. Del sessantennio in esame, i primi 35 anni furono studiati dal prof. Alberti, ed il rimanente dal prof. Aurino. La curva ottenuta dai valori perequati (vedi fig. 4) presenta oscillazioni molto regolari e meno ampie delle precedenti.

Ricaviamo per le epoche dei massimi e dei minimi i seguenti valori:

Massimi	1872	1876	1881	1886	1893	1898	1904	1912	1916	1921
Δ Massimi	4	5	5	7	5	6	8	4	5	
Minimi	1870	1874	1878	1884	1890	1895	1902	1908	1914	1918
Δ Minimi	4	4	6	6	5	7	6	6	4	

dai quali otteniamo per le epoche dei massimi una periodicità di anni 5.44, e per quelle dei minimi anni 5.33. Assumeremo come valore del periodo di variabilità la media 5.38.

Il confronto dei valori ricavati per la periodicità della temperatura media afferma che, per le località considerate, la legge di variazione è *unica*.

Questa deduzione ricavata indipendentemente da ciascuna curva dimostra che il fenomeno in esame è reale.

Inoltre, da quanto abbiamo esposto, risulta per Napoli, Roma e Gaeta un periodo di variabilità della temperatura media, circa metà di quello delle macchie solari. Questo risultato non è affatto in concordanza con le conclusioni a cui è giunto il Köppen. Infatti, secondo quest'ultimo, la curva della temperatura media presenta un andamento opposto a quella delle macchie solari, seguendola anche nelle sue irregolarità. Le curve costruite da noi presentano sì delle anomalie, ma non in corrispondenza di quelle che presenta la curva delle macchie.

Nordmann, nel proseguire le ricerche di Köppen in base alle temperature medie raccolte in alcune stazioni tropicali, ha trovato che i minimi di temperatura si verificano ai massimi di macchie solari, e viceversa.

Il grande lavoro di Mielke sulle variazioni della temperatura in rapporto al periodo di 11 anni delle macchie solari, ha dato occasione al Köppen di riprendere le sue ricerche, i cui risultati non concordano affatto con i nostri.

Possiamo adunque concludere: dalle nostre investigazioni basate né sull'analisi di una curva sola, né su di un sol metodo di rappresentazione grafica, risulta per il periodo di variabilità della temperatura media un valore che è metà di quello che è stato dedotto per la frequenza delle macchie sulla superficie del disco solare.

**Chimica.** — *Sulla struttura dei derivati C. sostituiti dall'acido barbiturico.* Nota di D. MAROTTA e G. ROSANOVA, pres. dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica** (Fisica-Matematica). — *Sur l'équilibre entre matière et énergie rayonnante.* Nota di JOAN Y. PLACINTEANU, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans l'étude de la radiation des étoiles, M. A. Eddington<sup>(2)</sup> a introduit l'hypothèse que cette radiation soit toujours accompagnée d'une variation de la masse totale de l'étoile, de sorte que des atomes de matière se transforment en particules d'énergie rayonnante. M. O. Stern<sup>(3)</sup> a apporté une précision à cette condition pour la radiation des étoiles. D'après lui, pour avoir équilibre thermodynamique entre la matière et la radiation qui se trouvent à un moment donné dans une enceinte vide, on doit ajouter la condition que l'étoile, pendant le procès d'action réciproque avec l'énergie rayonnante (p. ex. des photons), doit agrandir sa masse. L'idée fondamentale dans sa théorie est d'établir les conditions d'équilibre entre la matière et la radiation dans le cas où « un atom de gaz (matière) prend naissance de la radiation (photons) » sous la conditions que le gaz et la radiation dans l'état initial (zéro absolu) ont les énergies et les entropies égales. De cette manière l'énergie à l'état initial doit être égale à  $m_0 c^2$  (où  $m_0$  est la masse au repos). En partant de cette hypothèse O. Stern calcule, pour le cas d'équilibre thermodynamique le nombre  $n$  des particules par  $cmc$

$$(1) \quad n = \frac{1}{h^3} (2\pi m_0 kT)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 c^2}{kT}}$$

où  $T$  est la température absolue,  $k$  la constante de Boltzmann,  $h$  la constante de Planck,  $c$  la vitesse de la lumière et  $m_0$  la masse au repos de la particule.

Dans cette note je veux étudier le cas où l'on a des photons. Pour une telle particule (un photon), comme sa masse cinétique est définie par énergie/ $c^2$ , donc différente de zéro,  $m_0$  doit s'annuler (à cause de

$$m = m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

si  $v = c$ ). Dans ce cas, évidemment, la formule (1) n'a plus de sens.

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) A. EDDINGTON, *The internal constitution of the stars*, Cambridge, 1930.

(3) O. STERN, « Zschr. für phys. Chemie », 120, 60, 1926.

M. W. Anderson <sup>(1)</sup> pense pouvoir éviter ce « non-sens » en attribuant aux photons une masse extrêmement petite, mais toujours différente de zéro et donc, une vitesse tout près de  $c$  mais pas exactement égale à celle-ci; d'après une hypothèse bien connue de de Broglie. Il trouve dans ces conditions, pour  $m = 0.01255 \frac{kT}{c^2}$ , la valeur

$$n = 0.021867 \left( \frac{kT}{hc} \right)^3$$

qui a la même forme (au facteur constant près) qu'une formule de Eddington <sup>(2)</sup>

$$(3) \quad n = 8\pi \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 60.42 \left( \frac{kT}{hc} \right)^3.$$

Ne pouvant pas expliquer la discrèpance numérique qui existe entre ces deux valeurs et qui semble n'être pas simplement accidentelle.

M. Eddington écrit cette formule (3) à l'occasion de l'établissement de la loi de Planck (théorie quantique classique), en faisant usage du nombre bien connu <sup>(3)</sup> des oscillations propres stationnaires encloses dans un volume (unité), ayant des noeuds sur les parois. La formule de Eddington (3) a l'avantage sur celle de Stern (1) que la masse  $m_0$  n'y figure plus; mais d'autre part, dans la déduction de (3), on ne tient plus compte (distribution maxwellienne) du phénomène principal énoncé plus haut, à savoir, l'interaction entre matière et radiation avec transformation de l'énergie rayonnante (photons) en masse matérielle (*Principle of exchanges*, loc. cit., p. 45).

J'ai insisté sur ce fait, parce que, à mon avis, c'est précisément dans ce fait là qu'on doit chercher l'explication du résultat paradoxal qu'on obtient quand on veut appliquer (1) aux photons, et aussi la cause de la différence entre (2) et (3). On doit alors essayer de construire une distribution statistique des particules, qui tient compte de la variabilité des masses matérielles à cause de l'interaction avec la radiation.

Mais une telle statistique a été développée par M. T. Levi-Civita <sup>(4)</sup>. D'après la théorie de M. Levi-Civita, si l'on a des particules dont les masses sont variables, à distribuer dans un espace donné (astronomique), on trouve comme fonction de distribution <sup>(5)</sup>

$$(4) \quad f = C \cdot e^{-\alpha m} e^{-\beta e}$$

(1) W. ANDERSON, « Zschr. für Phys. », 66, 709, 1930.

(2) A. EDDINGTON, loc. cit., p. 55.

(3) V. p. ex. M. PLANCK, *Wärmestrahlung*.

(4) T. LEVI-CIVITA, *Pulviscolo cosmico e distribuzione maxwelliana*, « Pont. Acc. d. Sc. Nuovi Lincei », 16 marzo 1930; « Rend. Acc. Lincei », aprile 1930, p. 626.

(5) Loc. cit., p. 180, [7].



où  $C, \alpha, \beta$  sont des constantes,  $m$  la masse et  $\varepsilon$  l'énergie d'une particule. Cette fonction doit satisfaire les conditions de détermination

$$(5) \quad n = \int f \cdot d\sigma \quad ; \quad \rho = \int m \cdot f \cdot d\sigma \quad \text{et} \quad E = \int \varepsilon f d\sigma$$

où  $n$  est le nombre total des particules pour unité de volume,  $\rho$  la densité matérielle et  $E$  la densité de l'énergie cinétique,  $d\sigma = dm \cdot d\Omega \cdot p^2 dp$ ,  $d\Omega$  étant l'angle solide; l'intégrale est à étendre à tout l'espace, et

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \varepsilon_0$$

$\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3)$  étant le vecteur de la quantité de mouvement et  $\varepsilon_0$  l'énergie au zéro absolu de la température.

Nous voulons donc employer cette théorie de M. Levi-Civita pour déduire une distribution statistique valable pour les photons en action réciproque avec la matière, sous la condition qu'au zéro absolu cette distribution soit la même que celle d'un gaz matériel (condition initiale), en considérant le zéro absolu comme état initial pour les deux systèmes. Cette condition nous permettra de déterminer la valeur de la constante  $C$  dans (4), ce qui est nécessaire, car la première des conditions (5) n'est plus utilisable pour le calcul de la constante  $C$ . En vérité, le nombre  $N = nV$  n'est plus, dans notre cas, constant (le nombre des particules matérielles dans un volume  $V$  est, d'après notre hypothèse, variable) ce qui a pour effet de rendre impossible la détermination de  $C$  à l'aide de  $N$ ,  $\rho$  et  $E$ . Nous voulons donc, dans ce cas faire usage de la condition au zéro absolu de la température. Ici, le gaz des photons doit se comporter de la même manière qu'un gaz matériel, c'est à dire comme un gaz de Fermi <sup>(1)</sup>. Une seule particule peut occuper, à un instant donné, une cellule dans l'espace des phases. Nous envisagerons comme cellule un champ (à sept dimension) de volume fini  $h^3$  par rapport à l'espace cosmique où se meuvent les particules, mais comprenant au contraire toutes les déterminations possibles des vitesses et des masses.

D'après la définition de  $f$ , comme fonction de répartition, rapportée à l'unité de volume, le nombre des particules dans une cellule aura la valeur  $h^3 \int f d\sigma$ . Dès lors notre hypothèse se traduit par l'équation

$$(6) \quad h^3 \int f_0 d\sigma = 1,$$

où  $f_0$  est la valeur de  $f$ , fournie par (4) au zéro absolu ( $\mathbf{p} = 0$ ).

On obtient de cette manière

$$(7) \quad C = 1/h^3 e^{-\beta\varepsilon_0} \int_0^\infty e^{-\alpha m} dm,$$

(1) E. FERMI, « Zschr. für Phys. », 36, 902, 1926.

après quoi l'expression (4) de  $f$  devient

$$(8) \quad f = \frac{e^{-\alpha m} e^{-\beta \varepsilon}}{h^3 e^{-\beta \varepsilon_0} \int_0^\infty e^{-\alpha m} dm},$$

et la première des formules (5) s'explicite sous la forme

$$(9) \quad n = \frac{\frac{1}{\sigma} \int_0^\infty e^{-\alpha m} e^{-\beta \varepsilon} d\sigma}{h^3 e^{-\beta \varepsilon_0} \int_0^\infty e^{-\alpha m} dm}$$

qui est la relation que nous cherchions, pour déduire le nombre  $w$  des particules, par  $cmc$ . Pour un volume  $V$  on a  $N = nV$ . Nous voulons transformer l'expression de  $n$  en faisant les calculs. Il est évident que l'on a

$$n = \frac{4 \pi}{h^3} \frac{\int_0^\infty dm \cdot e^{-\alpha m} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} p^2 dp}{\int_0^\infty e^{-\alpha m} dm}.$$

En tenant compte des identités

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\beta}{2m} p^2} p^2 dp = \left(\frac{\beta}{2m}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad ; \quad \int_0^\infty m^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha m} dm = \frac{3}{4} \alpha^{-\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\pi}$$

il vient

$$(10) \quad n = \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \pi}{h^3} (\alpha \cdot \beta)^{-\frac{3}{2}}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer les valeurs des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ . En ce qui regarde  $\beta$  elle peut être facilement déterminée par la méthode habituellement employée; ou encore, par la remarque d'après laquelle la distribution de M. Levi-Civita, à la limite  $m = 0$ , doit se transformer dans celle de Maxwell. Il vient donc

$$(11) \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Pour déterminer  $\alpha$  employons les relations de M. Levi-Civita <sup>(1)</sup>

$$(12) \quad \frac{1}{\alpha} = \mu \quad ; \quad \frac{1}{\beta} = \frac{\mu}{2} v^2$$

(1) Loc. cit., p. 182, [9].

où,  $\mu$  signifie la masse la plus probable et  $v$  la vitesse la plus probable d'une particule. Mais il est évident que pour un photon  $v = c$  et  $\mu = 2 \frac{kT}{c^2}$  (d'après (11) et (12)). On a, en définitive

$$\alpha = \frac{c^2}{2kT} \quad , \quad \beta = \frac{1}{kT} .$$

Avec ces valeurs notre relation (10) devient

$$n = 6\pi^2 \left( \frac{kT}{hc} \right)^3$$

qui est exactement (jusqu'à 2/100) la valeur de M. Eddington.

L'avantage de notre méthode est d'éviter des hypothèses complémentaires telle que celle de de Broglie pour la constitution du photon. Elle nous conduit tout strictement à la valeur

$$m_0 = 2 \frac{kT}{c^2}$$

pour la masse au repos du photon <sup>(1)</sup> et en même temps a notre relation finale. On voit donc clairement, que le motif pour le quel la formule (1) de Stern est en défaut pour les photons est, que dans sa déduction l'on néglige ce fait essentiel, qu'on est en présence d'un système des particules à masse variables, et qu'alors on ne peut plus les traiter par la statistique de Maxwell-Boltzmann, mais par celle de M. Levi-Civita.

(1) Il est à remarquer que même si l'on pose dans (1) la valeur  $m_0 = 2 \frac{kT}{c^2}$  au lieu de la valeur d'Anderson, on obtient  $n = 42.4 \left( \frac{kT}{hc} \right)^3$  plus proche, il est vrai de (3) et de notre valeur, mais tout au plus, différente. Cela confirme nos considérations, car, en tout cas cette valeur est *déduite* dans notre théorie. Si non, elle reste toute *arbitraire*.

**Fisica.** — *Ricerche sulla radioattività del potassio*<sup>(1)</sup>. Nota di D. BOCCIARELLI presentata<sup>(2)</sup> dal Socio A. GARBASSO.

1. I soli dati che si hanno finora sull'energia della radiazione  $\beta$  del potassio sono dedotti da misure di assorbimento<sup>(3)</sup>. Mentre da un lato i risultati ottenuti dai diversi autori sono poco concordanti fra di loro (e ciò dipende dal fatto che la debole attività dell'elemento ostacola l'esattezza delle misure) dall'altro non è ben definita la relazione tra energia e coefficiente di assorbimento. Anzi non si può dire neppure che esista, per una radiazione corpuscolare, un coefficiente d'assorbimento<sup>(4)</sup> vero e proprio perchè la forma della curva d'assorbimento varia secondo i diversi metodi di misura (ionizzazione, conteggio, ecc.) e solo in particolari condizioni è approssimativamente esponenziale. In base alle relazioni empiriche di Lenard<sup>(5)</sup> tra energia e assorbimento si può solo dire che la velocità delle particelle  $\beta$  del potassio è compresa approssimativamente tra 0.7  $c$  e 0.83  $c$ .

Come è noto, sull'energia di particelle  $\beta$  emesse da sostanze fortemente radioattive si sono potuti ottenere, mediante esperienze di deflessione magnetica, dati molto più precisi che non mediante misure di assorbimento. Si riconosce facilmente, però, che nessuno di questi metodi di analisi è applicabile allo studio di una radiazione così debole come è quella del potassio (essa risulta, dalle misure di intensità pubblicate da Mühloff<sup>(6)</sup> mille volte meno intensa di quella dell'uranio). Recentemente, tuttavia, per lo studio della radiazione  $\beta$  del rubidio, è stato introdotto da G. Occhialini<sup>(7)</sup> un metodo di analisi magnetica che, sacrificando un poco il potere risolutivo, può essere applicato anche allo studio dell'ancor più debole radioattività del potassio. Questo metodo, appunto, è stato adottato nella presente ricerca.

(1) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Fisica in Arcetri.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1932.

(3) CAMPBELL, «Proc. Camb. Phil. Soc.» 14, 211, 557, 1907; HENRIOT, «Le Radium» 7, 40, 1910; HENRIOT e VAVON, «C. R.», 149, 39, 1909; HAHN e ROTHENBACH, «Phys. Zeit.», 20, 194, 1919; HOFFMANN, «Z. S. f. Phys.» 25, 177, 1924; HARKINS e GUY, «Proc. Nat. Acad. Sci.», 11, 628, 1925.

(4) Il coefficiente d'assorbimento definito, come è noto, da  $\frac{d \log I(x)}{dx}$  ( $I(x)$  rappresenta l'intensità  $I$  della radiazione in funzione dello spessore  $x$  dello strato assorbente attraversato) ha un valore indipendente da  $x$  e caratteristico quindi della radiazione, solo se la curva di assorbimento è esponenziale.

(5) WIEN HARMS, vol. XIV, p. 177.

(6) MÜHLOFF, «Ann. d. Phys.» 7, 205, 1930.

(7) G. OCCHIALINI, «Rend. Lincei», XIV, 103, 1931.

2. Il dispositivo sperimentale è completamente analogo a quello di Occhialini al cui lavoro rimando per la descrizione.

Il contatore di Geiger-Müller, che rivela gli elettroni, ha un diametro di 1.5 cm. e un'altezza di 1.5 cm. La parete è di alluminio, di 0.0007 cm. di spessore. Il preparato di potassio è disposto sopra una fascia cilindrica di 7,2 cm. di diametro che circonda il contatore. La pressione nell'interno della scatola che racchiude contatore e preparato è di 4 cm. di mercurio. L'apparecchio è disposto tra le espansioni polari di un elettromagnete (di 11.2 cm. di diametro) in modo che le linee di forza risultano parallele all'asse del contatore, ed è protetto dalla radioattività dell'ambiente da una corazza di piombo di 6 cm. di spessore. Gli impulsi spontanei si riducono così sostanzialmente a quelli dovuti alla radioattività dell'apparecchio stesso e alla radiazione penetrante. Essi vennero contati, togliendo il preparato, prima e dopo ogni serie di misure, e risultarono, in media, 1,51 al minuto. Gli impulsi del contatore, amplificati mediante un sistema di valvole termioniche, venivano registrati da un contatore meccanico,

3. Le particelle  $\beta$  emesse dal preparato in tutte le direzioni, deflesse dal campo, si avvolgono in eliche attorno a cilindri circolari aventi le generatrici parallele alle linee di forza e quindi all'asse del contatore. Quando si aumenta l'intensità del campo, diminuiscono i raggi dei cilindri, e poichè le particelle che seguono traiettorie che si avvolgono su cilindri il cui diametro è inferiore alla distanza tra il preparato e la parete del contatore non possono evidentemente penetrare nel contatore stesso, all'aumentare del campo si escludono via via i raggi più molli.

Per poter dedurre, dall'intensità  $I$  della radiazione segnata dal contatore in funzione del campo  $H$ , la distribuzione spettrale della radiazione stessa, e per valutare il potere risolutivo dell'apparecchio, occorre anzitutto calcolare come varia questa intensità in funzione del campo per una radiazione monocromatica, composta cioè di particelle aventi tutte la medesima velocità. Perciò sarebbe necessario conoscere la distribuzione dell'intensità nelle diverse direzioni. Se lo strato emittente fosse abbastanza spesso da assorbire completamente le particelle emesse dagli strati inferiori varrebbe, come per l'emissione luminosa, la legge del coseno. Se lo strato fosse abbastanza sottile da poter trascurare l'assorbimento, varrebbe, come nel caso dell'emissione di particelle  $\alpha$ , la legge della distribuzione uniforme. Il caso che ci interessa è certamente intermedio fra i due, ma con ogni probabilità si avvicina di più al primo che al secondo, soprattutto per quel che riguarda l'emissione sotto forti angoli.

Il calcolo della funzione  $I = f(H)$  per una radiazione monocromatica è stato eseguito comunque per i due casi estremi della distribuzione secondo la legge del coseno e della distribuzione uniforme. Il problema è stato semplificato supponendo che il sale attivo sia disposto, anzichè sopra una fascia



cilindrica, sopra il cerchio secondo il quale questa fascia è intersecata dal piano normale all'asse del contatore e passante per il suo centro. Per ragioni di simmetria basterà evidentemente eseguire il calcolo per i raggi che partono da un punto A di questa striscia e che raggiungono il contatore nella sua metà superiore.

Riferiamoci a un sistema di coordinate polari aventi il polo in A, come asse polare la generatrice del cilindro passante per A, e come piano meridiano quello passante per l'asse del contatore. Indichiamo con  $\lambda$  e  $\varphi$  rispettivamente la latitudine e la longitudine e con  $d\omega = \cos \lambda d\lambda d\varphi$  l'elemento di angolo solido. Il nostro problema si riduce a valutare

$$I_1 = \iint \cos \lambda \cos \varphi d\omega = \iint \cos^2 \lambda \cos \varphi d\lambda d\varphi$$

nel caso della legge del coseno, e

$$I_2 = \iint d\omega = \iint \cos \lambda d\lambda d\varphi$$

nel caso della legge della distribuzione uniforme. Eseguendo prima l'integrazione rispetto a  $\varphi$  si ha rispettivamente

$$I_1 = \int_0^{\Lambda} \cos^2 \lambda d\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\Lambda} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \cos^2 \lambda d\lambda$$

$$I_2 = \int_0^{\Lambda} \cos \lambda d\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_0^{\Lambda} (\varphi_2 - \varphi_1) \cos \lambda d\lambda$$

$\varphi_1$  e  $\varphi_2$  rappresentano rispettivamente la longitudine minima e massima dei raggi emessi sotto latitudine  $\lambda$  che, per quel dato valore del campo, possono raggiungere il contatore. Essi sono quindi, per un dato valore del campo, funzione di  $\lambda$ .

La determinazione di  $\varphi_1(\lambda)$  e  $\varphi_2(\lambda)$  riesce piuttosto complessa perchè si può eseguire soltanto in parte per via analitica. Di più per i diversi valori del campo e per le diverse latitudini,  $\lambda$ , sono di diversa natura le condizioni che determinano  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Per i piccoli valori di  $\lambda$ , finchè i diametri dei cilindri su cui si avvolgono le traiettorie sono maggiori della somma del raggio del cilindro su cui è disposto il preparato più il raggio del contatore,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  vengono determinati dalla condizione che le traiettorie corrispondenti siano tangenti, internamente ed esternamente, al contatore. Quando, all'aumentare del campo, i diametri dei cilindri su cui si avvolgono le traiet-

torie scendono al disotto del limite precisato,  $\varphi_2$  assume il valore costante di  $90^\circ$  (emissione radente) mentre  $\varphi_1$  continua ad essere determinato dalla medesima condizione. All'aumentare di  $\lambda$  i raggi limiti definiti dalle condizioni indicate raggiungono il contatore in punti sempre più vicini alla sua estremità superiore. A partire dalla latitudine per cui il raggio limite esterno giunge al contatore tangente alla sua sezione trasversale estrema,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono determinati dalla nuova condizione che le traiettorie raggiungano il contatore in uno dei punti della sezione estrema stessa.

Il risultato dei calcoli è rappresentato nella fig. 1; la linea continua dà l'andamento dell'intensità  $I$  in funzione del rapporto  $\frac{H}{\sigma}$  fra l'intensità del

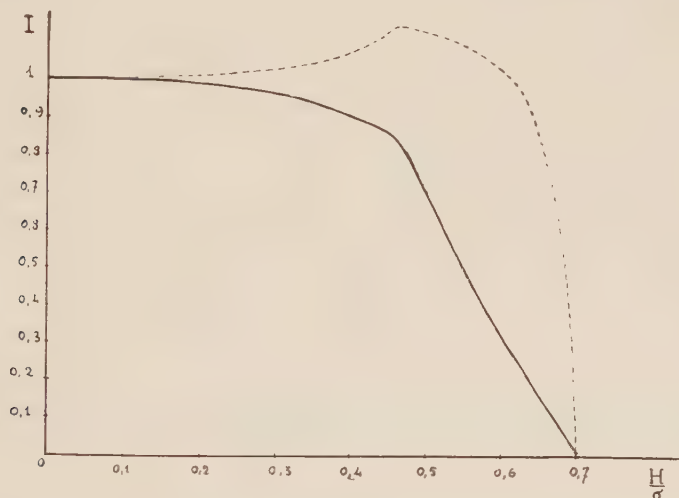


Fig. 1.

campo e la rigidità magnetica dei corpuscoli, nel caso della distribuzione della legge del coseno, e la linea tratteggiata nel caso della distribuzione uniforme. Come si vede le due curve non si discostano notevolmente l'una dall'altra che nell'ultima parte, cioè per forti valori del campo magnetico, quando raggiungono il contatore soltanto raggi emessi in direzione molto inclinata. Per l'emissione sotto questi forti angoli, d'altronde, l'ipotesi della distribuzione uniforme non corrisponde certamente alla realtà fisica, mentre si avvicinerà alla realtà fisica l'ipotesi della distribuzione secondo la legge del coseno (lo spessore dello strato potrà infatti essere insufficiente ad assorbire completamente i raggi che lo attraversano in direzione normale ma non quelli che lo attraversano in direzione inclinata). Crediamo perciò di essere autorizzati, per la discussione dei risultati sperimentali, ad utilizzare senz'altro la curva corrispondente alla legge del coseno.

Per controllare il funzionamento dell'apparecchio fu eseguita anzitutto l'analisi magnetica della radiazione  $\beta$  del rubidio la cui distribuzione spet-

trale era già nota dall'esperienza di Occhialini <sup>(1)</sup>. I risultati ottenuti sono rappresentati a tratto continuo nella fig. 2; si vede che la curva sperimentale discende meno rapidamente della curva teorica il che indica, d'accordo

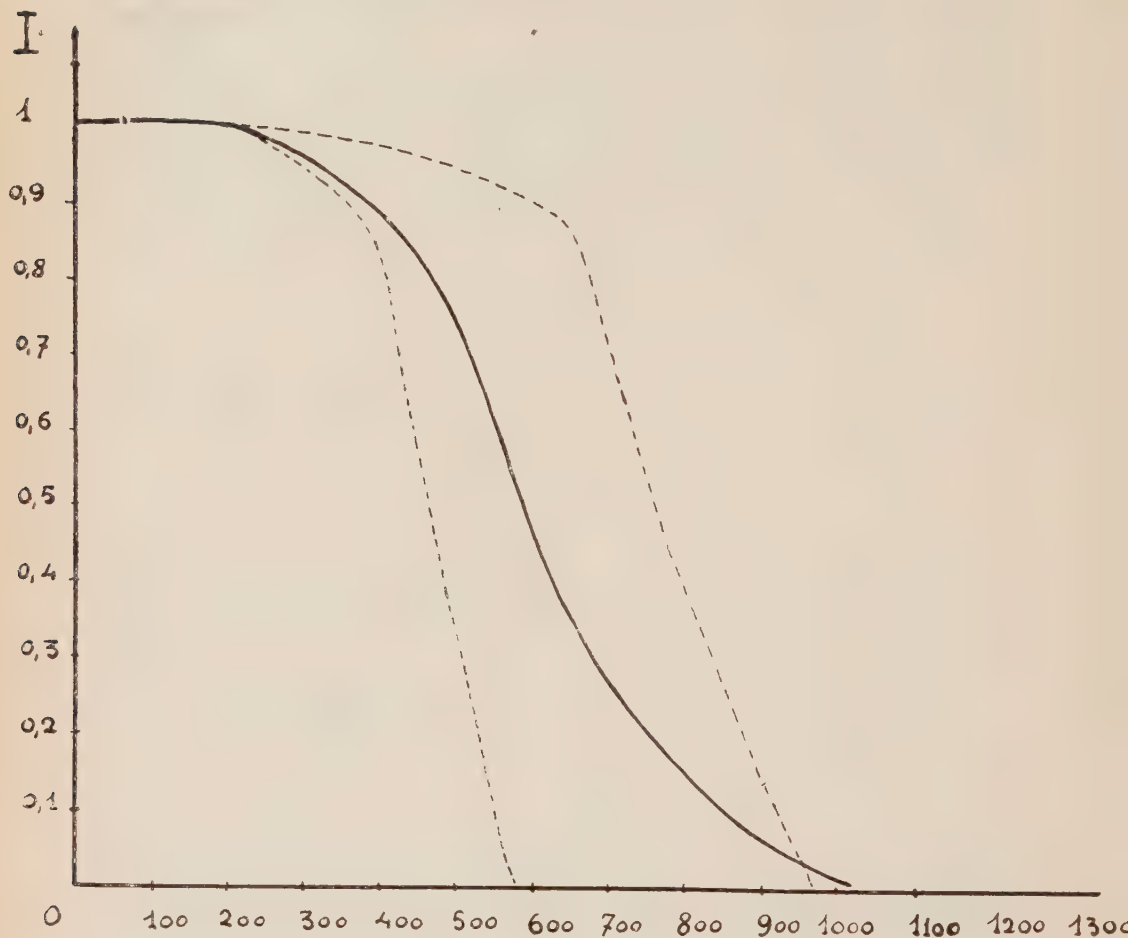


Fig. 2.

H

con i risultati di Occhialini, che la radiazione non è perfettamente monocromatica. La rigidità magnetica dei raggi  $\beta$  del rubidio risulta compresa tra  $\sigma = 855$  e  $\sigma = 1365$  gauss. cm. come appare dal confronto fra la curva sperimentale e le curve teoriche corrispondenti a questi valori della rigidità che sono disegnate tratteggiate nella figura.

4. Per l'analisi magnetica della radiazione  $\beta$  del potassio è stato adottato come sorgente uno strato di KCl di  $0.014$  gr/cm<sup>2</sup> deposto, per eva-

(1) Loc. cit.

porazione lenta dalla soluzione acquosa, sopra una lamina di argento. L'esperienza venne suddivisa in due serie, la prima comprendente misure per 0; 290; 570; 830; 1030; 1190; 1300; 1400 gauss, la seconda per 0; 1400; 1760; 2080 gauss. In ciascuna serie le misure per i diversi valori del campo vennero alternate ad intervalli di uno o due minuti. I risultati ottenuti sono riassunti nelle tabelle I e II.

La curva corrispondente (numero d'impulsi per minuto in funzione del campo) è disegnata nella fig. 3 ponendo uguale a 1 l'intensità per  $H = 0$  e riportando sempre l'errore medio statistico. Come si vede il decremento

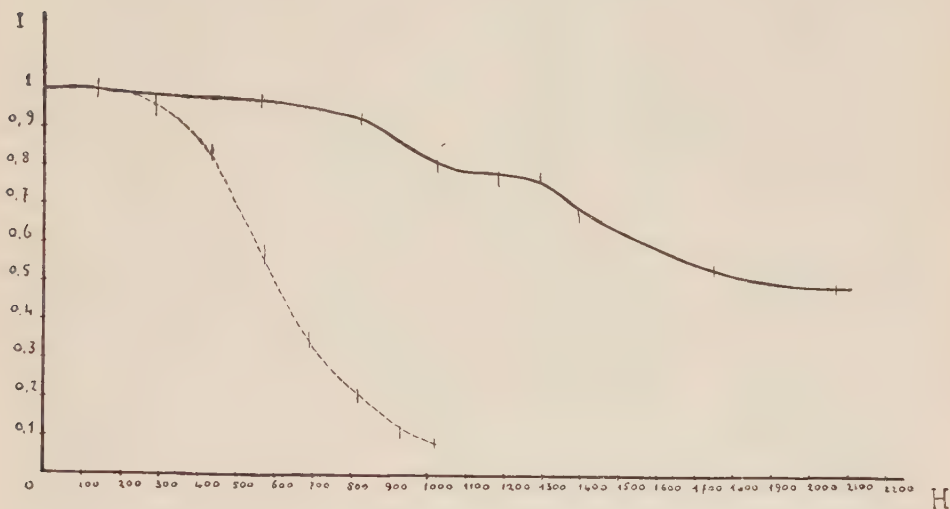


Fig. 3.

dell'intensità comincia a circa 600 gauss e procede fino a circa 1800, ma anche per questo campo il numero degli impulsi supera notevolmente quello degli impulsi spontanei. Verso i 1100 gauss la curva sembra presentare un flesso il che potrebbe significare che la radiazione comprende due bande distinte, ma le misure non sono ancora abbastanza precise per assicurare questo risultato. Quel che invece è certo è che la radiazione è molto più eterogenea di quella del rubidio (come appare chiaro dal confronto con la curva relativa a questo elemento tratteggiata nella stessa figura) e in media assai più dura. Sembra precisamente che vi sia una banda che si estende fino a una velocità di circa 0.83 c e inoltre una componente di molto maggiore energia <sup>(1)</sup>. L'esistenza della prima banda risulta, benchè in modo meno definito, anche dalle misure di assorbimento di Campbell; la componente dura non era stata finora mai rivelata, per quanto recenti ricerche di Bekouneck <sup>(2)</sup> sopra la radiazione  $\gamma$  del potassio potessero farne prevedere l'esistenza.

(1) Per questo risultato cfr. la Nota preliminare pubblicata nella « Nature » 128, 374, 1931.

(2) F. BEKOUNECK, « Nature » 126, 243, 1930.

TABELLA I.

Campo in gauss	0	290	570	830	1030	1190	1300	1400
Impulsi registrati in 172 min. .	1387	1347	1344	1287	1120	1084	1093	990
Impulsi al minuto . . . .	$8.06 \pm 0.21$	$7.83 \pm 0.21$	$7.81 \pm 0.21$	$7.48 \pm 0.21$	$6.51 \pm 0.2$	$6.30 \pm 0.19$	$6.35 \pm 0.19$	$5.75 \pm 0.18$
Impulsi spontanei al minuto .	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51
Impulsi dovuti al potassio . .	$7.65 \pm 0.21$	$6.32 \pm 0.21$	$6.30 \pm 0.21$	$5.97 \pm 0.21$	$5.07 \pm 0.2$	$4.79 \pm 0.19$	$4.84 \pm 0.19$	$4.24 \pm 0.18$

TABELLA II.

Campo in gauss	0	1400	1760	2080
Impulsi registrati in 112 min.	865	582	467	434
Impulsi al minuto . . . .	$7.72 \pm 0.15$	$5.19 \pm 0.22$	$4.16 \pm 0.19$	$3.87 \pm 0.19$
Impulsi spontanei al min. . .	1.51	1.51	1.51	1.51
Impulsi dovuti al potassio . .	$6.21 \pm 0.15$	$3.68 \pm 0.22$	$2.65 \pm 0.19$	$2.36 \pm 0.19$



Per confermare i risultati relativi a questa componente di grande energia si è ripetuto lo studio dell'ultima parte della curva usando, per ottenere maggiore intensità, uno strato molto più spesso dello stesso sale: circa  $0.1 \text{ gr/cm}^2$  deposto su lamina di alluminio. Il conteggio è stato limitato ai valori più alti dell'intensità del campo: 1870; 2100; 2200 e, per confronto, allo zero. I valori ottenuti sono  $18.31 \pm 0.32$  al minuto per 0 gauss,  $7.62 \pm 0.39$  per 1870 gauss,  $6.35 \pm 0.35$  per 2100 gauss;  $5.80 \pm 0.33$  per 2200 gauss.

Queste misure confermano in modo ben definito i risultati dell'esperienza precedente, perchè il numero degli impulsi registrati con 2200 gauss supera quello degli impulsi spontanei di 12 volte l'errore medio. Esse mostrano inoltre che un campo di 2200 gauss non solo non è sufficiente a impedire che la componente più dura della radiazione raggiunga il contatore, ma non ne diminuisce neppure sensibilmente l'intensità; infatti il decremento tra 2100 2200 gauss è appena di  $0.55 \pm 0.48$ . Si ricava da ciò che tale componente deve avere una velocità superiore a  $0.9 \text{ c}$ .

Nel dubbio che questa radiazione molto dura fosse dovuta ad una infezione radioattiva del KCl adoprato come sorgente, ho ripetuto questa esperienza nelle stesse condizioni, ma con uno strato di KBr dello stesso spessore, ottenendo risultati analoghi ai precedenti.

È stata eseguita anche una misura circondando il contatore con una foglia di argento di  $0.106 \text{ gr/cm}^2$  e adoperando come sorgente lo strato di KCl di  $0.1 \text{ gr/cm}^2$ . Il numero di impulsi risultò, senza campo, di  $4.21 \mp 0.2$  al minuto contro  $18.31 \pm 0.32$  che erano stati trovati col medesimo preparato senza lo schermo attorno al contatore; e, col campo di 2100 gauss di  $3.64 \pm 0.2$  contro  $6.35 \pm 0.35$  che erano stati trovati senza schermo.

Da questi valori si può stabilire che mentre la parte molle della radiazione è eliminata quasi completamente dallo schermo, la parte non deflessa dal campo è ridotta a circa la metà. Ciò conferma l'ipotesi che questa componente dura sia composta di particelle  $\beta$ .

Desidero esprimere la più viva riconoscenza al prof. Rossi che mi ha guidato sia nell'esecuzione come nella discussione della presente ricerca.

**Mineralogia.** — *Granato, vesuviana, ilmenite e titanite del Monte Rosso di Verra (Gruppo del Monte Rosa)* <sup>(1)</sup>. Nota di T. CARPANESE, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio G. BOERIS.

## II. ILMENITE E TITANITE <sup>(3)</sup>.

### *Ilmenite.*

Il prof. Boeris <sup>(4)</sup> raccolse nei giacimenti del Monte Rosso, assieme a perowskite, magnetite e titanolivina, alcuni minuscoli cristalli di ilmenite, in uno dei quali determinò le forme  $c\{0001\}$  ed  $r\{10\bar{1}1\}$ . Io pure potei osservare nel serpentino, annidati fra le lamelle della clorite, alcuni cristalli, piccoli ma ricchi di faccette, nei quali ho potuto determinare diverse forme.

I cristalli sono tabulari secondo la base, che presenta spesso le note striature e figure di corrosione a simmetria trigonale. Fra i romboedri predominano le facce del romboedro di secondo ordine  $n\{22\bar{4}3\}$ ; le altre facce sono sempre molto piccole, ad eccezione talvolta di quelle della  $r\{10\bar{1}1\}$ . Tuttavia anche le più piccole faccette, per la loro viva lucentezza, poterono essere determinate esattamente.

Le forme osservate sono le seguenti:

$$c\{0001\}, r\{10\bar{1}1\}, \xi\{20\bar{2}5\}, e\{01\bar{1}2\}, s\{02\bar{2}1\}, \pi\{11\bar{2}3\}, n\{22\bar{4}3\}.$$

Fra queste, si trovano in tutti i cristalli la base  $c\{0001\}$ , il romboedro di primo ordine  $r\{10\bar{1}1\}$  e quello di secondo ordine  $n\{22\bar{4}3\}$ . Frequenti sono anche le facce delle forme  $e\{01\bar{1}2\}$  ed  $s\{02\bar{2}1\}$ . Ciascuna delle altre forme fu osservata in un solo cristallo.

Dalle numerose misure eseguite fra la base ed il romboedro fondamentale si ottenne il valore medio:

$$(0001)(10\bar{1}1) = 57^{\circ}55'$$

in base al quale si calcola per la costante:  $\frac{c}{a} = 1.38146$ .

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Padova.

(2) Nella seduta del 17 aprile 1932.

(3) Contin. v. T. CARPANESE, *Granato, vesuviana, ilmenite e titanite del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)*. I. *Granato e vesuviana*, questi « Rendiconti », Vol. XV, p. 591-595.

(4) G. BOERIS, *Appunti di mineralogia valdostana. Minerali del Monte Rosso in Valle di Ayas*. Bologna, 1910, « Rend. R. Accad. delle Scienze », XIV, 180.

Come si vede, questi valori sono notevolmente elevati, indicando una ilmenite ad alto tenore di titanio, quale si ha nelle ilmeniti di composizione prossima a quella espressa dalla formula  $\text{FeTiO}_3$  (ilmeniti di Val Malenco, Val Devero, Prägraten, Kragerö, ecc., che contengono da 48 % a 57 % di  $\text{TiO}_2$ ). Anche Boeris in un cristallo di ilmenite del M. Rosso ha ottenuto per l'angolo sopra detto i valori di  $57^\circ 58'$  e  $58^\circ$ .

Data la minima quantità di minerale a mia disposizione, non ho potuto farne un'analisi quantitativa completa; mi fu possibile soltanto eseguire una determinazione approssimata del  $\text{TiO}_2$ , che, in accordo con quanto dissi sopra, mi risultò del 53 % circa.

Riporto infine il quadro dei valori angolari misurati.

Angoli misurati	Valori calcolati (Koksharov)	Numero delle misure	Limiti	Medie
(0001) ( $10\bar{1}1$ )	$57^\circ.58 \text{ } 1/2'$	9	$57^\circ.38' - 58^\circ.4'$	$57^\circ.55'$
» ( $20\bar{2}5$ )	$32.36$	1	—	$32.31$
» ( $01\bar{1}2$ )	$38.38$	4	$38.32 - 38.40$	$38.36$
» ( $02\bar{2}1$ )	$72.38$	3	$72.36 - 72.49$	$72.42$
» ( $11\bar{2}3$ )	$42.42$	1	—	$42.32$
» ( $22\bar{4}3$ )	$61.33$	4	$61.13 - 62.3$	$61.31$
( $22\bar{4}3$ ) ( $10\bar{1}1$ )	$26.5$	1	—	26
» ( $01\bar{1}2$ )	$32.3$	1	—	$32.5$

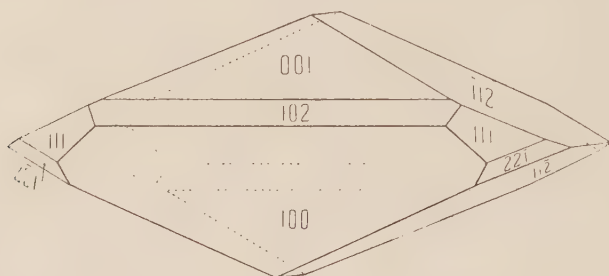
### *Titanite.*

La titanite in cristalli fu trovata nella parte più occidentale dei giacimenti del M. Rosso, e precisamente al bordo di piccole lenti di granatite. I cristalli si trovano in piccole geodi in una roccia prevalentemente cloritico-serpentinosa cosparsa di noduli granatiferi, e sono talvolta accompagnati da clorite e calcite. Essi sono sempre piccoli, al più di qualche millimetro di massima dimensione. Mostrano un colore giallo-bruno, più raramente giallo-verdognolo. Le facce sono in genere a contorni irregolari, e poco speculari; tuttavia non mancano cristalli minuscoli con facce piane e lucenti, che si prestano bene alle determinazioni cristallografiche.

La figura, che rappresenta uno di questi cristalli di titanite, può dare un'idea del loro abito. Essi sono sempre più o meno tabulari secondo  $a\{100\}$ , a sviluppo allungato nella direzione dell'asse  $y$ . Alle facce della  $\{100\}$  si accompagnano sempre, in ordine di sviluppo decrescente, quelle delle forme  $l\{\bar{1}12\}$ , (facilmente riconoscibili per la caratteristica marcata striatura parallela alla zona  $[001 \cdot \bar{1}12]$ ),  $c\{001\}$  ed  $x\{102\}$ . Le altre facce sono di solito molto piccole, e localizzate presso le due estremità dei cristalli. Fra di queste,

le più comuni appartengono alla  $n\{111\}$ , alla  $w\{\bar{2}21\}$  ed alla  $m\{110\}$ , forme ben note nella titanite.

In alcuni dei cristalli più piccoli compaiono anche delle facce ben distinte ed individuabili di forme non ancora note per il minerale. È anzi caratteristico il fatto che, sebbene i cristalli siano di solito poveri di forme, fra di queste si presentino le forme nuove in numero relativamente note-



vole, per cui nei pochi cristalli adatti alle misure se ne poterono individuare quattro.

In un cristallo di titanite che presenta una sola faccia della  $x\{102\}$ , in luogo della opposta ho potuto osservare una piccola faccetta, che dista di  $3^{\circ}24'$  dalla posizione che avrebbe dovuto occupare la faccia mancante. Tale faccetta si trova nella zona  $[24\bar{1}]$ , fra le facce  $(102)$  e  $(\bar{1}12)$ , e per la sua posizione, che potei determinare anche relativamente alle  $(001)$ ,  $(100)$  e  $(111)$ , corrisponde al simbolo  $(9 \cdot 1 \cdot 22)$ , come si può rilevare dalla seguente tabella:

$(9 \cdot 1 \cdot 22)$	$(102)$	mis.	$3^{\circ}24'$	calc.	$3^{\circ}15'$
»	$(001)$	»	18 .39	»	18 .10
»	$(100)$	»	42 .11	«	42 .12
»	$(111)$	»	23 .59	«	24 .35

Il valore di  $3^{\circ}24'$  per l'angolo  $(9 \cdot 1 \cdot 22) (102)$  fu ricavato sottraendo da  $180^{\circ}$  il valore effettivamente misurato dell'angolo  $(9 \cdot 1 \cdot 22) (\bar{1}0\bar{2})$ .

È degno di nota il fatto che anche Ranfaldi<sup>(1)</sup> e Bianchi<sup>(2)</sup> osservarono nella titanite la sostituzione di una delle facce della  $\{102\}$  con una faccia vicina, che appartiene alla forma  $\Lambda\{317\}$  nella titanite di Val Giuf studiata da Ranfaldi, ed all'è forme  $\Lambda\{317\}$  e  $\Lambda_1\{6 \cdot 2 \cdot 13\}$  nella titanite del Passo dei Laghi in Val Devero studiata da Bianchi. Si può dunque considerare

(1) F. RANFALDI, *Sulla titanite di Val Giuf*, ecc., « Mem. della R. Accad. dei Lincei », Roma, 1913, serie 5ª, IX, 440 e 446.

(2) A. BIANCHI, *Titanite di Val Devero (Ossola)*, « Atti della Soc. It. di Sc. Nat. », Milano, 1916, LV, 110.

la presenza di facce appartenenti a forme vicine alla  $\{102\}$ , ed a simbolo più o meno semplice, in luogo di una faccia di tale forma, come una vera caratteristica morfologica della titanite, osservata già per i cristalli di tre distinti giacimenti.

Il cristallo in cui determinai la  $(9 \cdot 1 \cdot 22)$ , che è uno dei più ricchi di facce fra quelli osservati, presenta la seguente combinazione di forme:

$$a\{100\}, c\{001\}, n\{111\}, x\{102\}, l\{\bar{1}12\}, \{9 \cdot 1 \cdot 22\}.$$

Anche in un frammento di un altro cristallo, nel quale la  $\{102\}$  manca completamente, osservai, a pochi gradi dalla posizione corrispondente ad una faccia di questa forma, una sottile faccetta, nella zona delle  $(100)$  e  $(001)$ . Questa faccetta, nitida e lucente, mi permise di ottenere delle misure assai precise, in base alle quali ho calcolato il simbolo  $\{207\}$ , nuovo per la titanite. I valori degli angoli calcolati per questa forma corrispondono bene ai risultati delle misure:

$(207)(100)$	mis.	$46^{\circ}.24'$	calc.	$46^{\circ}.41'$
» $(\bar{1}12)$	»	$52$	»	$51.58$ .

Questo cristallo è alquanto povero di forme; in esso riscontrai, oltre alla  $\{207\}$ , soltanto la  $a\{100\}$ , la  $c\{001\}$  e la  $l\{\bar{1}12\}$ .

Una terza forma non ancora nota mi fu dato determinare in un frammento di titanite la cui massima dimensione non raggiunge il millimetro. Essa è rappresentata da una piccolissima faccetta di forma irregolare, che si trova nella zona delle facce  $(001)$  e  $(\bar{1}10)$ . La sua posizione corrisponde all'incrocio fra questa zona e quella determinata dalla forma  $a\{100\}$  con la forma  $\{131\}$ , la quale però manca nei cristalli di titanite del M. Rosso. Gli angoli misurati con le facce di tre altre forme permettono di calcolare per questa faccia il simbolo  $(\bar{3}31)$ .

$(\bar{3}31)(001)$	mis.	$100^{\circ}.22'$	calc.	$100^{\circ}.29'$
» $(\bar{1}00)$	»	$39.30$	»	$39.29$
» $(111)$	»	$41.12$	»	$41.15$ .

In un altro dei cristalli studiati osservai una faccia della forma  $\{350\}$  nuova anch'essa per il minerale. Essa si trova nella zona  $[001]$ , vicino ad un estremo del cristallo ed adiacente a due faccette delle forme  $n\{111\}$  e  $w\{\bar{2}21\}$ . Nello stesso cristallo si trovano presenti e maggiormente sviluppate le forme  $a\{100\}$ ,  $c\{001\}$ ,  $x\{102\}$ ,  $l\{\bar{1}12\}$ , dando così una combinazione del tutto simile a quella del primo cristallo descritto. Il simbolo della faccia fu calcolato in base alle seguenti misure:



(350) (100)	mis.	47°.45'	calc.	47°.32'
» (111)	»	34.11	»	34.7
» (102)	»	58.59	»	58.29
» ( $\bar{1}12$ )	»	76.22	»	76.11

che, come si vede, si accostano soddisfacentemente ai corrispondenti valori angolari calcolati.

Riassumendo, nei cristalli di titanite del M. Rosso si osservano le seguenti forme:

$c\{001\}$ ,  $a\{100\}$ ,  $m\{110\}$ ,  $\{350\}^*$ ,  $x\{102\}$ ,  $\{207\}^*$ ,  $n\{111\}$ ,  $z\{112\}$ ,  
 $l\{\bar{1}12\}$ ,  $w\{\bar{2}21\}$ ,  $\{\bar{3}31\}^*$ ,  $\xi\{\bar{3}32\}$ ,  $\{9\cdot1\cdot22\}^*$ ,

delle quali quelle segnate con asterisco sono nuove per il minerale.

Le medie dei valori angolari misurati, specialmente quelle dedotte da parecchie misure, si approssimano soddisfacentemente ai corrispondenti valori calcolati in base alle costanti di Des Cloizeaux, come si può rilevare dalla seguente tabella, nella quale riassumo i risultati delle determinazioni cristallografiche eseguite. In essa sono considerate solo le misure eseguite con buone immagini, trascurando tutte quelle che, essendo ottenute con facce troppo poco regolari e lucenti, davano scarso affidamento di esattezza, e servirono soltanto per il riconoscimento delle forme più comuni.

Angoli misurati	Valori calcolati (Des Cloiseaux)	Numero delle misure	Limiti	Medie
(001) (100)	60°.17'	6	60°.9' - 60°.22'	60°.16'
» (111)	38 .16	4	37 .51-38 .30	38 .19
» ( $\bar{1}$ 12)	40 .34	7	40 .32-40 .39	40 .35
» ( $\bar{3}$ 32)	85 .6	1	—	85 .10
» ( $\bar{3}$ 31)	100 .29	1	—	100 .22
» (9.1.22)	18 .10	1	—	18 .39
(01 $\bar{1}$ ) ( $\bar{2}$ 21)	87 .10	2	87 .2 - 87 .20	87 .11
» (110)	33 .14 1/2	1	—	33 .8
» (350)	47 .32	1	—	47 .45
» (102)	39 .17	2	39 .13-39 .57	39 .28
» (207)	46 .41	1	—	46 .24
» (111)	35 .3 1/2	2	34 .48-35 .9	34 .58
» (22 $\bar{1}$ )	44 .12	2	43 .57-44 .13	44 .5
» (9.1.22)	42 .12	1	—	42 .11
(100) ( $\bar{1}$ 12)	85 .44 1/2	3	85 .26-85 .36	85 .34
» ( $\bar{3}$ 31)	39 .29	1	—	39 .30
» ( $\bar{3}$ 32)	49 .35	1	—	49 .44
(110) (22 $\bar{1}$ )	21 .40	1	—	21 .28
(111) (110)	27 .14	2	27 .3 - 27 .8	27 .6
» (350)	34 .7	1	—	34 .11
» ( $\bar{1}$ 12)	60 .55 2/3	2	60 .52- 61 .12	61 .2
» ( $\bar{3}$ 31)	41 .15	1	—	41 .12
» (22 $\bar{1}$ )	48 .54	2	48 .36-48 .50	48 .45
» (9.1.22)	24 .35	1	—	23 .59
(102) (350)	58 .29	1	—	58 .59
» ( $\bar{1}$ 12)	58 .27	2	58 .18-58 .26	58 .22
» (9.1.22)	3 .15	1	—	3 .24
( $\bar{1}$ 12) ( $\bar{1}$ 12)	46 .7 1/2	2	46 .3 - 46 .6	46 .4
» (350)	76 .11	1	—	76 .22
» (207)	51 .58	1	—	52

**Biologia.** — *Studi cirripedologici.* — VII. *Eurianilità e anabiosi in “Chtamalus stellatus” Ranzani.* Nota di B. MONTEROSSO, pres. dal Socio A. RUSSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Seduta del 1° maggio 1932 (anno X)*

*Presidenza del prof. sen. A. GARBASSO*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Astronomia** (Meccanica celeste). — *Sopra l'incremento dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse decrescenti, con applicazioni alle orbite delle stelle binarie.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio G. ARMELLINI.

1. Il problema dei due corpi di masse decrescenti ha assunto oggi una speciale importanza nello studio della genesi delle stelle binarie.

Infatti, come mostrano le osservazioni, i sistemi binari di tipo spettrale recente hanno generalmente massa elevata, orbita stretta e debole eccentricità, mentre invece i sistemi di tipo avanzato hanno debole massa, orbita larga e forte eccentricità. Ora, se ammettiamo che la massa diminuisca col tempo trasformandosi in energia secondo i concetti della Astronomia Side-rale moderna, è facile spiegare perchè i sistemi più vecchi abbiano masse minori ed orbite più larghe dei sistemi giovani. Il calcolo mostra infatti che l'orbita descritta da un astro satellite intorno all'astro principale tende ad allargarsi quando diminuisce la massa del sistema; ed anzi in una Nota precedente <sup>(2)</sup> abbiamo potuto dimostrare rigorosamente che, quando la massa del sistema è funzione decrescente del tempo  $t$ , la distanza media  $a$  è funzione sempre crescente di  $t$ .

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) Cfr. ARMELLINI, *Un teorema sul problema dei due corpi di masse crescenti*, « Rend. Lincei », 1925, 1° sem.

Assai più difficile invece è l'esaminare come vari l'eccentricità quando la massa decresce. In proposito molti autori <sup>(1)</sup>, fondandosi a dir vero sopra dimostrazioni valide solo in prima approssimazione e quindi non applicabili a lunghissimi intervalli di tempo, hanno sostenuto come l'eccentricità resti, presso a poco, inalterata; almeno prescindendo da deboli perturbazioni periodiche. E questa opinione sembra oggi ammessa dalla quasi totalità degli astronomi.

Ora lo scopo di questa Nota consiste appunto nel mostrare come tale opinione non sia esatta. E noi lo dimostreremo sia determinando le condizioni necessarie affinchè l'eccentricità resti sempre debole, sia recando un esempio tratto da un caso particolare in cui il problema è rigorosamente integrabile.

2. Per entrare in argomento, scegliamo le unità di misura in modo da rendere eguali all'unità la costante delle aree  $c$  ed il coefficiente attrattivo  $f$ . Indicando allora con  $r$  il raggio vettore, con  $\vartheta$  l'anomalia contata da una direzione fissa qualsiasi — p. es. in modo che si abbia  $\vartheta = 0$  per  $t = 0$  — e con  $m$  la massa del sistema, le equazioni del moto relativo nel problema dei due corpi, sono, come è notissimo:

$$(1) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1$$

$$(2) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{r^3} - \frac{m}{r^2}.$$

Eliminando  $\vartheta$  e ponendo  $u = \frac{1}{r}$ , si ha poi l'equazione conosciuta col nome di formula di Binèt:

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = m.$$

Ciò posto, supponiamo per il momento che  $m$  sia data in funzione di  $\vartheta$ , la quale è a sua volta funzione univoca e crescente di  $t$  come indica la (1). Allora, integrando la (3), si ha:

$$(4) \quad u = A \cos \vartheta + B \sin \vartheta$$

dove  $A$  e  $B$  sono funzioni di  $\vartheta$  — e quindi di  $t$  — definite dalle equazioni:

$$(5) \quad \frac{dA}{d\vartheta} = -m \sin \vartheta \qquad (6) \quad \frac{dB}{d\vartheta} = m \cos \vartheta$$

(1) Cfr. J. JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, p. 291 (Cambridge, University Press. 1928).



donde integrando ricaviamo:

$$(7) \quad A = A_0 - \int_0^{\vartheta} m \sin \vartheta d\vartheta = A_0 - m_0 + m \cos \vartheta - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta$$

$$(8) \quad B = B_0 + \int_0^{\vartheta} m \cos \vartheta d\vartheta = B_0 + m \sin \vartheta - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta$$

essendo  $A_0$  e  $B_0$  due costanti arbitrarie, ed indicando con  $m_0$  il valore iniziale di  $m$ . Si ha poi facilmente da (1), (4), (5), (6):

$$(9) \quad A_0 = u_0 = \frac{1}{r_0} \quad (10) \quad B_0 = \left( \frac{du}{d\vartheta} \right)_0 = - \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} \right)_0 = - \left( \frac{dr}{dt} \right)_0.$$

Ponendo ora per semplicità:

$$(11) \quad p = \frac{1}{m}$$

e scegliendo due parametri  $e$  ed  $\omega$  definiti dalle relazioni:

$$(12) \quad A_0 - m_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta = me \cos \omega$$

$$(13) \quad B_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = me \sin \omega$$

la (4) diviene con facili calcoli:

$$(14) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos (\vartheta - \omega)}.$$

Possiamo dunque concludere che, in ogni istante, l'orbita relativa descritta dal satellite intorno all'astro principale è una conica avente per fuoco l'astro principale. In tale orbita, l'eccentricità  $e$  ed il periastro  $\omega$  sono variabili con  $\vartheta$ , e quindi con  $t$ , secondo le equazioni (12) e (13) mentre il parametro  $p$  si mantiene sempre eguale all'inverso della massa del sistema. Questa ultima relazione era del resto evidente, se ricordiamo che nel problema dei due corpi la costante delle aree  $c$  risulta definita dall'equazione:

$$(15) \quad c^2 = mfp$$

e che noi abbiamo scelto le unità di misura in modo da avere sempre  $c = f = 1$ .

3. Ora, ricavando  $e$  dalla (12) e dalla (13), abbiamo immediatamente:

$$(16) \quad e^2 = \frac{\left[ A_0 - m_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta \right]^2 + \left[ B_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \right]^2}{m^2} =$$

$$= \frac{\left[ A_0 - m_0 - \int_0^t \frac{dm}{dt} \cos \vartheta dt \right]^2 + \left[ B_0 - \int_0^t \frac{dm}{dt} \sin \vartheta dt \right]^2}{m^2}.$$

In conseguenza, se  $m$  tende a zero per  $t = \infty$ , l'eccentricità può rimanere finita soltanto quando le costanti arbitrarie  $A_0$  e  $B_0$  e la legge con cui la massa decresce in funzione del tempo sono tali che il numeratore della (16) tenda a zero per  $t$  tendente ad  $\infty$ .

È chiaro che questa condizione — come del resto vedremo con un esempio — non è sempre verificata, onde l'eccentricità non sempre resta limitata.

4. In particolare è facile dimostrare che, se in un istante qualsiasi  $\tau$  l'eccentricità raggiunge il valore 1 e se  $m$  è funzione decrescente di  $t$  e tende a zero quando  $t$  tende ad  $\infty$ , allora, da  $\tau$  in poi, l'eccentricità cresce col tempo e tende ad  $\infty$  insieme con  $t$ .

Poniamo infatti, indicando con  $v$  la velocità:

$$(17) \quad h = \frac{1}{2} v^2 - \frac{m}{r} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{m}{r}.$$

Si ha allora, come è ben noto,

$$(18) \quad \frac{dh}{dt} = - \frac{1}{r} \frac{dm}{dt}$$

$$(19) \quad e^2 = 1 + \frac{2h}{m^2}.$$

Ora, se supponiamo che nell'istante  $\tau$  sia  $e = 1$ , si avrà in quell'istante  $h = 0$ . In conseguenza, per la (18), da  $\tau$  in poi,  $h$  sarà positiva e crescente con  $t$  e quindi, poichè  $m$  decresce e tende a zero, la (19) mostra che  $e$  crescerà da  $\tau$  in poi e tenderà ad  $\infty$  insieme col tempo.

5. Come esempio, supponiamo che, da  $t = 0$  in poi, la massa  $m$  del sistema diminuisca secondo la formula:

$$(20) \quad m = \frac{1}{1 + \varepsilon t}$$

dove  $\varepsilon$  indica una costante positiva qualsiasi.

La (2) e la (1) ammettono allora, come è facile verificare, la soluzione rigorosa:

$$(21) \quad r = 1 + \varepsilon t$$

$$(22) \quad \vartheta = \int_0^t \frac{dt}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon t)}$$

dove abbiamo scelto la costante in modo da avere  $\vartheta = 0$  per  $t = 0$ .

Paragonando ora la (21) con la (14) e tenendo presente la (11), vediamo che in questo caso particolare si ha sempre  $r = p$  e quindi il prodotto  $e \cos(\vartheta - \omega)$  è sempre nullo; in conseguenza, uno almeno dei due fattori dovrà annullarsi.

Per esaminare tale questione, cominciamo a calcolarci le due costanti  $A_0$  e  $B_0$  per mezzo della (9) e dalla (10). Abbiamo allora immediatamente

$$(23) \quad A_0 = 1 \qquad (24) \quad B_0 = -\varepsilon.$$

D'altra parte si ha subito:

$$(25) \quad \int_0^\vartheta \frac{dm}{d\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta = \int_0^t \frac{dm}{dt} \cos \vartheta dt = -\varepsilon \int_0^t \frac{\cos \vartheta dt}{(1 + \varepsilon t)^2} =$$

$$= -\varepsilon \int_0^t \frac{\cos \vartheta dt}{r^2} = -\varepsilon \int_0^\vartheta \cos \vartheta d\vartheta = -\varepsilon \sin \vartheta$$

ed analogamente si ottiene:

$$(26) \quad \int_0^\vartheta \frac{dm}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \varepsilon (\cos \vartheta - 1)$$

la (12) e la (13) divengono quindi, in questo caso:

$$(27) \quad me \cos \omega = \varepsilon \sin \vartheta$$

$$(28) \quad me \sin \omega = -\varepsilon \cos \vartheta$$

donde otteniamo immediatamente:

$$(29) \quad \cotg \omega = -\tg \vartheta$$

$$(30) \quad e = \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon(1 + \varepsilon t).$$

La (29) mostra che si ha sempre  $\vartheta = \omega + 90^\circ$  e cioè  $\cos(\vartheta - \omega) = 0$ , mentre la (30) indica che l'eccentricità cresce continuamente e tende ad  $\infty$  per  $t = \infty$ . Come verifica, abbiamo dalla (17):

$$(31) \quad h = \frac{1}{2} \left[ \epsilon^2 + \frac{1}{(1 + \epsilon t)^2} \right] - \frac{1}{(1 + \epsilon t)^2} = \frac{1}{2} \left[ \epsilon^2 - \frac{1}{(1 + \epsilon t)^2} \right]$$

e quindi la (19) dà subito:

$$(32) \quad e = \epsilon(1 + \epsilon t)$$

in perfetto accordo con la (30).

Infine, eliminando  $t$  tra la (21) e la (22), si otterrebbe come equazione della traiettoria:

$$(33) \quad r(1 - \epsilon \vartheta) = 1$$

e cioè una *spirale iperbolica*.

Riepilogando, vediamo che, in questo caso particolare, la linea degli apsi di ruota con velocità angolare eguale a quella del satellite, mantenendosi discosta da esso di  $90^\circ$ , mentre l'eccentricità cresce all'infinito. E, poichè la costante positiva  $\epsilon$  può anche prendersi piccola a piacere, il fenomeno ha luogo anche se la massa decresce in modo estremamente lento<sup>(1)</sup>.

**Meccanica.** — Sulle leggi di forza centrale corrispondenti ad assegnate traiettorie e sopra un caso particolare notevole. Nota di V. NOBILE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — Integrazione asintotica dell'equazione differenziale di Thomas-Fermi. Nota di A. SOMMERFELD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Vedemmo, altra volta, come ponendo  $e = E = \text{costante}$ , ne risulti  $\cos(\vartheta - \omega) = -E$  e quindi  $r = \frac{p}{1 - E^2}$ , mentre  $m$  assume la forma:

$$(1) \quad m = \frac{1}{\sqrt{a_0 t^2 + 2 a_1 t + a_2}}.$$

In particolare, se si ha

$$(2) \quad r = p = \frac{1}{m}$$

deve essere

$$(3) \quad m = \frac{1}{at + b}.$$

Le proprietà inverse non sono però dimostrate.

# MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica** (Analisi). — *Serie di fattoriali ed equazioni alle differenze*. Nota di U. BROGGI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio S. PINCHERLE.

1.  $A_1, A_2, \dots, A_p$  siano costanti di cui l'ultima diversa da 0, e sia

$$P(t) = t^p + A_1 t^{p-1} + \dots + A_p$$

$$\frac{1}{P(t)} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$$

Si deduce dalla relazione ricorrente

$$\alpha_n + A_1 \alpha_{n+1} + \dots + A_p \alpha_{n+p} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

e dalle equazioni

$$\begin{aligned} \alpha_0 A_p = 1; \quad \alpha_0 A_{p-1} + \alpha_1 A_p = \alpha_0 A_{p-2} + \alpha_1 A_{p-1} + \alpha_2 A_p = \dots = \alpha_0 A_1 + \\ + \alpha_1 A_2 + \dots + \alpha_{p-1} A_p = 0 \end{aligned}$$

alle quali soddisfano  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  che, se

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi(x+n)|}$$

è minore del modulo della radice (o di una delle radici) di modulo minimo di  $P(t)$ , e pertanto se la serie

$$(1) \quad \alpha_0 \varphi(x) + \alpha_1 \varphi(x+1) + \dots$$

converge, essa definisce una soluzione  $F(x)$  dell'equazione lineare alle differenze

$$(A) \quad L(f(x)) = f(x+p) + A_1 f(x+p-1) + \dots + A_p f(x) = \varphi(x).$$

È infatti

$$L(F(x)) = \alpha_0 A_p \varphi(x) + (\alpha_0 A_{p-1} + \alpha_1 A_p) \varphi(x+1) + \dots = \varphi(x).$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.



Ove poi sia  $\varphi(x) = a^x \psi(x)$ , e si sostituisca a  $\psi(x+n)$  in (1) la sua espressione

$$\psi(x) + \binom{n}{1} \Delta \psi(x) + \dots + \binom{n}{n} \Delta^n \psi(x)$$

ordinandosi i termini della serie risultante secondo l'ordine della differenza di  $\psi(x)$  che figura in ciascuno di essi, s'ottiene

$$(2) \quad a^x \left[ \frac{1}{P(a)} \psi(x) + \frac{a}{1!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)'_a \Delta \psi(x) + \frac{a^2}{2!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)''_a \Delta^2 \psi(x) + \dots \right].$$

Se  $\psi(x)$  è un polinomio di grado  $m$  ed  $a$  non è radice di  $P(t)$ , la (2) ci dà la soluzione di (A) alla quale si giunge ove si determinino i coefficienti  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$  del polinomio  $\sum_{b=0}^m \beta_b \binom{x}{b}$  di grado  $m$ , per modo che

$$F(x) = a^x \sum_{b=0}^m \beta_b \binom{x}{b}$$

sia, nel caso supposto, soluzione delle (A)<sup>(1)</sup>.

Ma la (2) permette di ammettere che  $\psi(x)$  sia qualunque, sempre che sia  $P(a) \neq 0$ , e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)^{(n)}_a \Delta^n \psi(x) \right| < 1.$$

Converge infatti allora la serie

$$\Phi(x) = \frac{\psi(x)}{P(a)} + \frac{1}{1!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)'_a \Delta \psi(x) + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)''_a \Delta^2 \psi(x) + \dots$$

mentre, poichè

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(a+t)} &= \frac{1}{P(a) + \frac{1}{1!} P'(a)t + \dots + \frac{1}{p!} P^{(p)}(a)t^p} = \\ &= \frac{1}{P(a)} + \frac{1}{1!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)'_a t + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)''_a t^2 + \dots \end{aligned}$$

è uguale ad  $a^x$  il coefficiente di  $\psi(x)$  in  $L(a^x \Phi(x))$ , sono nulli i coefficienti di  $\Delta \psi(x), \Delta^2 \psi(x), \dots$  ed è pertanto

$$L(\Phi(x)) = a^x \psi(x).$$

(1) Cfr. ad es. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (1924), p. 399.

2. Se  $L(f(x))$  è uguale ad una funzione determinante  $\varphi(x)$  di generatrice  $\psi(t)$

$$(3) \quad \varphi(x) = \int_0^1 t^{x-1} \psi(t) dt$$

o, più generalmente, se

$$(4) \quad \varphi(x) = \int_l t^{x-1} \psi(t, x) dt$$

dove  $l$  è un cammino d'integrazione assegnato, il problema di integrare la (A) è stato ricondotto dal Nielsen <sup>(1)</sup> e dal Nörlund <sup>(2)</sup> ad un problema di inversione di integrale. Il risultato al quale giunge il Nörlund nel caso (4) è l'(1) o l'altro analogo ed analogamente dimostrabile

$$F(x) = \beta_p \varphi(x-p) + \beta_{p+1} \varphi(x-p-1) + \dots$$

dove  $\beta_0, \beta_1, \dots$  sono i coefficienti dello sviluppo di  $\frac{1}{P(t)}$  in serie di potenze decrescenti di  $t$ .

Nel caso particolare in cui sia  $a = 1$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ , la (2) non è se non la serie di fattoriali

$$\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \left( \frac{1}{P(t)} \right)_t^{(h)} \frac{1}{x(x+1) \dots (x+h)}$$

giacchè

$$\Delta^h \frac{1}{x} = \frac{(-1)^h h!}{x(x+1) \dots (x+h)}.$$

È

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(t)} &= \frac{1}{P(1-(1-t))} = \frac{1}{P(1)} - \frac{1}{1!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)_1' (1-t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)_1'' (1-t)^2 - \dots \end{aligned}$$

e, per un risultato ben noto della teoria delle funzioni determinanti, se  $P(t)$  non ha radici di modulo inferiore ad 1

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_0^1 t^{x-1} \frac{dt}{P(t)} &= \int_0^1 t^{x-1} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{h!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)_1^{(h)} (1-t)^h dt = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \left( \frac{1}{P(t)} \right)_1^{(h)} \frac{1}{x(x+1) \dots (x+h)}. \end{aligned}$$

(1) Cfr. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion* (1906), § 103.

(2) Cfr. NÖRLUND, *Sur les équations aux différences linéaires à coefficients constants*, in «Nyt Tidskrift for Mat.» (1912), pp. 53-65; *Differenzenrechnung*, 396-406.

L'integrale del primo membro converge se  $P(t)$  non ha radici appartenenti all'intervallo chiuso  $(0, 1)$  e se la parte reale di  $x$ ,  $R(x)$ , è maggiore di 0.

La legittimità della sostituzione della serie di potenze di  $1-t$  sotto il segno d'integrale e dell'integrazione termine a termine nel caso in cui  $P(t)$  non abbia radici di modulo minore di 1, può venire fondata sul fatto che la serie  $\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots$  sviluppo di una funzione razionale olomorfa nel circolo  $|t| = 1$  ed avente il raggio di convergenza 1 (se esso è maggiore di 1 la legittimità, che si considera, è manifesta) è di ordine finito sul circolo  $|t| = 1$ . Coll'Hadamard<sup>(1)</sup> si definisce come ordine su  $|t| = 1$  della serie  $\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots$ , di raggio di convergenza 1, il numero

$$r = 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha_n|}{\log n}.$$

Se  $r$  è un numero intero e positivo e  $|\alpha| = 1$ , è  $r$  l'ordine di  $(\alpha - t)^{-r}$  e se  $\varphi(t)$  è regolare in  $\alpha$ , di  $\varphi(t)(\alpha - t)^{-r}$  nel punto  $\alpha$ : poichè il più grande degli ordini nei punti di  $|t| = 1$  della serie  $\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots$  è l'ordine su  $|t| = 1$ , se ne deduce che l'ordine su  $|t| = 1$  della serie  $\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots$  è l'ordine del polo di modulo 1 e di ordine massimo della funzione razionale che essa rappresenta.

Se la serie  $\sum \alpha_n (1-t)^n$  è lo sviluppo di una funzione olomorfa in  $|1-t| = 1$  e d'ordine finito su questo circolo, la serie  $\sum t^{s-1} \alpha_n (1-t)^n$  converge uniformemente in  $0 \leq t \leq 1$ , se  $R(x)$  è abbastanza grande, e può venire integrata termine a termine.

Basta dunque supporre che  $\frac{1}{P(t)}$  sia olomorfa nel circolo  $|1-t| = 1$  perchè risulti dimostrata la rappresentabilità della funzione rappresentata in  $R(x) > 0$  dall'integrale di Laplace

$$\int_0^1 t^{s-1} \frac{dt}{P(t)}$$

a mezzo della serie di fattoriali (5), la quale parimenti converge in un semipiano  $R(x) > \lambda$  che l'ordine della serie sviluppo di  $\frac{1}{P(t)}$  permette di definire<sup>(2)</sup>.

(1) HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, « Journal de Math. », VIII (1892), p. 171.

(2) NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation* (1926), p. 188.

La (1) può scriversi, se sussiste la (3), e  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$  converge

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha_0 \varphi(x) + \alpha_1 \varphi(x+1) + \dots = \\ &= \int_0^1 t^{x-1} \psi(t) (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots) dt = \int_0^1 t^{x-1} \frac{\psi(t)}{P(t)} dt^{(1)}. \end{aligned}$$

Se  $\psi(t)$  è, come  $\frac{1}{P(t)}$ , olomorfa in  $|t-1|=1$  e d'ordine finito su questo circolo, e si ponga

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-t)^n$$

la serie di fattoriali

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n!}{x(x+1) \dots (x+n)} = \int_0^1 t^{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-t)^n dt$$

rappresenta  $\varphi(x)$  nel semipiano di convergenza, mentre, poichè l'ordine del prodotto di due serie è al più uguale alla somma degli ordini dei fattori

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1} \frac{\psi(t)}{P(t)} dt$$

è parimenti sviluppabile in serie di fattoriali. Se per brevità si pone  $(-1)^b \frac{1}{b!} \left( \frac{1}{P(t)} \right)_t^{(b)} = b_b$ , è anche

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t)}{P(t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-t)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1-t)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + c_n b_0) (1-t)^n \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + c_n b_0) n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \end{aligned}$$

3. Ove si definisca come somma alternata della funzione  $\varphi(x)$

$$S \varphi(x) \nabla x$$

$$\lim_{q=1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi(x+n) p^n$$

(1) U. BROGGI, *Una generalizzazione degli sviluppi in serie delle funzioni determinanti*, in « Rend. Lincei », vol. XV (1932), p. 615.

ove esista, e, postulata la convergenza della serie per  $0 < \rho < 1$ , si applichi la trasformazione di Eulero che a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  fa corrispondere, se  $\left| \frac{x}{1-x} \right| < 1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} a_s$ , s'ottiene per  $0 < \rho < 1$

$$\sum \varphi(x) \nabla x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} \Delta^n \varphi(x) \quad (1)$$

e cioè la (2) nel caso in cui sia  $a = 1$

$$\nabla f(x) = \frac{f(x+1) + f(x)}{2} = \varphi(x).$$

Se, più generalmente

$$\begin{aligned} \nabla^n f(x) &= \frac{\nabla^{n-1} f(x) + \nabla^{n-1} f(x)}{2} = \\ &= 2^{-n} \left[ f(x+n) + \binom{n}{1} f(x+n-1) + \dots + \binom{n}{n} f(x) \right] = \varphi(x) \end{aligned}$$

la (2) e la trasformazione di Eulero effettuata  $n$  volte portano all'identico risultato

$$F(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2} \binom{n}{1} \Delta \varphi(x) + \frac{1}{2^2} \binom{n+1}{2} \Delta^2 \varphi(x) - \dots$$

È dunque anche

$$\begin{aligned} E_p^{(n)}(x) &= x^p - \frac{1}{2} \binom{n}{1} \Delta x^p + \\ &+ \frac{1}{2^2} \binom{n+1}{2} \Delta^2 x^p + \dots + (-1)^p \frac{1}{2^p} \binom{n+p-1}{p} \Delta^p x^p \end{aligned}$$

il polinomio euleriano  $E_p^{(n)}$  d'ordine  $n$  e d'indice  $p$ , definito dall'equazione

$$\nabla^n f(x) = x^p.$$

(1) Cfr. NÖRLUND, *Differenzenrechnung*, § 130.



**Matematica.** — *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. F. GIORDANI.

Di una mia dimostrazione<sup>(2)</sup> della formola integrale che dà l'espressione di un funzionale dipendente linearmente da una funzione analitica, il professore Fantappiè pubblica una critica<sup>(3)</sup> in cui la dimostrazione stessa, a prescindere da un errore che è detta contenere, si dichiara fallita, perchè informata ad ipotesi diverse da quelle poste dal prof. Fantappiè.

Ecco in che cosa consiste l'errore che mi viene attribuito: Io considero le funzioni  $f(z)$ , olomorfe sur un insieme chiuso  $I$ , del piano  $z$ , che ammettono la rappresentazione:

$$(a) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

dove  $F$  è il contorno di un campo  $D$  cui  $I$  è interno, ed osservo che se il funzionale  $A$  dipende linearmente da  $f$ , dipende linearmente anche da  $\varphi$ , e quindi può scriversi  $\int \varphi(\xi) du(\xi)$ . Avendo supposto dipoi  $f(z)$  olomorfa anche nei punti di  $F$ , io *identificherei le funzioni  $f$  e  $\varphi$  su  $F$* . Ma questa identità non l'ho affermata, nè occorre alla dimostrazione. Posto che il valore di  $\int \varphi(\xi) du(\xi)$  è  $A[f]$ , ne segue che tale valore sarà lo stesso per tutte quelle funzioni  $\varphi(\xi)$  che attraverso la (a) definiscano una medesima  $f(z)$ ; una di tali funzioni  $\varphi(\xi)$  è certamente (quando  $f$  è olomorfa su  $F$ )  $f(\xi)$ , e pertanto, come scrivevo, « si potrà porre »  $\varphi(\xi) = f(\xi) = \text{ecc.}$  Quest'espressione *si potrà porre* di cui mi sono servito, bastava ad indicare che alludevo soltanto ad una scelta tra varie alternative; se avessi voluto affermare un'identità necessaria, avrei scritto « sarà » o « si ha », come appunto scrive il prof. Fantappiè, riferendo.

Per quanto riguarda ora la portata ed il valore della dimostrazione, ogni giudizio sulla convenienza o meno delle ipotesi sarebbe di necessità soggettivo, almeno in parte<sup>(4)</sup>. Mi limiterò quindi a far vedere come, anche stando alla lettera della trattazione del prof. Fantappiè, la mia dimostrazione

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) « Rend. Lincei », vol. XIII (1931).

(3) « Rend. Lincei », vol. XIV (1931).

(4) Osserverò solo che io postulo per i funzionali una *continuità* restrittiva, ma non faccio l'ipotesi dell' « analiticità ».

apporti una semplificazione e chiarificazione essenziali. Mi servirò per maggior chiarezza delle stesse notazioni del prof. Fantappiè.

Mi viene obiettato che la proprietà (4) è quasi equivalente alla formola da dimostrare. Ma questa proprietà è stabilita, a meno di una restrizione insignificante, come subito preciserò, nella stessa memoria F. A., *prima* della dimostrazione della formola integrale. Invero, nel § 25, Cap. II, è dimostrato assai semplicemente che da  $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots$  segue

$$F[y(t)] = \sum_1^{\infty} F[y_n(t)],$$

purchè, le  $y_n(t)$  appartenendo all'intorno ( $r$ ) di una funzione  $y_0(t)$ , ed  $F$  essendo regolare in un intorno più ampio ( $r'$ ), in  $A(r)$  si abbia convergenza uniforme, e di più

$$(b) \quad \sqrt[n]{|y_n(t)|} \leq h < 1.$$

Ma la condizione (b) è evidentemente superflua: infatti se, convergendo uniformemente la serie in un campo, *non* fosse

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F\left[\sum_1^m y_n(t)\right] = F\left[\sum_1^{\infty} y_n(t)\right]$$

si potrebbero trovare un certo  $\epsilon > 0$  ed una successione di indici  $n_1, n_2, \dots$  tali che, essendo  $s_n(t)$  la somma parziale  $n^{ma}$  della serie,

$$|F[s_{n_k}(t)] - F\left[\sum_1^{\infty} y_n(t)\right]| > \epsilon,$$

risultando inoltre nel campo considerato  $\max |s_{n_k}(t) - s_{n_k-1}(t)| < h^k$ , con  $h < 1$ ; ci si ricondurrebbe così alla condizione (b).

Se dunque  $F$  è definito nel campo  $H$  delle funzioni olomorfe su  $A$ , e la serie converge uniformemente in un dominio  $D$  contenente  $A$ , le condizioni circa gli intorni sono manifestamente soddisfatte, e la proprietà (4) è stabilita <sup>(1)</sup>.

Pertanto la proprietà (4) si lascia immediatamente dedurre dalle altre (a), (b), (1), (2) senza passare per la formola integrale; e la mia dimostrazione <sup>(2)</sup> può sostituire così completamente quella dei §§ 28-33, Cap. II, F. A.

Naturalmente, se non si vogliono ammettere come ipotesi legittime che le (a), (b), andranno ancora dedotte, oltre la (4) come ho mostrato, le (1), (2) come è indicato in F. A. Ma occorre appena che io dichiari a questo proposito che il mio lavoro aveva per unico scopo la dimostrazione della formola, e non pretendeva sostituirsi all'intera teoria dei « funzionali analitici ».

(1) Insomma il teorema del § 36, cui rinvia il prof. Fantappiè, non è che un corollario di quello del § 25.

(2) Ed altrettanto dicasi della sua semplificazione didattica indicata dal prof. Fantappiè.

**Matematica.** — *Sulla sommabilità delle serie doppie di Fourier, di funzioni discontinue.* Nota di A. MAMBRIANI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. TONELLI.

Sia  $f(x, y)$  una funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) nel quadrato  $Q$  definito da  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$ , e si consideri la corrispondente *serie doppia di Fourier* ed il relativo *polinomio trigonometrico di Fejér*,  $\sigma_{\mu, \nu}(x, y)$  <sup>(2)</sup>.

Il Tonelli ha dimostrato <sup>(3)</sup>, con molta semplicità ed in completo parallelismo al caso delle funzioni di una sola variabile, il teorema seguente:

« Se la  $f(x, y)$  — data in tutto il piano  $(x, y)$ , periodica e di periodo  $2\pi$  rispetto ad  $x$  e ad  $y$  — nel quadrato  $Q$  è integrabile e soddisfa alla condizione (L) <sup>(4)</sup>, il suo polinomio trigonometrico di Fejér,  $\sigma_{\mu, \nu}(x, y)$ , per  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow \infty$  converge verso  $f(x, y)$  in ogni punto  $(x, y)$  dove la  $f$  è continua, converge verso la media aritmetica dei quattro limiti  $f(x \pm 0, y \pm 0)$  in ogni punto  $(x, y)$  in cui tali limiti esistono finiti ».

Charles N. Moore aveva in precedenza asserito più in generale <sup>(5)</sup> che, in un punto  $(x_0, y_0)$  esistono finiti i quattro limiti  $f_1, f_2, f_3, f_4$  di  $f(x, y)$  ando il punto  $(x, y)$  tende ad  $(x_0, y_0)$  restando, rispettivamente, sempre in uno dei quattro angoli determinati da due rette secantisi *ortogonalmente* in  $(x_0, y_0)$ , si ha:

$$(1) \quad \lim_{\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow \infty} \sigma_{\mu, \nu}(x_0, y_0) = \frac{1}{4} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4).$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Bologna, N. Zanichelli, 1928, pp. VIII + 527. Ved., in particolare, p. 487.

(3) Loc. cit., pp. 490-492.

(4) La  $f(x, y)$  si dice *soddisfare, nel quadrato  $Q$ , alla condizione (L)* (L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, p. 488) se esiste un numero finito  $L$  tale che le due disuguaglianze

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)| dx \leq L, \quad \int_0^{2\pi} |f(x, y)| dy \leq L$$

valgano, rispettivamente, per quasi-tutti gli  $y$  e per quasi-tutti gli  $x$  dell'intervallo  $(0, 2\pi)$ .

(5) C. N. MOORE, *On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions*, « Math. Ann. », Bd. 74, 1913, pp. 555-572. Ved., in particolare, il teorema di p. 562.

Questa conclusione del Moore si trova anche riportata da H. Geiringer in una monografia sulle serie doppie trigonometriche<sup>(1)</sup>.

Nella presente Nota — come molto gentilmente mi ha proposto il Tonelli — mostro che la proposizione precedente del Moore è errata, tranne, ben inteso, l'unico caso, contenuto nel teorema precedente del Tonelli, in cui le due rette ortogonali per  $(x_0, y_0)$  sono parallele agli assi coordinati. Inoltre, detti  $f_1, f_3$  i valori limiti relativi a due angoli opposti al vertice, dimostro che, se le due rette per  $(x_0, y_0)$  sono ortogonali e non parallele agli assi coordinati, condizione necessaria e sufficiente affinché valga la (1) è che sia

$$(2) \quad f_1 + f_3 = f_2 + f_4.$$

Si può anche togliere la condizione dell'ortogonalità delle due rette, ed allora concludo che, se le due rette per  $(x_0, y_0)$  hanno coefficienti angolari finiti, non nulli e di segno contrario, oppure se una sola di queste due rette è parallela ad un asse coordinato, condizione necessaria e sufficiente affinché valga la (1) è che sia verificata la (2).

Infine, se i coefficienti angolari delle due rette sono entrambi finiti, non nulli e dello stesso segno, affinché valga la (1) è ancora sufficiente la (2). La questione, un po' delicata, di sapere se, in questo caso, la (2) è pure necessaria figurerà risolta in una prossima Nota.

1. Per negare la proposizione del Moore, basta considerare la funzione che, nel quadrato  $\Omega[-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi]$ , è così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{per } x^2 \geq y^2, \\ 1 & \text{per } x^2 < y^2. \end{cases}$$

Tale  $f(x, y)$  soddisfa in  $\Omega$  e nel punto  $(x_0, y_0) \equiv (0, 0)$  a tutte le ipotesi richieste dal Moore. La corrispondente serie doppia di Fourier — non convergente nel punto  $(0, 0)$ <sup>(2)</sup> — dovrebbe essere, col Moore, sommabile  $(C, 1)$  nel punto  $(0, 0)$  e con somma  $\frac{1}{4}(0 + 1 + 0 + 1) = \frac{1}{2}$ ; ma ciò non è. Invero, assumendo per il relativo polinomio trigonometrico di Fejér l'espressione<sup>(3)</sup>

$$(3) \quad \sigma_{\mu, \nu}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 \mu \nu} \iint_{\Omega} f(\alpha, \beta) \left( \frac{\sin \mu \frac{x - \alpha}{2}}{\sin \frac{x - \alpha}{2}} \right)^2 \left( \frac{\sin \nu \frac{y - \beta}{2}}{\sin \frac{y - \beta}{2}} \right)^2 d\alpha d\beta$$

(1) H. GEIRINGER, *Trigonometrische Doppelreihen*, « Monatshefte für Math. und Physik », XXIX. Jahrgang, 1918, pp. 65-144. Ved., in particolare, p. 132.

(2) L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, p. 485.

(3) Loc. cit., p. 487.

ed applicando il noto teorema d'integrazione per serie di Arzelà-Lebesgue, si ha

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sigma_{\mu, \nu}(0, 0) \right] = 1, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left[ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_{\mu, \nu}(0, 0) \right] = 0;$$

mentre, se vi fosse la detta sommabilità, tali limiti dovrebbero essere entrambi uguali ad  $\frac{1}{2}$  (1).

Nella dimostrazione della sua proposizione, il Moore asserisce che è possibile fare un ragionamento analogo a quello da lui seguito nella dimostrazione di un teorema precedente; il che non è giusto. Prescindendo dal fatto che, considerato per  $(x_0, y_0)$  due qualsiasi rette ortogonali, non è sempre possibile costruire un rettangolo avente il centro in  $(x_0, y_0)$ , i lati paralleli agli assi coordinati e le diagonali o le mediane su quelle due rette — come pare richiedersi —, dovrebbero esistere i limiti, per  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow \infty$ , di particolari espressioni del tipo di quelle considerate al n. 3, limiti che non esistono, come si vedrà.

2. Riprendiamo la funzione generica  $f(x, y)$  soddisfacente alle ipotesi del citato teorema del Tonelli. Consideriamo per un punto  $(x_0, y_0)$  due qualsiasi rette, ortogonali o no, purchè non entrambe parallele agli assi coordinati, e supponiamo che esistano i quattro limiti  $f_1, f_2, f_3, f_4$  di  $f(x, y)$  quando il punto  $(x, y)$  tende ad  $(x_0, y_0)$  restando, rispettivamente, sempre in uno dei quattro angoli determinati dalle dette rette,  $f_1$  ed  $f_3$  essendo — per fissare — i valori limiti relativi a due angoli opposti al vertice. Sia  $\Omega$  il quadrato avente il centro in  $(x_0, y_0)$  e i lati, di lunghezza  $2\pi$ , paralleli agli assi coordinati; sia poi  $\bar{f}(x, y)$  la funzione, periodica e di periodo  $2\pi$  rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , che in ciascuna regione comune ad uno degli angoli precedenti e ad  $\Omega$ , dove per  $f(x, y)$  si ha il valore limite  $f_r$ , assume costantemente il valore  $f_r$ .

Posto

$$f(x, y) = \bar{f}(x, y) + \varphi(x, y),$$

l'espressione (3) di  $\sigma_{\mu, \nu}(x, y)$  si scompone nella somma del polinomio trigonometrico di Fejér,  $\bar{\sigma}_{\mu, \nu}(x, y)$ , relativo ad  $\bar{f}$  e del polinomio analogo relativo a  $\varphi$ : inoltre, quest'ultimo polinomio nel punto  $(x_0, y_0)$  ha, in virtù del citato teorema del Tonelli, limite zero per  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow \infty$ . Ne segue che il limite, per  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow \infty$ , di  $\sigma_{\mu, \nu}(x_0, y_0)$  esisterà se e solo se esisterà quello di  $\bar{\sigma}_{\mu, \nu}(x_0, y_0)$ , ed in caso affermativo tali due limiti saranno uguali.

(1) Loc. cit., p. 474.



Si può scrivere <sup>(1)</sup>

$$(4) \quad \bar{\sigma}_{\mu, \nu}(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(x_0 + 2u, y_0 + 2v) \left( \frac{\sin \mu u}{\sin u} \right)^2 \left( \frac{\sin \nu v}{\sin v} \right)^2 du dv,$$

dove è

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_0 + 2u, y_0 + 2v) = & \bar{f}(x_0 + 2u, y_0 + 2v) + \bar{f}(x_0 - 2u, y_0 + 2v) + \\ & + \bar{f}(x_0 - 2u, y_0 - 2v) + \bar{f}(x_0 + 2u, y_0 - 2v). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che pel punto  $(x_0, y_0)$  si possono considerare due raggi, distinti o coincidenti, tali da dividere il quadrato d'integrazione dell'integrale, in (4), in parti (tre o due) dove la funzione  $\bar{F}(x_0 + 2u, y_0 + 2v)$  abbia, al variare di  $u$  e  $v$ , valori costanti dati da una delle somme

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \quad 2(f_1 + f_3), \quad 2(f_2 + f_4).$$

Lo studio di  $\sigma_{\mu, \nu}(x_0, y_0)$  — e quindi di  $\bar{\sigma}_{\mu, \nu}(x_0, y_0)$  — si riconduce dunque a quello di due o tre integrali della forma

$$(5) \quad \frac{1}{\pi^2 \mu \nu} \iint_T \left( \frac{\sin \mu u}{\sin u} \right)^2 \left( \frac{\sin \nu v}{\sin v} \right)^2 du dv,$$

dove  $T$  è una delle parti sopradette.

3. a) Indichiamo con  $I_{\mu, \nu}$  la (5), dove  $T$  sia il triangolo, del piano  $(u, v)$ , limitato dalle rette  $v = 0$ ,  $u = \frac{\pi}{2}$ ,  $v = \gamma u$  con  $\gamma > 0$ . Impostando il calcolo di  $I_{\mu, \nu}$  coll'integrare prima rispetto alla variabile  $v$ , si vede che, per  $\mu \rightarrow \infty$ , è  $I_{\mu, \nu} \rightarrow 0$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ), onde è

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \lim_{\mu \rightarrow \infty} I_{\mu, \nu} \right) = 0.$$

Invertendo, invece, l'ordine delle integrazioni e sfruttando la formula

$$\int \left( \frac{\sin \mu u}{\sin u} \right)^2 du = \mu u + \sum_{r=1}^{\mu} \frac{\mu - r}{r} \sin 2ru + \text{cost},$$

si trova che, per  $\nu \rightarrow \infty$ , è  $I_{\mu, \nu} \rightarrow \frac{1}{4}$  ( $\mu = 1, 2, 3, \dots$ ), onde è

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left( \lim_{\nu \rightarrow \infty} I_{\mu, \nu} \right) = \frac{1}{4}.$$

(1) Loc. cit., p. 487, formula (3).

La diversità dei due limiti trovati ci dice subito che *non esiste il limite*

$$\lim_{\substack{\mu \\ v} \rightarrow \infty} I_{\mu, v}.$$

b) Analogamente, se indichiamo con  $J_{\mu, v}$  la (5), dove  $T$  sia il triangolo limitato dalle rette  $u = 0$ ,  $v = \frac{\pi}{2}$ ,  $v = \gamma u$  con  $\gamma > 0$ , si trova

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \lim_{\mu \rightarrow \infty} J_{\mu, v} \right) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left( \lim_{v \rightarrow \infty} J_{\mu, v} \right) = 0,$$

da cui segue che *non esiste il limite*  $\lim_{\substack{\mu \\ v} \rightarrow \infty} J_{\mu, v}$ .

4. Mostriamo ora che, *affinchè valga la (1), la condizione (2) è sufficiente in ogni caso*. Invero — valendo (2) — per  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ , si ha, in ogni caso,

$$\bar{F}(x_0 + 2u, y_0 + 2v) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

e, sostituendo in (4),

$$\bar{\sigma}_{\mu, v}(x_0, y_0) = \frac{1}{4} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4),$$

ossia la (1), in virtù del n. 2.

5. Se, delle due rette per  $(x_0, y_0)$ , una sola è parallela ad un asse coordinato, oppure, se entrambe hanno coefficienti angolari finiti, non nulli e di segno contrario, *affinchè valga la (1) è necessaria la (2)*.

Per provare ciò, osserviamo che da (4) si ha:

$$(6) \quad \bar{\sigma}_{\mu, v}(x_0, y_0) = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^4 f_r = \\ = \frac{1}{\pi^2 \mu v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \bar{F}(x_0 + 2u, y_0 + 2v) - \sum_{r=1}^4 f_r \right] \left( \frac{\sin \mu u}{\sin u} \right)^2 \left( \frac{\sin v v}{\sin v} \right)^2 du dv;$$

indichiamo poi con  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  i coefficienti angolari delle due rette per  $(x_0, y_0)$ .

Se è  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2$  finito e non nullo, la (6) diventa

$$(7) \quad \bar{\sigma}_{\mu, v}(x_0, y_0) = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^4 f_r = \pm [(f_1 + f_3) - (f_2 + f_4)] \cdot K_{\mu, v},$$

dove, nel secondo membro, la scelta dei segni  $+$  o  $-$  dipende dalla conoscenza della coppia di angoli opposti al vertice ai quali corrispondono i valori limiti  $f_1$  e  $f_3$ , e la quantità  $K_{\mu, \nu}$  è una di quelle indicate al n. 3, *b*) con  $J_{\mu, \nu}$ , quando sia  $|\gamma_2| \geq 1$ , oppure è  $\frac{I}{4} - I_{\mu, \nu}$  (n. 3, *a*)), quando sia  $|\gamma_2| < 1$ . Per  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $K_{\mu, \nu}$  non ha quindi mai limite (n. 3); d'altra parte, valendo la (1), il primo membro di (7) ha (n. 2) limite zero; dovrà perciò essere necessariamente  $(f_1 + f_3) - (f_2 + f_4) = 0$ , ossia dovrà valere la (2).

Se  $\gamma_1 = \infty$ ,  $\gamma_2$  finito e non nullo, la (6) si trasforma ancora nella (7) colla differenza che  $K_{\mu, \nu}$  è un  $I_{\mu, \nu}$  quando sia  $|\gamma_2| \leq 1$ , è invece  $\frac{I}{4} - J_{\mu, \nu}$  quando sia  $|\gamma_2| > 1$ . La conclusione è la stessa precedente.

Siano ora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  finiti, non nulli e di segno contrario. Per maggiore chiarezza conviene distinguere vari casi:

*a*) Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono, in valore assoluto, uno  $< 1$  e l'altro  $> 1$ , la (6) si riduce ancora alla (7), dove  $K_{\mu, \nu}$  è da sostituire con una espressione della forma  $I_{\mu, \nu} - J_{\mu, \nu}$ . Questa espressione non avendo limite per  $\mu \rightarrow \infty$  (n. 3), si conclude con la validità di (2).

*b*) Se uno dei due numeri  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  è in valore assoluto uguale ad 1, vale ancora il ragionamento di *a*), con la relativa conclusione.

*c*) Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono in valore assoluto  $< 1$ , la (6) si trasforma nella (7), dove  $K_{\mu, \nu}$  va sostituito con una espressione della forma  $I_{\mu, \nu} + \frac{I}{4} - \bar{I}_{\mu, \nu}$  essendo un'espressione dello stesso tipo di  $I_{\mu, \nu}$ . Segue pure che  $K_{\mu, \nu}$  non ha limite (n. 3) e che perciò deve valere la (2).

*d*) Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono in valore assoluto  $> 1$ , si può ripetere il ragionamento fatto a *c*), ove  $I$  si sostituisca con  $J$ . Vale quindi ancora la (2).

La proposizione è così dimostrata.

**Matematica.** — *Sulla teoria unitaria dello spazio fisico.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Maggiorazione dell'errore d'approssimazione nel metodo d'integrazione Cauchy-Lipschitz dei sistemi di equazioni differenziali.* Nota di M. PICONE, presentata dal Corresp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sopra un teorema di Siacci per il moto lungo una curva gobba.* Nota di T. BOGGIO, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota stampata negli «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», del 1879 (vol. XIV)<sup>(2)</sup> e riprodotta nel vol. II (p. 327) degli *Scritti Scientifici*, di Francesco Siacci<sup>(3)</sup>, il Siacci ha assegnato la decomposizione dell'accelerazione di un punto mobile nel piano, in due componenti, l'una diretta secondo la tangente alla traiettoria, e l'altra secondo il raggio vettore uscente da un punto fisso, arbitrariamente scelto.

Il Siacci espone pure alcune utili applicazioni del risultato ottenuto.

In una Nota successiva<sup>(4)</sup> egli estende il suo risultato al caso in cui il punto percorre una linea gobba qualsiasi. I calcoli effettuati dal Siacci sono però alquanto artificiosi e complicati, mentre invece, col metodo vettoriale, la questione si tratta con formule assai semplici, che conducono, quasi automaticamente, al risultato voluto.

\*  
\* \* \*

Sia P un punto mobile, funzione del tempo  $t$ , che descrive una curva e diciamo  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  i soliti vettori unitari fondamentali, diretti secondo la tangente, normale principale e binormale della curva.

Preso poi un punto fisso arbitrario O dello spazio, indichiamo con:

M la sua proiezione ortogonale sul piano osculatore;

$q$  la distanza (con segno) di O da M;

$p$  la distanza (con segno) di M dalla tangente alla traiettoria in P;

$s$  l'arco di traiettoria, contato da un punto qualunque;

$\rho, \tau$  il raggio di curvatura e di torsione in P.

Con tali notazioni, le formule di Siacci relative all'accelerazione  $\mathbf{P}''$ , si compendiano nella seguente:

$$(1) \quad \mathbf{P}'' = -\frac{T^2}{p^3 \rho} (\mathbf{P} - \mathbf{M}) + \left( \frac{T}{p^2} \frac{dT}{ds} + \frac{T^2}{p^4} \frac{dq}{ds} \right) \frac{d\mathbf{P}}{ds},$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) F. SIACCI, *Del moto per una linea piana*. Questo articolo è pure riassunto nell'opera: WHITTAKER, *Analytische Dynamik der Punkte*, ecc., p. 22 (Springer; Berlin, a. 1924).

(3) Libreria del Provveditorato generale dello Stato (Roma, a. 1928).

(4) F. SIACCI, *Del moto per una linea gobba*. («Atti R. Accad. Scienze di Torino», vol. XIV, a. 1879), riprodotta a p. 335, vol. II, degli *Scritti Scientifici*.

od anche:

$$(1') \quad P'' = -\frac{T^2}{p^3 \rho} (P - M) + \left( \frac{T}{p^2} \frac{dT}{ds} - \frac{q}{p^3} \frac{T^2}{\tau} \right) \frac{dP}{ds},$$

ove:

$$(2) \quad T = pv,$$

essendo  $v = \text{mod } P'$  la grandezza della velocità del punto P.

Per stabilire queste formule osserviamo intanto che l'accelerazione sta notoriamente nel piano osculatore, e perciò può decomporre in due vettori, l'uno diretto secondo la tangente  $\mathbf{t}$  e l'altro secondo il vettore  $P - M$  (che pure sta nel piano osculatore); potremo porre pertanto:

$$(3) \quad P'' = h(P - M) + k\mathbf{t},$$

ove  $h, k$  sono funzioni numeriche da determinare; facendo il prodotto vettoriale della (3) per il vettore velocità  $P'$  e poi per  $(P - M)$ , si ha:

$$(4) \quad P'' \wedge P' = h(P - M) \wedge P',$$

$$(5) \quad (P - M) \wedge P'' = k(P - M) \wedge \mathbf{t},$$

le quali permettono di determinare  $h$  e  $k$ .

Osserviamo poi che dalla (2) risulta che si può porre:

$$(6) \quad (P - M) \wedge P' = T\mathbf{b},$$

e che inoltre l'accelerazione può esprimersi colla formula notissima:

$$P'' = v'\mathbf{t} + v^2/\rho \cdot \mathbf{n}, \quad (v' = dv/dt),$$

perciò sostituendo nella (4) si ottiene:

$$v^3/\rho \cdot \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} = hT\mathbf{b},$$

e poichè  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{t} = -\mathbf{b}$ , si deduce senz'altro:

$$(7) \quad h = -v^3/(\rho T),$$

e così  $h$  è conosciuta.

Per ottenere  $k$  osserviamo dapprima che, ricordando la (6), la (5) porge:

$$(5') \quad (P - M) \wedge P'' = kT/v \cdot \mathbf{b}.$$

Deriviamo poi, rispetto a  $t$ , la (6) e avremo (indicando sempre con apici le derivate rispetto a  $t$ ):

$$(8) \quad -M' \wedge P' + (P - M) \wedge P'' = T'\mathbf{b} + T\mathbf{b}',$$



e siccome il vettore  $M - O$  è parallelo alla binormale  $\mathbf{b}$ , si può scrivere:

$$M - O = q\mathbf{b},$$

perciò, derivando:  $M' = q'\mathbf{b} + q\mathbf{b}'$ ; sostituendo nella (8), ricordando che  $P' = v\mathbf{t}$ , e che per una formola di Frenet:

$$\mathbf{b}' = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\tau} \mathbf{n},$$

si ottiene:

$$-q'v\mathbf{b} \wedge \mathbf{t} - v^2q/\tau \cdot \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + (P - M) \wedge P'' = T'\mathbf{b} + vT/\tau \cdot \mathbf{n},$$

od anche, badando alla (5'):

$$-q'v\mathbf{n} + v^2q/\tau \cdot \mathbf{b} + kT/v \cdot \mathbf{b} = T'\mathbf{b} + vT/\tau \cdot \mathbf{n}.$$

Eguagliando nei due membri i coefficienti di  $\mathbf{b}$  e di  $\mathbf{n}$  risulta:

$$v^2q/\tau + kT/v = T', \quad -q' = T/\tau,$$

da cui:

$$(9) \quad k = \frac{vT'}{T} - \frac{v^3q}{\tau T},$$

od anche, facendo figurare  $q'$ :

$$(9') \quad k = \frac{vT'}{T} + \frac{v^3qq'}{T^2},$$

e così conosciamo anche  $k$ .

Introducendo le derivate rispetto all'arco  $s$ , e ricordando la (2) possiamo scrivere le (7), (9), (9') così:

$$h = -\frac{T^2}{p^3\rho}, \quad k = \frac{T}{p^2} \frac{dT}{ds} - \frac{qT^2}{p^3\tau} = \frac{T}{p^2} \frac{dT}{ds} + \frac{T^2}{p^4} \frac{dq}{ds};$$

sostituendo nella (3) si hanno le (1), (1').

*Osservazione.* — Se la traiettoria di  $P$  è una curva *piana*, il punto fisso  $O$  si può supporre addirittura sul piano della curva; allora il punto  $M$  coincide con  $O$  e si ha  $q = 0$ , perciò le (1), (1') divengono:

$$P'' = -\frac{T^2}{p^3\rho} (P - O) + \frac{T}{p^2} \frac{dT}{ds} \frac{dP}{ds},$$

che è la formola stabilita dal Siacci nella sua prima Nota citata.

**Meccanica.** — *Sulla relatività del microcosmo.* Nota di Z. PYCHA, pres. dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica** (Idromeccanica). — *Ostacolo ellittico girevole, investito da una corrente piana irrotazionale.* Nota di A. CONSIGLIO, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

Un moto piano, irrotazionale, traslocircolatorio di un liquido perfetto in presenza di un ostacolo mobile è definito da una funzione di variabile complessa, analogamente a quanto avviene per i moti piani permanenti.

Il prof. Caldonazzo<sup>(2)</sup> ha dato la condizione che deve essere soddisfatta da una tale funzione di variabile complessa sul contorno dell'ostacolo. Utilizzando tale condizione, studio nella presente Nota il caso in cui l'ostacolo mobile di profilo ellittico è girevole intorno al suo centro sia investito da una corrente irrotazionale traslocircolatoria stazionaria all'infinito.

Trovato l'integrale del moto liquido, in funzione del moto dell'ostacolo, valuto il momento delle azioni dinamiche subite dall'ostacolo, costatando che questo momento oltre che dipendere dalla corrente, dipende dal moto dell'ostacolo e precisamente dalla accelerazione angolare di esso.

Dopo ciò metto in evidenza la possibilità di valutare il momento delle ulteriori forze da applicare all'ostacolo perchè esso si muova di moto assegnato; e viceversa quella di determinare il moto dell'ostacolo quando sia assegnato il momento delle forze agenti su di esso oltre quelle destinate dal moto liquido.

In particolare, quando questo momento è nullo (rotazioni spontanee) si ha un moto pendolare. Precisamente, il doppio dell'angolo descritto dall'ostacolo soddisfa la stessa equazione di moto del pendolo, risultando posizioni di equilibrio quelle in cui l'asse maggiore dell'ellisse è normale oppure parallelo alla direzione asintotica della corrente. Nella prima posizione l'equilibrio è stabile, nella seconda instabile.

1. *Posizione del problema.* — Fissata l'origine degli assi  $x, y$  nel centro  $O$  dell'ostacolo, oriento l'asse delle  $x$  come la corrente investitrice. Sia  $V$  il valore della velocità asintotica di questa, ed  $\alpha$  l'angolo che il semiasse maggiore  $OA$  dell'ellisse forma con il semiasse delle  $x$  positive, e quindi  $\omega = \dot{\alpha}$  sia la velocità angolare.

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

(2) B. CALDONAZZO, *Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di ostacoli mobili*, questi « Rendiconti », vol. XI, fasc. 4, pp. 400-404 (1930).

La rappresentazione conforme che porta, nell'istante generico  $t$ , il piano  $z = x + iy$  forato dall'ellisse  $c$  in un piano  $\zeta$  forato dal circolo  $|\zeta| < 1$ , del quale denoterò con  $\gamma$  il contorno è:

$$(1) \quad z = \lambda \zeta + \frac{\mu e^{2i\alpha}}{\zeta},$$

con  $\lambda, \mu$  costanti reali positive tali che  $\lambda > \mu$ .

Dette  $a, b$  le misure dei semiassi dell'ellisse, per la (1) esse risultano date da

$$(2) \quad a = \lambda + \mu \quad ; \quad b = \lambda - \mu.$$

2. *Il potenziale complesso.* — Il moto rigido dell'ostacolo essendo una rotazione attorno ad  $O$ , il potenziale complesso  $f$  sarà una funzione  $f(z, t)$  che per la condizione di impenetrabilità deve avere il coefficiente  $\psi$  della parte imaginaria soddisfacente la condizione

$$\psi = -\frac{\omega}{2} (P - O)^2, \quad \text{su } c$$

a meno di una funzione arbitraria di  $t$ .

Ma poichè i punti  $z$  di  $c$  si ottengono da quelli di  $\gamma$  facendo  $\zeta = e^{i\sigma}$ , dalla (1) segue

$$(3) \quad (P - O)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos 2(\alpha - \sigma), \quad \text{su } c$$

e però la condizione di impenetrabilità si scrive

$$(4) \quad \psi = \frac{T\omega}{2} [\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos 2(\alpha - \sigma)], \quad \text{su } c.$$

Pertanto la  $f$ , a meno di una funzione della sola  $t$ , deve soddisfare, con riferimento alla variabile  $\zeta$ , la (4) e le condizioni di essere regolare in tutto il campo del moto e di diventare all'infinito infinita come  $\lambda V\zeta$ .

L'integrale cercato, come si constata immediatamente, è:

$$(5) \quad f = \lambda V \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{C}{2\pi i} \log \zeta - \frac{i\omega\lambda\mu e^{2i\alpha}}{\zeta^2},$$

dove, come è noto, i primi due termini rappresentano il potenziale di una corrente traslocircolatoria che investa l'ostacolo supposto fisso, cosicchè la relativa funzione di corrente è indipendente dal posto sul contorno; mentre l'ultimo termine dà il moto additivo dovuto alla rotazione dell'ostacolo.

In base alla (5) ed alla (1), la velocità sotto forma complessa riferita al piano  $\zeta$  è:

$$(6) \quad w = \left\{ \lambda V \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{2 i \omega \lambda \mu e^{i \alpha}}{\zeta^3} + \frac{C}{2 \pi i \zeta} \right\} \frac{\zeta^2}{\lambda \zeta^2 - \mu e^{2 i \alpha}}.$$

3. *Pressione*. — Per il teorema di Bernoulli, trattandosi di moto liquido non permanente, la pressione specifica è data da:

$$p = - \frac{\rho}{2} |w|^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{funz. di } t,$$

dove  $\varphi$ , parte reale di  $f$ , è il potenziale cinetico. Per la nostra questione interessa valutare  $p$  sul profilo dell'ostacolo dove  $\zeta = e^{i\alpha}$ . La (6) fornisce il primo termine di  $p$ . Per valutare il secondo termine, calcoliamo prima la derivata  $\frac{\partial f}{\partial t}$  in un punto generico. Si tenga presente a questo scopo che  $f$  dipende da  $t$  oltre che per mezzo di  $\alpha$  anche per il fatto che pure  $\zeta$  varia con  $t$ . Dalla (1), tenuto conto della indipendenza di  $\chi$  da  $t$  si ricava:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{2 i \omega \mu e^{2 i \alpha} \frac{1}{\zeta}}{\lambda - \mu e^{2 i \alpha} \frac{1}{\zeta^2}},$$

e ne segue pertanto:

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \left[ \lambda V \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{C}{2 \pi i \zeta} + \frac{2 i \omega \lambda \mu e^{2 i \alpha}}{\zeta^3} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{i \lambda \mu}{\zeta^2} (\dot{\omega} + 2 i \omega^2) e^{2 i \alpha},$$

la cui parte reale per  $\zeta = e^{i\alpha}$  fornisce la  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  sul profilo dell'ostacolo.

4. *Momento delle azioni dinamiche*. — Il momento risultante, rispetto al centro, delle pressioni agenti sul profilo, che è normale al piano del moto, è definito dall'unica componente sinistrorsa

$$(8) \quad M = - \frac{\rho}{2} \mathbf{k} \times \int (P - O) \wedge |w|^2 \mathbf{n} ds - \rho \mathbf{k} \times \int (P - O) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{n} ds.$$

dove  $P$  è il punto del profilo,  $\mathbf{n}$  la normale interna a questo,  $\mathbf{k}$  il versore normale sinistrorso agli assi  $x, y$ ; gli integrali essendo estesi al profilo stesso  $c^{(1)}$ .

(1) La risultante delle azioni dinamiche, che ci restringiamo ad indicare, ha le componenti

$$\begin{cases} R_x = 4 \pi \rho \omega \lambda \mu V \sin 2 \alpha, \\ R_y = - \rho V C - 4 \pi \rho \omega \lambda \mu V \cos 2 \alpha. \end{cases}$$

Per il primo integrale, poichè il profilo  $c$  non è linea di flusso, vale la formula del Cisotti <sup>(1)</sup>

$$-\frac{\rho}{2} \mathbf{k} \times \int (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge |\mathbf{w}|^2 \mathbf{n} ds = -\frac{\rho}{2} \mathcal{R} \int w^2 \zeta d\zeta - \rho \mathcal{R} i \int w v_n \zeta ds,$$

dove  $v_n$ , componente secondo  $\mathbf{n}$  della velocità del liquido su  $c$ , nel caso attuale per la condizione di impenetrabilità, coincide con la componente secondo  $\mathbf{n}$  della velocità del generico punto del profilo dell'ostacolo:

$$v_n = \frac{1}{2} \omega \frac{\partial (\mathbf{P} - \mathbf{O})^2}{\partial s},$$

il verso positivo degli assi essendo quello che lascia a sinistra l'ostacolo.

Per la (1), cioè con riferimento ai punti di  $\Upsilon$ , l'espressione di  $v_n$  diviene

$$v_n = 2 \omega \lambda \mu \sin 2(\alpha - \sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial s}.$$

Dopo ciò, per la (6), l'integrale in questione ad operazioni effettuate fornisce

$$(9) \quad 2 \pi \rho \lambda \mu V^2 \sin 2\alpha.$$

Per valutare il secondo integrale che compone  $M$ , trasformandolo in modo analogo al precedente, esso si può scrivere

$$-2 \rho \mathcal{R} \int_{\Upsilon} \frac{\partial f}{\partial t} \lambda \mu \sin 2(\alpha - \sigma) d\sigma.$$

Tenuto conto della (7), fattovi  $\zeta = e^{i\sigma}$  ed eseguita l'integrazione si trova il risultato seguente

$$(10) \quad -2 \pi \rho \lambda^2 \mu^2 \dot{\omega}.$$

Dalle (9) e (10) ed in virtù della (8), si ha infine per  $M$  la espressione

$$(11) \quad M = 2 \pi \rho \lambda \mu (V^2 \sin 2\alpha - \lambda \mu \dot{\omega})^{(2)}.$$

(1) U. CISOTTI, *Ancora su di una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. VII, fasc. 1, pp. 17-19 (1928).

(2) In particolare, se il disco è fisso ed esso si appiattisce in una lamina di lunghezza  $2l$  ( $a = l$ ,  $b = 0$  e quindi  $2\lambda = 2\mu = l$ ) si ha  $M = \frac{1}{2} \pi l^2 V^2 \sin 2\alpha$ , come aveva trovato direttamente il Cisotti per questo caso; vedi U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte prima, p. 125, Milano (Tamburini) 1921.



Il momento  $M$  quindi risulta indipendente dalla circolazione ed, a differenza di quanto avviene negli ordinari problemi, esso momento è funzione anche di  $\dot{\omega}$ .

5. *Equazione di moto del cilindro.* — Indichiamo con  $\mathcal{M}$  il momento delle forze che, oltre quelle idrodinamiche, eventualmente agiscono sul disco ellittico. L'equazione di moto, come è noto dalla meccanica, è

$$(12) \quad I\dot{\omega} = M + \mathcal{M}$$

essendo  $I$  il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione.

Se al disco è imposta una rotazione uniforme ( $\omega = \text{costante}$ ), dovrà essere  $\mathcal{M} = -M$  ossia per la (11) e le (2):

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{2}\pi\rho(a^2 - b^2)V^2 \sin 2\omega t,$$

avendo scelto  $\alpha = 0$  per  $t = 0$ .

La potenza richiesta per mantenere il moto uniforme è  $\mathcal{M}\omega$ ; però il lavoro compiuto dalle forze di momento  $\mathcal{M}$  per ogni mezzo giro del disco è nullo.

6. *Cilindro libero.* — Se il moto del cilindro è spontaneo, cioè se il momento  $\mathcal{M}$  delle forze che, oltre quelle idrodinamiche, agiscono su di esso, è nullo, l'equazione di moto (12) per la (11) diviene

$$2\ddot{\alpha} - \frac{4\pi\rho\lambda\mu V^2}{1 + 2\pi\rho\lambda^2\mu^2} \sin 2\alpha = 0.$$

Con le posizioni:

$$2\alpha - \pi = \theta \quad ; \quad \frac{1 + 2\pi\rho\lambda^2\mu^2}{4\pi\rho\lambda\mu} = L^2,$$

dove  $L$ , supposto non nullo, ha le dimensioni di una lunghezza, l'equazione stessa si scrive:

$$\ddot{\theta} + \frac{V^2}{L^2} \sin \theta = 0.$$

Questa è notoriamente l'equazione delle oscillazioni di un pendolo di lunghezza  $l = g \frac{L^2}{V^2}$ , con  $g$  accelerazione di gravità.

In particolare, alle piccole oscillazioni di questo pendolo, corrispondono per l'ostacolo, oscillazioni armoniche di periodo  $T = 2\pi \frac{L}{V}$  inversamente proporzionale alla velocità  $V$ .

Tali piccole oscillazioni mantengono l'asse maggiore dell'ellisse prossimo alla normale alla direzione della velocità asintotica. Questa osservazione permette di rilevare che quando l'asse maggiore dell'ellisse è normale alla corrente investitrice, si ha una posizione di equilibrio *stabile*. Corrispondentemente si ha  $M = 0$ . L'altra posizione per cui  $M$  ancora si annulla cioè quando è  $\alpha = 0$  (asse maggiore dell'ellisse parallelo alla direzione asintotica della corrente) è invece posizione di equilibrio *instabile*.

**Fisica** (Fisica terrestre). — *La riflessione delle onde sismiche agli antipodi causa di nuovi terremoti*. Nota di G. AGAMENNONE, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. MILLOSEVICH.

Allorchè il chiaro prof. E. Oddone ebbe a prestare servizio a Strasburgo nel *Bureau central de l'Association internationale de Sismologie*, con l'incarico di compilare un elenco dei terremoti sentiti in tutto il mondo nel 1904, dovette restare impressionato dallo straordinario periodo sismico che s'iniziò nella Balcania il 4 aprile di quell'anno con due catastrofiche scosse, cui seguirono numerosissime repliche. Queste attirarono in particolare modo la sua attenzione, e frutto del suo esame fu una sua Nota <sup>(2)</sup>, attraentissima per la novità dell'argomento, nella quale egli cercò di provare che le onde sismiche, generate da una violenta scossa, possono propagarsi lungo il diametro terrestre e, dopo aver subita una riflessione all'antipodo, ritornare sui loro passi e raggiungere il punto di partenza provocandovi un'altra scossa (1<sup>a</sup> replica) di minore intensità, per la dissipazione della loro energia durante il doppio tragitto. Ma la meraviglia cresce per il fatto che la 1<sup>a</sup> replica sarebbe capace di riflettersi, essa stessa, all'*antiepicentro* e ritornando al suo *epicentro* suscitavi un nuovo scuotimento (2<sup>a</sup> replica) d'intensità ancor minore. Il tempo impiegato per traversare diametralmente la Terra è, secondo lui, di 16-17 minuti e quindi di 33<sup>m</sup> per l'andata e il ritorno delle onde, e di 66<sup>m</sup> dopo due riflessioni. A maggior conferma di questi inattesi risultati, egli trova che il fenomeno si verifica non soltanto per le *prime onde preliminari* (le longitudinali nella teoria dell'elasticità dei corpi solidi) indicate con P, ma altresì per le *seconde onde preliminari* (le trasversali di detta teoria) che s'indicano con S; di modo che si ottengono altre repliche anche per le riflessioni di quest'ultime le quali, dotate d'una velocità circa metà, impiegano 32<sup>m</sup> per giungere all'antipodo e 64<sup>m</sup> per ritornare all'*epicentro*.

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) *Sur quelques constantes sismiques déduites du tremblement de terre du 4 avril 1904* (« Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences ». 18 mars et 2 avril 1907. Paris).

L'Oddone espose queste sue idee in modo più completo in altra memoria<sup>(1)</sup>, e prendendo questa volta in esame anche le *onde gravitazionali* L — le quali, a differenza delle P e S, si propagano alla superficie terrestre e con velocità ancor minore in confronto di quella delle S — trovò che dopo un intero giro del globo le medesime, tornando al loro punto di partenza, vi provocano un'altra replica alla distanza di  $2^h 23^m$  dalla scossa principale e un'altra ancora alla distanza di  $3^h 16^m$ , cioè, al passaggio di quelle massimali, dotate di velocità ancor minore. E per dare una maggiore impronta di veridicità alla sua tesi, egli ricordò altri 13 terremoti, di cui alcune repliche, attribuite alle P, sarebbero avvenute precisamente alla distanza di  $33^m-34^m$ , quale aveva trovata per le scosse dei Balcani, e indicò inoltre altri 15 terremoti in cui si ebbero repliche, provocate dalla riflessione delle sole S. A quanto io sappia, non vi sono stati altri che abbiano seguito l'Oddone su questa via, ad eccezione del prof. B. Messerschmitt<sup>(2)</sup> il quale è andato anche più in là, perchè dopo aver accennato alla scoperta del sismologo italiano, ha riportato anche lui parecchi terremoti, le cui repliche sarebbero state suscitate da riflessioni multiple all'antepicentro fino al numero di 10! Credo che farebbe opera meritoria chi volesse riprendere in esame anche il materiale che ha servito alle ricerche dello scienziato bavarese<sup>(3)</sup>. Per parte mia, ho desiderato per questa nuova indagine riesaminare il disastroso terremoto Ligure del 1887, come quello che oltre all'essere stato illustrato da numerosi scienziati italiani ed esteri, aveva formato nuovo oggetto di studio in una recente ampia monografia<sup>(4)</sup>, nella quale è fatta larga parte alla discussione delle repliche. Sebbene la mia ricerca sia stata ostacolata dal fatto di non aver potuto disporre di un elenco completo e preciso delle medesime, specialmente per le ore non sempre sicure, pure ho dovuto convincermi del risultato negativo del mio esame, a malgrado della coincidenza, e anche incerta, che si è potuta ottenere per qualche replica. Eppure il detto terremoto per la sua imponenza poteva paragonarsi a quello della Balcania in quanto che, pur con l'epicentro in mare e ad una certa distanza dalla costa, produsse sulle medesime, e per un gran tratto entro terra, danni non minori di quelli che si ebbero a riscontrare nella Serbia e Bulgaria. Anzi è da supporre che l'intensità del terremoto Ligure sia stata ben maggiore, pel fatto che il medesimo fu sentito entro un'area quasi tripla, e per conseguenza avreb-

(1) *Quelques constantes sismiques trouvées par les macrosismes* (« Publications du Bureau Central de l'Association internationale de Sismologie ». Strasburgo, 1907).

(2) *Über die Reflexion der Erdbebenwellen* (« Die Erdbebenwarte ». Monatsschrift herausgegeben von A. Belar. — VII. Jahrgang », p. 6. Laibach, 1908).

(3) Il MONTESUS DE BALLORE non manca di accennare all'ardita teoria dell'Oddone nella magistrale sua opera: *La Science sismologique*, ma fa le più ampie riserve sulla verosimiglianza della medesima, specialmente basandosi sopra alcuni terremoti le cui repliche erano assai bene identificate.

(4) G. AGAMENNONE e A. CAVASINO, *Il terremoto della Riviera d'occidente del 23 febbraio 1887* (« Mem. del R. Ufficio Centr. di Met. e Geofisica ». Ser. III, vol. III. Roma 1931).

bero dovuto meglio risaltare i fenomeni di riflessione all'antipodo. Ho voluto pure, sebbene di sfuggita, intraprendere una simile ricerca in una ventina di terremoti avvenuti in tempi a noi più vicini e segnatamente quello memorando della Marsica del 1915, le cui numerosissime repliche poterono, con le ore esatissime, essere registrate da strumenti <sup>(1)</sup>, e così pure il recente terremoto del luglio 1930 che ha funestato l'Irpinia; ma ho dovuto riconoscere la grande arbitrarietà in cui incorrerebbe chi volesse trovarvi una conferma dell'audace tesi del mio chiaro Collega.

In seguito a questi risultati incertissimi o negativi, mi sono allora deciso di riesaminare lo stesso terremoto Balcanico, e debbo dichiarare d'essere rimasto stupefatto per l'enorme numero di repliche che tennero dietro alle due scosse più importanti. Basti dire che stando ad un accurato elenco delle repliche, tra forti e lievi, sentite a Rilski Monastir (Bulgaria) — a non troppa distanza dall'epicentro e che restò assai danneggiata — se ne contarono ben 580 nelle prime 11 ore e mezza, ciò che dimostra che il suolo si mantenne in quasi continuo movimento. A Sofia, alquanto più lontana, le scosse segnalate ammontarono ad una trentina nelle prime 2 ore; e dopo, allorchè poté meglio funzionare un sismoscopio « Agamennone » — per il suolo divenuto meno agitato — si ebbero ben 72 indicazioni strumentali nelle successive 10 ore! Dato un sì notevole numero di repliche, come non potrebbe essere stato facile al mio Collega di trovare una conferma della loro corrispondenza con le calcolate riflessioni, semplici o multiple, di tante specie di onde, P, S, L e perfino delle loro fasi massimali, dotate ognuna di velocità diversa e perciò capaci di giustificare i più svariati intervalli <sup>(2)</sup>? Si aggiunga che l'identificazione delle corrispondenze viene agevolata grazie a una certa latitudine nei tempi necessari alle onde per propagarsi lungo il diametro terrestre, tempi che hanno variato da 30<sup>m</sup> a 36<sup>m</sup> per le P nei primi 13 terremoti citati dall'Oddone e oscillato da 55<sup>m</sup> a 69<sup>m</sup> per le S degli altri 15.

(1) Dopo le prime 24 ore dalla scossa principale erano state già registrate un centinaio di repliche dal sismografo di Roma e più che 300 da quelli dell'Osservatorio di Rocca di Papa.

(2) Il fenomeno delle repliche costituisce ancora un vero enigma, sia che la causa del terremoto voglia ricercarsi in azioni plutoniche (eruzioni abortite), sia in bruschi assestamenti di blocchi più o meno notevoli degli strati terrestri (movimenti tettonici), sia in varie altre cause possibili; e sarebbe davvero molto seducente la spiegazione che se ne potrebbe dare, coll'estendere oltremodo la tesi prospettata dall'Oddone e, cioè, col ritenere addirittura tutte le repliche quale effetto di riflessioni multiple non solo all'antipodo ma anche in numerosi altri punti della superficie terrestre. Ma per poco che si rifletta, questa spiegazione dev'essere senz'altro rigettata, in quanto che la ricorrenza delle repliche e il loro modo di presentarsi dovrebbe presso a poco essere uniforme per tutti i terremoti, ciò che è contraddetto completamente dai fatti. Oltracciò è mai possibile che l'energia delle onde sismiche possa decrescere tanto lentamente, in così lunghi tragitti, da poter permettere gran numero di riflessioni e relative scosse per molte ore di seguito? Bisogna dunque ricercarne altrove la causa, se non altro per rendersi conto della persistenza delle repliche anche per mesi interi e perfino per qualche anno.



Sembra poi che il mio Collega abbia scelto con poca cura alcuni fra i terremoti citati in appoggio della sua teoria. Così, tanto per dare un esempio, sono rimasto maravigliato nel trovare riportato tra i medesimi quello innocuo che ebbe luogo il 29 marzo 1904 a S. Vittorino (Roma) e che aveva formato oggetto di studio da parte mia <sup>(1)</sup>. Si tratta di 3 scosse delle quali la 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>, le più sensibili, non raggiunsero neppure il grado V, ed ebbero certamente un *ipocentro* pochissimo profondo, se furono appena percepite a distanza di 12-15 km. Ebbene l'Oddone ha senz'altro ritenuto che la 3<sup>a</sup> scossa sia stata provocata dalle onde S della 1<sup>a</sup> dopo il loro ritorno dall'antiepicertero. A parte l'inverosimiglianza che onde di sì lieve intensità abbiano potuto non solo propagarsi fino all'antipodo, ma ritornando sui propri passi conservare ancora tanta energia da suscitare un'altra scossa al loro punto di partenza, si sarebbe verificato il fatto stranissimo che esse, invece di affievolirsi, si siano rinforzate per istrada, stando alla maggiore intensità della 3<sup>a</sup> scossa per rispetto alla 1<sup>a</sup>, quale risultò anche dai sismografi di Rocca di Papa. Le stesse considerazioni valgano per il terremoto al Vesuvio del 1867, incluso ugualmente nella lista dell'Oddone, essendo ben noto che gli scuotimenti d'origine vulcanica sono sempre caratterizzati da una limitatissima estensione.

Ma la tesi del mio Collega urta contro un'altra difficoltà, ed è che le onde, una volta pervenute all'antipodo, vi dovrebbero pur provocare scosse più intense di quelle prodotte al loro ritorno all'epicertero. Questa difficoltà non è a lui sfuggita, ma in appoggio della sua teoria egli ha indicato tre soli terremoti ai quali è stato possibile contrapporne uno sentito in regioni prossime all'antiepicertero e in un'ora non sufficientemente discussa. Io penso che se il fatto fosse reale, dovrebbero abbondare le coincidenze in questione, in quanto che le scosse provocate agli antipodi dovrebbero essere abbastanza notevoli. Ma perchè tali esempi riuscissero probativi, occorrerebbe un esame rigoroso non solo delle ore ma anche delle intensità, per proporzionare l'effetto alla causa; e ciò si comprende di leggieri, dato il gran numero dei fenomeni sismici che hanno luogo *giornalmente* sul nostro pianeta, e data quindi la facilità di trovarne qualcuno per le regioni e ore considerate <sup>(2)</sup>. A tale proposito, c'è da domandarsi come mai l'Oddone sia andato alla ricerca dei soli casi favorevoli e non siasi punto preoccupato di quelli contrari alla sua tesi? Io sono convinto che spigolando tra gli innumerevoli terremoti seguiti da repliche, se ne potrebbero trovare chissà quanti

(1) *Sopra un focolare sismico nei dintorni di S. Vittorino di Roma ecc.* (« Boll. della Soc. Sism. Ital. », vol. X, 1904-1905, p. 147).

(2) La statistica, quando non è adoperata col dovuto discernimento, può condurre alle più strambe conclusioni. E di ciò se ne ha un esempio nei *profeti dei terremoti* i quali contando sulla grande frequenza dei fenomeni sismici, ne trovano sempre uno che giustifichi il loro presagio, e naturalmente si guardano bene dal comunicare i terremoti, magari più gravi, avvenuti in giorni diversi da quelli prognosticati.



altri, buoni a dimostrare qualsiasi altra ricorrenza, fondata sopra intervalli assai diversi da quelli da lui e dal Messerschmitt presi in considerazione.

In simili ricerche bisogna andare molto cauti per non lasciarsi trascinare dalla fantasia, nè cedere a suggestioni talora, è vero, seducenti, ma alle quali deve resistere lo scienziato serio fino a che non possa disporre di prove sufficienti sicure.

Da ultimo è bene rilevare che gli intervalli di  $33^m$  e  $66^m$ , ammessi rispettivamente per le P e S per il loro ritorno all'epicentro dopo una riflessione all'antipodo, non sono neppure sicuri, essendo venuti fuori da una estrapolazione; e inoltre il Turner per altra via ha calcolato recentemente in  $20^m 17^s$  il tempo necessario alle P per percorrere il diametro terrestre; tempo che diverrebbe di  $40^m 1/2$ , invece dei  $33^m$ , per il doppio percorso del medesimo, e ammonterebbe a  $81^m$ , invece di  $66^m$ , per la doppia riflessione. E se si pensa che questi nuovi valori si raddoppiano per le S, restano scombuscolate tutte le pretese coincidenze. E per mostrare ancor meglio la poca attendibilità dell'ardita teoria della riflessione agli antipodi, ricorderò che al Congresso Internazionale di Sismologia del 1911, discutendosi sulla possibilità di una dispersione sismica suggerita dal Wiechert — dovuta all'interposizione di un nucleo centrale della Terra composto di ferro e nichel e che farebbe da schermo — alla domanda del prof. Schuster se esistessero esempi che le onde sismiche avessero realmente attraversato il Globo lungo il suo diametro, *nessuno osò rispondere affermativamente*, neppure il prof. Oddone presente <sup>(1)</sup>.

(1) In una successiva Memoria (*Déchaînement des tremblements de terre* etc. in « Boll. della Soc. Sism. Ital. », vol. XII, 1907, p. 380) l'Oddone lamentò un certo scetticismo di alcuni sismologi circa la sua teoria, e in appoggio della medesima citò le indicazioni di un manometro di Batavia in relazione con le esplosioni del Krakatoa nel 1883, dalle quali, manipolate in un modo che non sono riuscito a comprendere, egli trasse un intervallo medio di  $67^m$ . Confrontandolo con quello vicinissimo di  $65^m$  in media, determinato per il periodo delle onde marine registrate in 12 mareografi, giunse a conclusioni ancor più stupefacenti. È il caso di dire: quando la fantasia si sbriglia, chi può prefinirle i confini?

**Fisica.** — *Sugli effetti secondari della radiazione corpuscolare penetrante*<sup>(1)</sup>. Nota di B. ROSSI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio A. GARBASSO.

1. Recenti esperienze dell'A.<sup>(3)</sup> hanno dimostrato che i corpuscoli della radiazione penetrante, nell'attraversare la materia, generano una radiazione secondaria, essa pure verosimilmente di natura corpuscolare. Questa radiazione secondaria è stata messa in evidenza mediante le coincidenze triple, che si producono fra gli impulsi di tre contatori a tubo di Geiger e Müller non allineati, quando al di sopra di essi venga posto uno schermo di piombo o di altro materiale, e che si interpretano come dovute al passaggio simultaneo del corpuscolo primario attraverso ad una coppia di contatori e del corpuscolo secondario attraverso il terzo, o viceversa (cfr. fig. 1).

Il metodo sperimentale adottato si presta non solo a rivelare il fenomeno, ma anche a studiarne le modalità. La presente Nota è dedicata ad un'esposizione dei risultati, che hanno potuto essere stabiliti dalle misure finora eseguite.

2. La fig. 1 rappresenta schematicamente il dispositivo sperimentale.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  sono tre contatori a tubo di Geiger e Müller;  $C_1$  ha una lunghezza utile di 15 cm. ed un diametro interno di 5 cm.; la parete è di zinco di 1 mm. di spessore;  $C_2$  e  $C_3$  hanno una lunghezza utile di 15 cm. ed un diametro interno di 2.5 cm.; la parete è di zinco di 0.7 mm. di spessore. I contatori sono disposti orizzontalmente; la distanza, fra gli assi, di  $C_2$  da  $C_3$  è di 3.5 cm.; quella di  $C_1$  da  $C_2$  e da  $C_3$ , di 5.3. Per ridurre il numero degli impulsi (e quindi il numero delle coincidenze casuali), i contatori sono protetti dal basso e dai lati contro la radioattività dell'ambiente per mezzo di una corazza di piombo. Al di sopra dei contatori e a varia distanza da essi può essere disposto lo schermo, nel quale prendono origine i raggi secondari, che danno luogo alle coincidenze triple (v. fig. 1). Questo schermo è formato di lastre di cm.  $40 \times 50$  e viene sostenuto nella posizione voluta per mezzo di una intelaiatura in legno. La radiazione penetrante, prima di giungere sui contatori, deve attraversare il tetto e il soffitto della stanza, di uno spessore complessivo equivalente a circa 12 cm.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica in Arcetri coll'appoggio finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(3) B. ROSSI, « Phys. Zeitschrift », 33, p. 304 (1932) e « La ricerca scientifica » 3, p. 249 (1932).

d'acqua. La distanza dei contatori dal soffitto è di 4.5 m., cosicchè è praticamente escluso che possano prodursi coincidenze triple per effetto dei raggi secondari generati dai corpuscoli della radiazione penetrante nel soffitto o nel tetto.

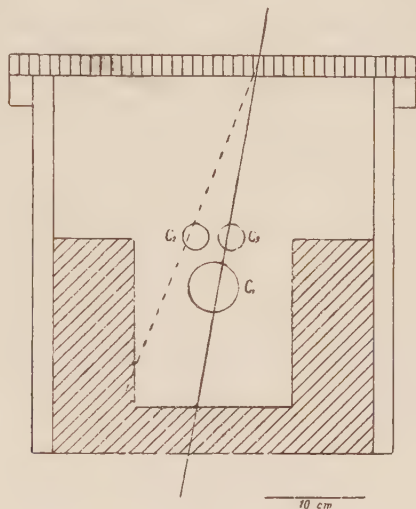


Fig. 1.

Le coincidenze vengono registrate col metodo precedentemente usato dall'A. in analoghe ricerche; il potere risolutivo dell'apparecchio registratore è di  $0.8 \cdot 10^{-3}$  sec.

3. Col dispositivo descritto sono state eseguite esperienze per determinare la penetrazione della radiazione secondaria e per studiare, nei riguardi di questa, il comportamento di materiali di diverso numero atomico.

A questo scopo, è stata misurata la frequenza delle coincidenze triple, che si producono quando al di sopra dei contatori vengano posti schermi di piombo o di ferro di spessore via via crescente. All'aumentare dello spessore, il numero delle «traiettorie biforcute», che emergono dallo schermo, e con esso il numero delle coincidenze triple, va dapprima aumentando; raggiunge un massimo per uno spessore corrispondente all'incirca alla penetrazione media della radiazione secondaria, poi decresce di nuovo per effetto dell'assorbimento della radiazione primaria.

I risultati ottenuti sono riassunti nelle tabelle I, II, III e IV.

Le tabelle I e II si riferiscono a misure eseguite collo schermo di piombo posto a 14.6 cm. dai due contatori superiori (la distanza essendo misurata fra la parete dei contatori e la base dello schermo); la tabella III si riferisce a misure eseguite collo schermo di piombo posto ad 1.2 cm. dai contatori superiori e la tabella IV a misure eseguite collo schermo di ferro in questa medesima posizione.

TABELLA I.

*Schermo di piombo a 14.6 cm.*

Spessore dello schermo in cm.	0	0.25	0.5	1	2	4
Durata dell'esperienza . . . .	65 <sup>h</sup> 6 <sup>m</sup>	64 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>	78 <sup>h</sup> 4 <sup>m</sup>	64 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>	67 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>	75 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup>
Coincidenze osservate . . . . .	224	460	692	862	951	672
Coincidenze per ora	$3.44 \pm 0.23$	$7.15 \pm 0.33$	$8.86 \pm 0.34$	$13.39 \pm 0.46$	$14.00 \pm 0.45$	$8.92 \pm 0.34$

TABELLA II.

*Schermo di piombo a 14.6 cm.*

Spessore dello schermo in cm.	2	3	4	9
Durata dell'esperienza . . .	85 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup>	69 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup>	70 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup>	73 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup>
Coincidenze osservate . . .	1101	752	643	467
Coincidenze per ora . . . .	$12.92 \pm 0.4$	$10.87 \pm 0.4$	$9.11 \pm 0.36$	$6.35 \pm 0.29$

TABELLA III.  
Schermo di piombo a 1.2 cm.

Spessore dello schermo in cm.	0	0.25	0.5	1	2	3	4	5
Durata dell'esperienza . . . . .	41 <sup>h</sup> 58 <sup>m</sup>	41 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup>	42 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	44 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup>	42 <sup>h</sup> 57 <sup>m</sup>	43 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup>	42 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup>	40 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>
Coincidenze osservate . . . . .	110	412	761	1136	1073	878	749	553
Coincidenze per ora . . . . .	2.62 ± 0.25	9.91 ± 0.49	17.83 ± 0.65	25.65 ± 0.76	24.97 ± 0.76	20.22 ± 0.7	17.56 ± 0.64	13.62 ± 0.58

TABELLA IV.  
Schermo di ferro a 1.2 cm.

Spessore dello schermo in cm.	0	0.25	0.5	1	2	3	4	5
Durata dell'esperienza . . . . .	43 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup>	43 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	47 <sup>h</sup> 13 <sup>m</sup>	44 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup>	44 <sup>h</sup> 36 <sup>m</sup>	42 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	45 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup>	42 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup>
Coincidenze osservate . . . . .	132	292	425	651	834	852	992	848
Coincidenze per ora . . . . .	3.02 ± 0.27	6.68 ± 0.39	9.00 ± 0.44	14.66 ± 0.58	18.69 ± 0.65	20.00 ± 0.69	21.74 ± 0.68	19.74 ± 0.68



La frequenza delle coincidenze in funzione dello spessore dello schermo è rappresentata graficamente nella fig. 2 dove in ascissa è riportato lo spessore dello schermo e in ordinata il numero di coincidenze per ora.

Vennero contate anche, nelle varie condizioni, le coincidenze doppie fra gli impulsi del contatore inferiore ( $C_1$ ) e quelli di ciascuno dei contatori superiori ( $C_2$  o  $C_3$ ). All'aumentare dello spessore dello schermo, la frequenza di queste coincidenze mostra dapprima un *aumento*, dovuto eviden-

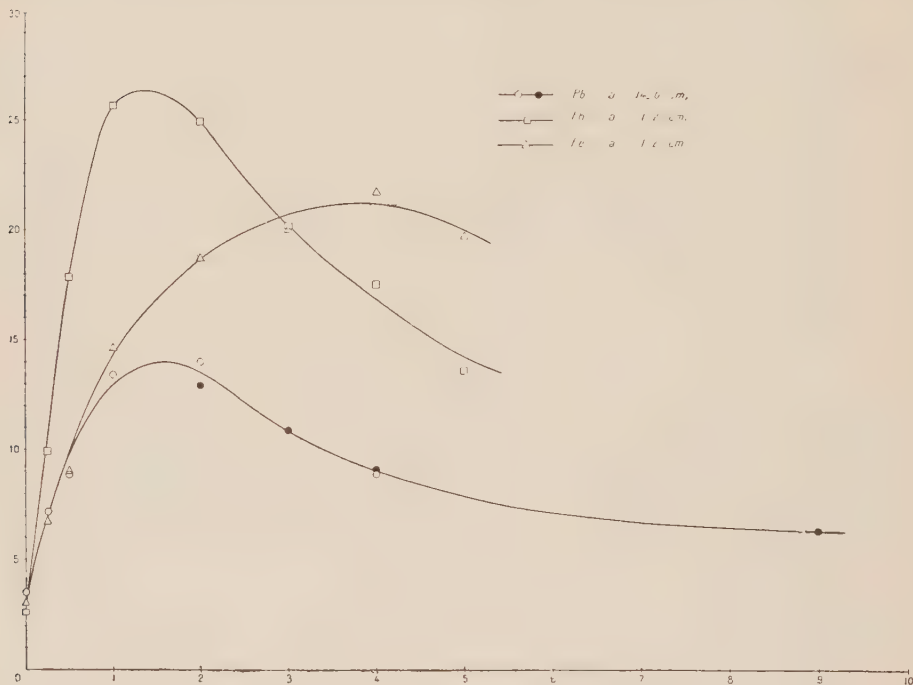


Fig. 2.

temente a quella medesima radiazione secondaria, che dà luogo alle coincidenze triple, e successivamente decresce; riportiamo, come esempio, i risultati ottenuti collo schermo di piombo a 14.6 cm. di distanza dai contatori.

Spessore dello schermo

in cm. . . . .	0	1	2	3	4	9
Coincidenze all'ora . .	$284 \pm 8$	$334 \pm 8.7$	$341 \pm 8.7$	$319 \pm 8.5$	$306 \pm 8.5$	$300 \pm 8.3$

4. Da un esame delle curve riportate nella fig. 2 si riconosce che l'andamento complessivo del fenomeno corrisponde, almeno qualitativamente, alle previsioni; vogliamo ora esaminarne più da vicino le particolarità.

Senza schermo si osservano in media circa 3 coincidenze all'ora. La frequenza di queste coincidenze è maggiore di quella delle coincidenze ca-

suali, che può valutarsi, in base al potere risolutivo, a circa 1 all'ora. La differenza è presumibilmente dovuta ai raggi secondari generati nelle pareti dei contatori stessi e nel piombo sottostante<sup>(1)</sup>.

Il fatto che la frequenza delle coincidenze triple sia minore collo schermo a 14.6 cm. che collo schermo ad 1.2 cm. dai contatori è facilmente spiegabile giacchè la probabilità che mentre uno dei rami della traiettoria biforcata attraversa una coppia di contatori, il secondo ramo attraversi il terzo contatore, è tanto più grande quanto maggiore è l'angolo solido sotto cui quest'ultimo è veduto dal punto, nel quale avviene la biforcazione. Vi è inoltre da notare che lo schermo, nella prima posizione, non intercetta tutti i raggi che giungono sui contatori.

Nelle curve ottenute cogli schermi di piombo, il massimo viene raggiunto dopo 1 cm. o poco più; per quel che s'è detto, questa lunghezza rappresenta la penetrazione approssimativa nel piombo dei raggi secondari, che danno luogo alle coincidenze triple osservate. Sorpassato il massimo, l'intensità decresce dapprima rapidamente, poi più lentamente. Questo andamento della curva è in relazione coll'assorbimento anomalo, che si osserva quando la radiazione penetrante passa dall'aria al piombo ed è dovuto al fatto che quella che abbiamo chiamato radiazione primaria si compone, in realtà, in parte di corpuscoli primari veri e propri, in parte di corpuscoli secondari generati dai primi nell'atmosfera o nel soffitto della stanza. Questi corpuscoli secondari vengono totalmente assorbiti in pochi centimetri di piombo, nè vi è compenso, se non parziale, coi nuovi corpuscoli secondari che vengono generati nel piombo stesso. I primi centimetri di piombo riducono perciò il numero dei raggi corpuscolari, che giungono sugli apparecchi, più fortemente di quello che corrisponde all'assorbimento della radiazione corpuscolare primaria. Sembra tuttavia che la frequenza delle coincidenze triple diminuisca anche più rapidamente che non l'intensità *totale* della radiazione corpuscolare (primaria più secondaria)<sup>(2)</sup>; ciò può interpretarsi ammettendo che la radiazione secondaria venga generata in maggior quantità da quella porzione più molle della radiazione incidente, che rimane appunto assorbita nei primi centimetri di piombo: il che vorrebbe dire che buona parte delle coincidenze triple osservate con 1 cm. di piombo è prodotta da una radiazione terziaria della radiazione corpuscolare penetrante.

La teoria prevede che l'energia di un corpuscolo secondario sia tanto minore quanto maggiore è l'angolo che la sua traiettoria forma con quella del corpuscolo primario. La radiazione secondaria dovrebbe quindi apparire più o meno molle, secondo che la posizione relativa dei contatori, l'uno rispetto all'altro e rispetto allo schermo, è tale, che le coincidenze siano

(1) Cfr. B. ROSSI, loc. cit.

(2) Cfr. B. ROSSI e B. CRINÒ, *Le anomalie di assorbimento della radiazione penetrante*, « Rend. Lincei », vol. XV, p. 741 (1932).

prodotte preferibilmente da corpuscoli secondari, la cui traiettoria forma un angolo più o meno grande con quella del corpuscolo primario.

Una simile dipendenza della durezza della radiazione secondaria dalle condizioni geometriche dell'esperienza non appare chiara da un confronto fra la curva ottenuta collo schermo di piombo a 14.6 cm. e quella ottenuta collo schermo di piombo a 1.2 cm. di distanza dai contatori superiori; ma l'esattezza delle misure non è ancora sufficiente nè, d'altronde, le condizioni geometriche dell'esperienza sono abbastanza ben definite per poter concludere qualche cosa di preciso al riguardo.

La curva ottenuta con lo schermo di ferro ad 1.2 cm. di distanza dai contatori presenta un andamento analogo a quello della curva ottenuta collo schermo di piombo nella medesima posizione. Soltanto il massimo viene raggiunto per uno spessore dello schermo notevolmente superiore ed è seguito da un decremento meno rapido. Sembra pure che l'altezza del massimo sia alquanto minore, per quanto non si possa attribuire soverchio significato ad un confronto fra i valori assoluti delle intensità misurate nelle due serie di esperienze, dato che queste vennero eseguite a distanza di tempo e non è escluso che possa essersi verificata tra l'una e l'altra qualche piccola variazione di sensibilità degli apparecchi; come pure non si può asserire che l'intensità media della radiazione penetrante sia stata esattamente la stessa durante le due serie di misure.

Quel che rimane stabilito comunque è che, a parità di spessore, nel ferro viene generato un numero di corpuscoli secondari circa due volte più piccolo che nel piombo (minore cioè di quello che corrisponderebbe al rapporto delle densità), ma che viceversa i corpuscoli secondari generati nel ferro hanno nel ferro una penetrazione circa tre volte più grande di quella che i corpuscoli secondari generati nel piombo hanno nel piombo. Il numero di raggi secondari in equilibrio colla radiazione corpuscolare penetrante dovrebbe quindi essere alquanto maggiore nel ferro che nel piombo.

È interessante notare che le proprietà della radiazione secondaria nel ferro e nel piombo, messe in evidenza da queste esperienze, coincidono con quelle che Bothe (nel recente Congresso di Fisica Nucleare di Roma) era stato condotto ad attribuirle per spiegare i fenomeni di transizione.

Se identifichiamo i corpuscoli, che danno luogo alle coincidenze triple, con elettroni veloci, siamo condotti, in base al potere di penetrazione, ad attribuir loro un'energia dell'ordine di grandezza di 50 o 100 milioni di volt-e<sup>(1)</sup>.

È degno di nota il fatto che il rapporto fra le penetrazioni dei corpuscoli secondari nel ferro e nel piombo risulta assai maggiore di quello prevedibile teoricamente nell'ipotesi che essi posseggano la medesima

(1) Cfr. W. HEISEMBERG, *Theoretische Ueberlegungen zur Höhenstrahlung*, « Ann. d. Phys. », in corso di stampa.

energia; sembra dunque che la radiazione secondaria generata nel ferro abbia un'energia maggiore di quella generata nel piombo. Questo fatto sarebbe di notevole interesse per l'interpretazione del fenomeno, che stiamo studiando; data però l'incertezza legata alla valutazione della penetrazione nella materia di corpuscoli, la cui energia sia dello stesso ordine di grandezza o superi addirittura quella dei legami nucleari, esso non potrà venir stabilito con sicurezza se non misurando *nel piombo* la penetrazione dei raggi generati *nel ferro*, o viceversa. Esperienze in questo senso sono appunto in preparazione.

**Fisica.** — *Le anomalie di assorbimento della radiazione penetrante* <sup>(1)</sup>. Nota di B. ROSSI e B. CRINÒ, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio A. GARBASSO.

1. Le anomalie di assorbimento, che si manifestano quando la radiazione penetrante passa da un mezzo ad un altro di diverso numero atomico (effetti di transizione) sono dovute, secondo l'ipotesi avanzata da Bothe nel recente Congresso di Fisica Nucleare di Roma, ad una radiazione corpuscolare secondaria, generata dalla radiazione corpuscolare penetrante nella materia, e la cui intensità relativa sarebbe maggiore nei mezzi di basso numero atomico che in quelli di numero atomico elevato <sup>(3)</sup>. Questa ipotesi è stata avvalorata da recenti esperienze di B. Rossi <sup>(4)</sup>, che hanno direttamente rivelato la produzione di questa radiazione secondaria nel piombo e nel ferro, mentre Heisenberg ha mostrato come se ne possa giustificare per via teorica l'esistenza <sup>(5)</sup>.

Che i fenomeni di transizione si manifestino in modo diverso (come era stato provato da B. Rossi <sup>(6)</sup>) secondo che si eseguiscano le misure con la camera di ionizzazione o con i contatori, si spiega, secondo Bothe, col fatto che un corpuscolo secondario non viene rivelato dal contatore quando lo

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica in Arcetri, coll'appoggio finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(3) Già precedenti ricerche di B. Rossi avevano dimostrato che gli effetti di transizione dovevano essere attribuiti ad una radiazione secondaria della radiazione corpuscolare penetrante, e non ad una variazione nel regime di equilibrio fra questa radiazione corpuscolare ed un'ipotetica radiazione ultra- $\gamma$  primaria, come fino allora si riteneva. (Cfr. « Rend. Lincei », XIII, p. 600 [1931]).

(4) B. Rossi, « Phys. Zeitschr. », 33, p. 304 (1932) e « Rend. Lincei », in corso di stampa.

(5) W. HEISENBERG, *Theoretische Ueberlegungen zur Höhenstrahlung*, « Ann. d. Phys. », in corso di stampa.

(6) « Rend. Lincei », XIII, p. 600 (1931).



attraversa insieme col corpuscolo primario, che l'ha generato. Nel caso poi in cui si adoperi il metodo delle coincidenze, la produzione della radiazione secondaria nella materia può dar luogo a coincidenze supplementari pel fatto che il corpuscolo primario attraversa uno dei contatori, e il corpuscolo secondario l'altro: e le recenti ricerche di B. Rossi provano che il numero di queste coincidenze supplementari può essere, in determinate condizioni, tutt'altro che trascurabile rispetto al numero delle coincidenze dovute al passaggio di un medesimo corpuscolo attraverso ambedue i contatori.

Oggetto del presente lavoro è appunto di studiare, mediante misure di assorbimento in piccoli spessori di piombo, l'influenza che la radiazione secondaria esercita sulle esperienze eseguite col metodo delle coincidenze e di esaminare come questa influenza dipenda dalla posizione degli schermi assorbenti rispetto ai contatori. Queste misure completano le misure di assorbimento della radiazione corpuscolare penetrante che B. Rossi ha recentemente estese fino ad un metro di piombo, e che si iniziano con uno spessore di 10 cm di piombo <sup>(1)</sup>.

2. Due contatori a tubo di Geiger e Müller di 2,5 cm. di diametro e 25 cm. di lunghezza utile, erano disposti orizzontalmente uno al di sopra dell'altro ad una distanza di 11,2 cm. fra gli assi; una corazza di piombo li proteggeva lateralmente e dal basso contro la radioattività dell'ambiente. Fra i contatori potevano venire interposti schermi di piombo di vario spessore; la distanza fra la base dello schermo e la parete del contatore inferiore era di 1 cm.; le coincidenze, che si producevano fra i loro impulsi nelle diverse condizioni, venivano registrate col metodo studiato da B. Rossi e già frequentemente adoperato in analoghe ricerche.

Le misure appartenenti ad una medesima serie vennero alternate a brevi intervalli di tempo per eliminare errori dipendenti da fluttuazioni d'intensità della radiazione penetrante o da eventuali variazioni di sensibilità degli apparecchi; l'errore medio nei valori relativi dell'intensità per ogni singola serie di misure si riduce quindi solamente a quello statistico (come del resto è stato direttamente verificato esaminando lo scostamento dalla media delle singole determinazioni). Non altrettanto sicuro è viceversa il valore *assoluto* dell'intensità, cosicchè nel confronto fra i risultati delle diverse esperienze (eseguite a distanza di tempo e talora non con i medesimi contatori) è prudente tener conto principalmente della variazione relativa nella frequenza delle coincidenze in funzione dello spessore o della posizione dello schermo e non attribuire soverchio significato al valore assoluto di questa frequenza.

(1) B. Rossi, « Naturwiss. », 20, p. 65 (1932), e « La Ricerca Scientifica », in corso di stampa.



3. Vennero eseguite anzitutto due misure di assorbimento: la prima con la corazza aperta superiormente, in modo che la radiazione penetrante giungeva sui contatori dopo aver attraversato solamente il tetto ed il soffitto della stanza, di uno spessore complessivo equivalente a circa 12 cm. di acqua; la seconda con uno schermo di piombo dello spessore di 8 cm., posto ad una distanza di 14 cm. dal contatore superiore (la distanza essendo misurata fra la parete del contatore e la base dello schermo). Le dimensioni di questo schermo (cm  $20 \times 150$ ) erano sufficienti perchè tutti i raggi, che potevano attraversare ambedue i contatori e dar luogo quindi a coincidenze, ne venissero intercettati.

I risultati delle misure sono riassunti nelle tabelle I e II, e rappresentati graficamente nelle figure 1 e 2 dove in ascissa è riportato lo spessore dello schermo, in ordinata il numero delle coincidenze per ora, e al disopra e al di sotto di ciascun punto sperimentale è rappresentato, con un tratto verticale, il corrispondente errore statistico.

TABELLA I.

Spessore dello schermo in cm.	0	1	2	4	6
Durata dell'esperienza .	22 <sup>h</sup> .1 <sup>m</sup>	22 <sup>h</sup> .1 <sup>m</sup>	22 <sup>h</sup> .1 <sup>m</sup>	22 <sup>h</sup> .1 <sup>m</sup>	22 <sup>h</sup> .1 <sup>m</sup>
Coincidenze osservate .	6023	5246	4976	4631	4510
Coincidenze casuali . .	204	178	174	165	162
Coincidenze sistematiche	5819	5068	4802	4466	4348
Coincidenze per ora . .	$264 \pm 3.5$	$230 \pm 3.3$	$218 \pm 3.2$	$203 \pm 3.1$	$197.5 \pm 3$

TABELLA II.

Spessore dello schermo in cm.	0	1	2	4	6
Durata dell'esperienza .	27 <sup>h</sup> .4 <sup>m</sup>	27 <sup>h</sup> .4 <sup>m</sup>	27 <sup>h</sup> .4 <sup>m</sup>	27 <sup>h</sup> .4 <sup>m</sup>	27 <sup>h</sup> .4 <sup>m</sup>
Coincidenze osservate .	5288	4869	4827	4819	4647
Coincidenze casuali . .	133	128	126	123	120
Coincidenze sistematiche	5155	4741	4701	4696	4527
Coincidenze per ora . .	$190.5 \pm 3$	$175 \pm 2.9$	$173.7 \pm 2.9$	$173.5 \pm 2.9$	$167 \pm 2.8$

Si riconosce chiaramente in ambedue le curve un rapido decremento nei primi centimetri di piombo, che è evidentemente dovuto all'assorbi-

mento della radiazione corpuscolare secondaria. Il fenomeno è assai più marcato nella curva della fig. 1 che nella curva della fig. 2, sia perchè nella prima esperienza la radiazione proviene da un mezzo di basso numero atomico ed è quindi ricca di raggi secondari, sia perchè questi raggi secondari sono

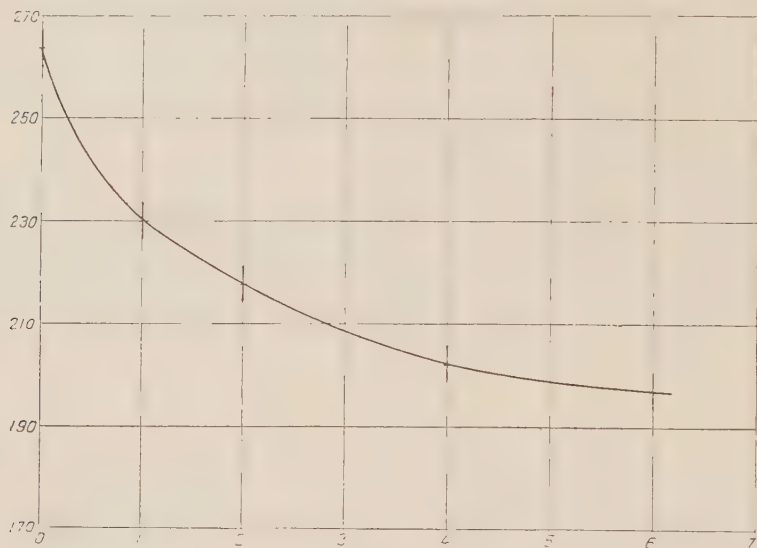


Fig. 1.

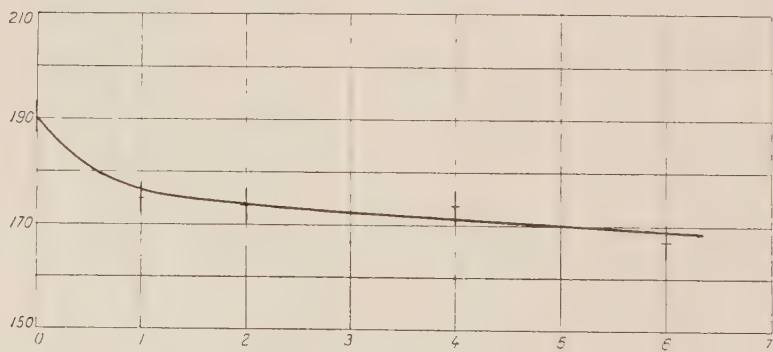


Fig. 2.

stati generati ad una grande distanza dai contatori e giungono quindi su di essi separati dai raggi primari che li hanno prodotti. Nelle misure eseguite colla radiazione filtrata attraverso il piombo invece, i raggi secondari sono in minor numero; di più, venendo generati ad una piccola distanza dai contatori, giungono in parte su di essi accompagnati dai corrispondenti raggi primari, cosicchè non vengono tutti singolarmente registrati.

Occorre poi tener presente che quando si interpone lo schermo fra i contatori, i raggi secondari, che si producono in esso, possono dar luogo a

coincidenze nel modo indicato dalla fig. 3; tali coincidenze compensano in parte la diminuzione prodotta dall'assorbimento, cosicchè questo, nei primi centimetri di piombo, deve essere in realtà maggiore di quanto appaia dalle curve.

Se confrontiamo la curva della fig. 1 con quella ottenuta da Steinke <sup>(1)</sup> e da Schindler <sup>(2)</sup> sotto analoghe condizioni, usando però la camera di ionizzazione, anzichè i contatori, per rivelare la radiazione penetrante, notiamo che la prima presenta un decremento assai meno rapido della seconda; questa differenza potrebbe forse essere dovuta ad una diversa sensibilità dei due dispositivi sperimentali rispetto alla radiazione secondaria generata nello schermo, dipendente da cause puramente geometriche; ma più probabilmente sta ad indicare che la radiazione secondaria (la quale viene assorbita nei primi centimetri) ha un potere di ionizzazione maggiore della radiazione primaria.

4. Per studiare l'influenza della posizione dello schermo sui risultati delle misure di assorbimento, è stato eseguito un confronto tra la frequenza delle coincidenze che si producono ponendo uno schermo di 2 cm. di piombo alternativamete in mezzo ai contatori e al di sopra di essi (a 5 cm. dalla parete del contatore superiore). La radiazione che giungeva sui contatori era preventivamente filtrata attraverso uno schermo di 8 cm. di piombo, come nelle misure della tabella II.

In 96 ore vennero contate con lo schermo al di sopra dei contatori 18546 coincidenze di cui 369 casuali, quindi 18177 sistematiche; in altrettante ore, con lo schermo in mezzo ai contatori, 16773 coincidenze di cui 412 casuali, quindi 16361 sistematiche. Le coincidenze sistematiche sono dunque del  $10 \pm 1\%$  più frequenti con lo schermo al di sopra dei

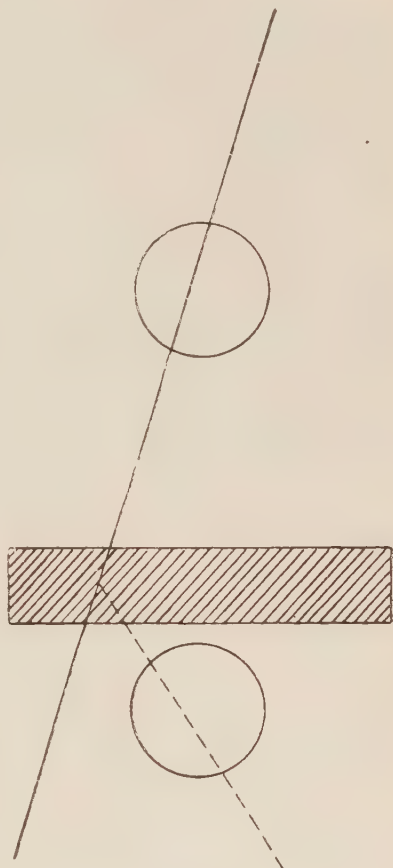


Fig. 3.

(1) E. STEINKE, « Phys. Z. S. », 31, p. 1019 (1930).

(2) H. SCHINDLER, « Z. S. f. Phys. », 72, p. 625 (1931).

contatori che con lo schermo in mezzo ad essi; tale differenza è evidentemente dovuta alla radiazione secondaria generata nello schermo, la quale deve appunto produrre, per la diversa posizione in cui ha origine, un numero di coincidenze maggiore nel primo caso che nel secondo.

Questo risultato è di notevole interesse anche sotto un altro punto di vista, giacchè in un'esperienza diretta a decidere la questione se la radiazione corpuscolare penetrante fosse di origine primaria o secondaria, uno di noi <sup>(1)</sup> aveva precedentemente trovato che il numero delle coincidenze fra gli impulsi di due contatori (5 cm. di diametro e 15 cm. di lunghezza, posti ad una distanza di 15.7 cm. fra gli assi) variava del 4 % portando uno schermo di piombo di 9.7 cm. ora al di sopra, ora in mezzo ad essi.

Poichè una differenza nello stesso senso e ancor più notevole si presenta, come s'è visto, con uno schermo di soli 2 cm. di piombo, quando le condizioni geometriche siano più opportune per mettere in evidenza gli effetti della radiazione secondaria generata nello schermo, si deve concludere che a questa radiazione secondaria, come del resto già si sospettava, e non alla produzione di nuovi raggi corpuscolari da parte dell'ipotetica radiazione ultra- $\gamma$ , si deve attribuire l'effetto trovato.

Viene così a cadere quello che poteva sembrare un argomento in favore dell'ipotesi che la radiazione penetrante primaria fosse di natura ondulatoria.

(1) B. Rossi, « Z. S. f. Phys. », 68, p. 64 (1931).

**Chimica.** — *I composti dell'urea con i bromuri alcalino-terrosi*<sup>(1)</sup>.  
Nota di F. DE CARLI<sup>(2)</sup>, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

In una Nota precedente<sup>(3)</sup> ho riferito sopra alcune ricerche tendenti a definire le condizioni di formazione e la stabilità dei composti dell'urea con il cloruro di calcio. Mentre dalle isoterme di solubilità si rileva la formazione di  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  a  $11^\circ$ , e del sale anidro corrispondente a  $25^\circ$ , con l'esame di alcune proprietà fisiche (densità, viscosità, indice di rifrazione) non si ricavano indizi sufficienti per confermare l'esistenza in soluzione di tali prodotti.

Nei manuali farmaceutici si trovano descritti numerosi altri derivati nei quali l'urea, l'uretano, ed altre sostanze organiche, sono associate a sali minerali usati in terapia. A questa categoria appartengono ad esempio l'urea-bromina ed il calmonal. Al primo si attribuisce la composizione  $\text{CaBr}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ , al secondo  $\text{CaBr}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)\text{OC}_2\text{H}_5 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ .

In analogia a quanto ho fatto per le soluzioni di urea e cloruro di calcio, ho voluto eseguire le stesse indagini nelle soluzioni con bromuri alcalino terrosi.

Secondo le indicazioni contenute nel brevetto che tratta della preparazione dell'ureabromina<sup>(4)</sup>, detta sostanza dovrebbe formarsi solo mediante prolungato riscaldamento di soluzioni acquose o alcooliche di bromuro di calcio ed urea; e la separazione dei cristalli sarebbe favorita dall'aggiunta di etere ai liquidi che hanno subito tale trattamento.

Ho voluto pertanto determinare le isoterme di solubilità a  $11^\circ$  dei sistemi:  $\text{CaBr}_2 - \text{CO}(\text{NH}_2)_2 - \text{H}_2\text{O}$  e  $\text{SrBr}_2 - \text{CO}(\text{NH}_2)_2 - \text{H}_2\text{O}$  per stabilire se dalle soluzioni sature si separano sali doppi come accade nel caso del cloruro di calcio.

Nelle tabelle I e II sono riportati i risultati delle prove eseguite. I valori sono stati ottenuti dosando il bromo volumetricamente con il metodo di Volhard, e l'urea gasvolumetricamente.

Come si vede, l'aggiunta di urea alla soluzione satura di bromuro di calcio provoca una leggera diminuzione di solubilità di questo, mentre l'aggiunta di bromuro alla soluzione satura di urea, ne aumenta la solubilità. L'isoterma si divide in tre rami, lungo il primo si separa  $\text{CaBr}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , lungo il secondo  $\text{CaBr}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  e lungo il terzo  $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ .

Le soluzioni con bromuro di stronzio si comportano in maniera del tutto analoga e da esse si ottiene il composto:  $\text{SrBr}_2 \cdot 4\text{CO}(\text{NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ .

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(3) « Rend. Acc. Lincei », fasc. n. 7, p. 584.

(4) D. R. P. 226.224; « Jahrb. Chem. Techn. », 57, p. 95 (1911).



TABELLA I.

$\text{CaBr}_2\text{—CO(NH}_2)_2\text{—H}_2\text{O}$ , Isoterma a 11°.

Composizione della soluzione				Composizione del residuo			
$\text{CaBr}_2$ %	$\text{CO(NH}_2)_2$ %	$\text{H}_2\text{O}$ %	$\text{CaBr}_2$ %	$\text{CO(NH}_2)_2$ %	$\text{H}_2\text{O}$ %	Composizione fase solida	
56.80	—	43.20	—	—	—	$\text{CaBr}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	
56.18	3.50	40.32	62.51	0.6	36.89	»	
55.58	7.25	37.17	59.29	3.81	36.90	»	
55.05	8.20	36.75	67.50	16.50	16.00	$\text{CaBr}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O} + \text{CaBr}_2 \cdot 4 \text{CO(NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	
52.64	9.40	37.96	50.76	14.79	34.45	$\text{CaBr}_2 \cdot 4 \text{CO(NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	
47.70	13.74	38.56	45.70	28.62	25.68	»	
31.60	31.02	37.38	46.10	38.85	15.05	»	
26.11	41.77	32.12	31.18	44.71	24.11	»	
22.20	49.30	28.50	24.15	64.30	11.55	$\text{CaBr}_2 \cdot 4 \text{CO(NH}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{CO(NH}_2)_2$	
17.70	47.94	34.36	8.37	76.10	15.53	$\text{CO(NH}_2)_2$	
11.44	47.76	40.80	8.15	60.13	31.72	»	
—	40.84	59.16	—	—	—	»	

TABELLA II.

SrBr<sub>2</sub>—CO(NH<sub>2</sub>)<sub>2</sub>—H<sub>2</sub>O, Isoterma a 11°.

Composizione della soluzione			Composizione del residuo		
SrBr <sub>2</sub> %	CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> %	H <sub>2</sub> O %	SrBr <sub>2</sub> %	CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> %	H <sub>2</sub> O %
47.10	—	52.90	—	—	—
47.20	3.71	49.09	54.37	1.75	43.88
46.50	15.20	38.30	65.50	3.45	31.05
46.18	19.50	34.32	61.55	21.39	17.11
42.52	22.56	34.92	45.60	41.50	13.90
35.23	29.90	34.87	46.16	42.29	11.55
28.20	36.50	35.30	41.50	43.82	14.68
25.78	40.12	34.10	28.88	56.91	14.21
21.50	40.45	38.05	16.05	71.50	18.45
14.27	40.90	44.83	9.49	61.78	28.73
—	40.84	59.16	—	—	—
			SrBr <sub>2</sub> ·6H <sub>2</sub> O		
			»		
			»		
			SrBr <sub>2</sub> ·6H <sub>2</sub> O + SrBr <sub>2</sub> ·4 CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> ·2 H <sub>2</sub> O		
			SrBr <sub>2</sub> ·4 CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> ·2 H <sub>2</sub> O		
			»		
			»		
			CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>		
			»		
			»		
			»		

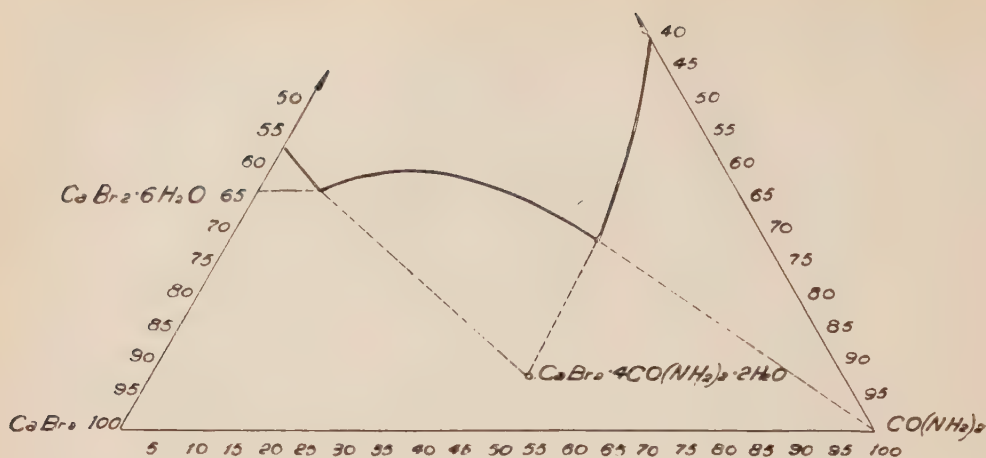


Fig. 1.

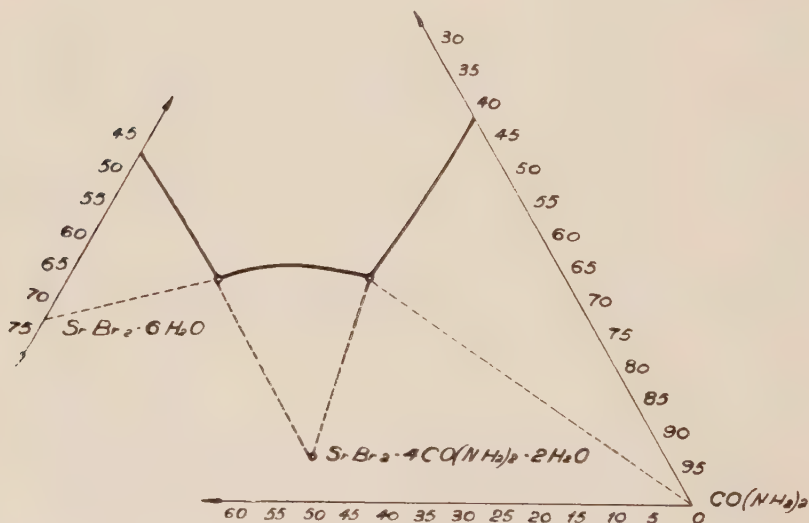


Fig. 2.

Resta stabilito pertanto che i composti dell'urea con i bromuri di calcio e di stronzio prendono origine in condizioni del tutto analoghe a quelle descritte per i derivati con il cloruro.

\*  
\* \*

Ho voluto anche verificare se nelle soluzioni acquose di urea con detti bromuri si manifestassero associazioni rivelabili con misure di viscosità e di densità.

I risultati delle misure sono riportati nelle tabelle III e IV e nella figura 3.

TABELLA III.

CaBr <sub>2</sub> %	CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> %	H <sub>2</sub> O %	$\frac{\text{CO(NH}_2)_2}{\text{CaBr}_2}$	$\frac{I}{d_{11}^\circ}$	$\frac{100}{d} \cdot \frac{P_1}{d_1 + \frac{P_2}{d_2} + \frac{P_3}{d_3}}$	$\varphi_{11}^\circ$
34.44	—	65.56	—	66.23	0.8720	30.63
31.47	2.07	66.46	0.2189	69.20	0.8924	35.70
28.27	4.35	67.38	0.5123	72.49	0.9156	40.85
23.81	7.32	68.87	1.1910	76.33	0.9361	46.62
20.43	9.43	70.14	1.5362	78.58	0.9425	49.80
11.92	15.81	72.27	4.4140	87.06	1.1297	58.17
5.88	19.09	75.03	10.8092	90.81	1.1605	65.15

TABELLA IV.

SrBr <sub>2</sub> %	CO(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> %	H <sub>2</sub> O %	$\frac{\text{CO(NH}_2)_2}{\text{SrBr}_2}$	$\frac{I}{d_{11}^\circ}$	$\frac{100}{d} \cdot \frac{P_1}{d_1 + \frac{P_2}{d_2} + \frac{P_3}{d_3}}$	$\varphi_{11}^\circ$
47.33	—	52.67	—	63.74	0.9974	31.50
36.99	3.82	59.25	0.4254	66.45	0.9372	39.35
27.17	7.97	64.86	1.1939	73.23	0.9474	48.66
15.35	14.92	69.63	4.0061	82.88	0.9812	60.79
5.00	20.00	77.00	16.4845	93.34	0.9910	71.34
—	40.18	59.82	—	95.17	1.0582	70.72

Tanto il bromuro di calcio come quello di stronzio si sciolgono nell'acqua con leggera contrazione. Nelle soluzioni miste con bromuro di calcio la contrazione diminuisce con il crescere della concentrazione in urea, mentre in quelle con bromuro di stronzio si ha, per aggiunte piccole di urea un leggero aumento, e per aggiunte maggiori diminuzione.

Dalla fluidità non si ricava invece nessun indizio di fenomeni associativi.

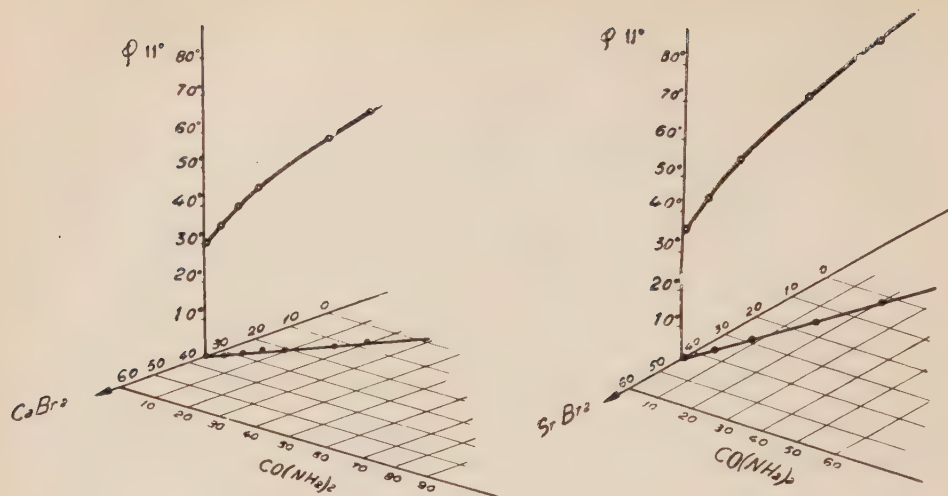


Fig. 3.

Si conclude pertanto che anche nelle soluzioni di urea con i bromuri di calcio e di stronzio, come in quelle con cloruro di calcio, non si notano fenomeni di tale entità da lasciare supporre l'esistenza in soluzione dei complessi che si separano dalle soluzioni sature. Non è improbabile pertanto che in questi prodotti l'urea sostituisca totalmente, o in parte, l'acqua di cristallizzazione dei bromuri alcalino-terrosi.

In ogni caso il comportamento delle soluzioni esaminate lascia supporre che l'azione terapeutica di questi preparati contenenti urea non possa essere attribuita a proprietà specifiche dei complessi sopra ricordati.

#### RIASSUNTO:

Dalle isoterme di solubilità a 11° dei sistemi:



si rileva la formazione dei complessi:

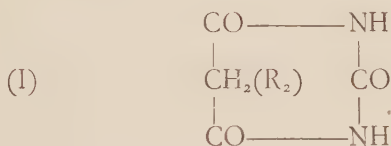


La loro esistenza in soluzione non viene però messa in evidenza da misure di densità e fluidità.



**Chimica.** — *Sulla struttura dei derivati C-sostituiti dell'acido barbiturico.* Nota di D. MAROTTA e G. ROSANOVA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

All'acido barbiturico ed ai suoi derivati C-sostituiti è stata finora assegnata la struttura che si deduce dalla condensazione dell'acido malonico, e rispettivamente dei suoi derivati, con la carbo-diammide <sup>(2)</sup>:



Tuttavia, alcune osservazioni relative ai derivati metallici di detti composti ed al comportamento di essi nella fusione con potassa caustica, fanno sorgere qualche dubbio sulla struttura indicata, suggerendo un'altra possibilità.

E. Fischer e A. Dilthey <sup>(3)</sup>, i quali già nel 1904 indicavano nuovi metodi di preparazione dei derivati barbiturici, studiarono allora anche il contegno della dietil-malonilurea (veronal) di fronte alle basi. A questo proposito essi riferiscono che il composto si scioglie negli alcali ed in ammoniaca, come pure in acqua di calce e in acqua di barite, e descrivono la preparazione di un sale sodico, il quale, comunque preparato, è in ogni caso il sale monosodico, facilmente decomponibile dall'anidride carbonica. L'acido dietil-barbiturico è quindi da considerarsi, secondo gli AA., come un acido debole, e solo in soluzione potrebbe, se mai, esistere un sale bisodico; ma da una soluzione che contenga anche più di due equivalenti di idrato sodico, si separa egualmente il sale monosodico.

Molle e Kleinst <sup>(4)</sup>, per lenta fusione dell'acido dietil-barbiturico con idrato potassico, ottennero etere dietil-acetico, anidride carbonica ed ammoniaca; ma Jorrisen <sup>(5)</sup>, riprendendo in esame la medesima reazione con riguardo ad alcune precedenti ricerche di Molle e Limaire <sup>(6)</sup>, ha ulteriormente

(1) Nella seduta del 17 aprile 1932.

(2) Ch. MULDEN, « Ber. », 12, 4641 (1879); CONRAD e GUTHZEIT, « Ber. », 14, 1643 (1881); 15, 844 (1882).

(3) « Ann. », 335, 338 (1904).

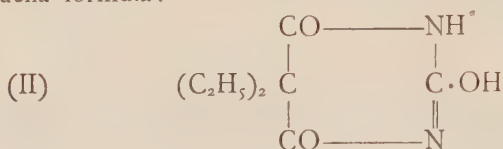
(4) « Chem. Zentr. », II, 1005 (1904).

(5) « J. Pharm. et Chimie », 478 (1910).

(6) « Ar. d. Pharm. », 104, 108 (1907).

trovato che, nelle condizioni d'esperienza da lui descritte, accanto all'acido dietil-acetico, all'anidride carbonica, ed all'ammoniaca, si forma altresì acido cianidrico.

Il contegno dell'acido dietil-barbiturico di fronte alle basi, come nella fusione con potassa caustica, porta dunque a supporre per i due atomi di azoto una condizione di legami differente dall'uno all'altro, per esempio nel senso della formula:



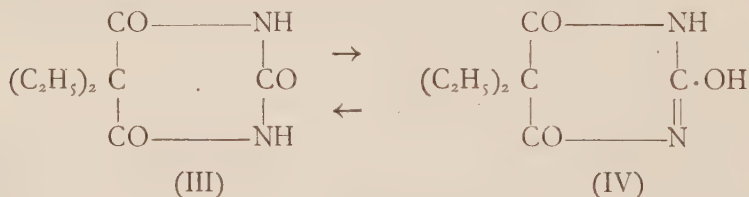
la quale, peraltro, si può tanto riferire a una condensazione del derivato malonico con l'iso-urea:



quanto anche interpretarsi come forma desmotropa (enolica) della (I).

In tale forma enolica l'acido dietil-barbiturico non può evidentemente fornire altri sali che con un solo equivalente di metallo, e questi stessi assai facilmente idrolizzabili in qualità di sali di un acido molto debole, mentre la differente condizione di legame dei due atomi di azoto rende bene conto del fatto che nella fusione con potassa caustica, l'azoto viene staccato nè interamente in forma di ammoniaca, nè interamente in forma di acido cianidrico.

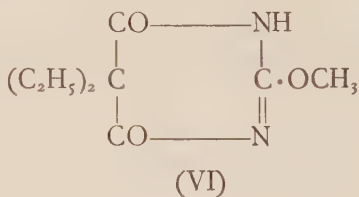
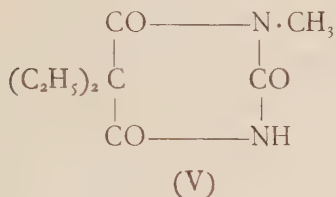
Poichè questo particolare contegno dell'acido dietil-barbiturico, che noi abbiamo potuto ulteriormente confermare estendendo le nostre osservazioni anche a un sale di bario, suggerisce per l'acido stesso la natura di sostanza tautomerica con equilibrio spostato, nelle differenti condizioni, ora a favore della forma immidica, ora a favore di quella enolica:



abbiamo voluto esaminare il comportamento del veronale di fronte al diazo-metano e al diazo-etano, ossia, rispetto a quei reattivi che, a preferenza di ogni altro, si prestano egregiamente a caratterizzare stati di equilibrio simili a quello supposto.

Difatti, abbiamo potuto dimostrare nel modo più netto la coesistenza delle due forme tautomere, la quale si appalesa con la formazione di entrambi gli eteri previsti.

Degli eteri da noi ottenuti con l'impiego del diazometano uno (V) è solido, ben cristallizzato, con p. f. a 148°, e rappresenta il derivato N-metilico, identificandosi col prodotto già ottenuto da Fischer e Dilthey<sup>(1)</sup> per condensazione dell'etere C-dietil-malonico con la monometil-urea; l'altro (VI) si presenta invece come liquido sciropposo, e, in base alla determinazione dell'ossi-metile, costituisce indubbiamente l'etere isomero O-metilico:



Serie analoghe di eteri all'azoto e di eteri all'ossigeno abbiamo poi ottenuto facendo reagire i diazo-idrocarburi grassi sopra altri derivati C-sostituiti dell'acido barbiturico.

Su tali ricerche, e su altre analoghe in corso nel gruppo dell'allossana e dalla xantina, ci riserviamo di riferire più ampiamente nella « Gazzetta Chimica Italiana ».

**Paleontologia.** — *Su di una nuova specie di "Schizaster".* Nota di G. SERRA, pres. dal Socio A. MARTELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Ann. », 335 (1904).

**Biologia.** — *Studi cirripedologici.* — VII. *Eurialinità e anabiosi* in « *Chthamalus stellatus* » <sup>(1)</sup> Ranzani. Nota di B. MONTEROSSO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio A. Russo.

In una Memoria, pubblicata nel 1927 <sup>(3)</sup>, davo un breve cenno sul fatto, sperimentalmente constatato, che *C. stellatus*, immerso in acqua di fonte, continua a vivere per parecchi giorni, sebbene la sua attività motoria si riduca sensibilmente.

In una Nota seguente <sup>(4)</sup> comunicavo che trenta individui di *C. stellatus* (Poli) var. *depressa* Darwin <sup>(5)</sup> erano stati lasciati in acqua di fonte, fluente o spesso mutata, per quattro mesi. Durante questo periodo, tutti gli esemplari mantenevano di solito la fessura opercolare strettamente chiusa. Talvolta allontanavano, l'una dall'altra, le valve calcareo-chitinose, continuando a lasciare serrati i lembi opercolari membranosi <sup>(6)</sup>, tra i quali molto di rado si notava un esilissimo foro.

Nel 1929 apparvero tre lavori di E. Kreps, dei quali uno in collaborazione con la Borsuk <sup>(7)</sup>, in cui veniva studiato il ricambio gassoso respiratorio di due specie del gen. *Balanus*, in relazione a concentrazione differente dell'acqua oceanica. L'A. afferma che esiste una determinata « soglia di concentrazione » al disotto della quale diventa impossibile la normale esistenza dei Balani. Tale concentrazione è molto costante, ed è, per le due specie (*B. balanoides* e *B. crenatus*) rispettivamente di 5 ‰ e 6-7 ‰. L'A. aggiunge: « Bei einer weiteren Verminderung des Salzgehaltes des Aussenmilieus, die Balani... in einen besonderen Zustande übergehen, der durch vollständige Unbeweglichkeit charakterisiert wird. In einem solchen Zustande von Scheintod oder "Salzschlaf" können die Balani lange Zeit (nicht weniger als 3 Wochen) in vollkommen süßem Wasser verweilen... ». Dalle opere citate, sulle condizioni biologiche degli individui, costretti a vivere in acqua marina diluita oltre il punto di concentrazione critica, altro non sappiamo se non che essi interrompono il caratteristico movimento ritmico dei cirri, e riducono l'attività respiratoria, cadendo in tale stato di immobilità,

(1) Lavoro fatto nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università di Cagliari.

(2) Nella seduta del 17 aprile 1932.

(3) « Atti Accad. Gioenia », serie V, vol. XV, 1926, 1927. Vedere pp. 6 e 19.

(4) In questi « Rendiconti », vol. XI, 1930, p. 504.

(5) POLI descrisse questa forma per il primo nel 1791, denominandola *Lepas depressa*; nel 1854 DARWIN la considerò come varietà di *Chthamalus stellatus* Ranzani.

(6) Per il significato di queste espressioni, vedere la mia Nota in questi « Rendiconti », vol. VIII, 1928, p. 92.

(7) « Pflüger's Archiv », vol. 222, pp. 215-241; 371-380.

da richiamare alla memoria dell'osservatore la condizione di « morte apparente », quella di « sonno invernale », di « anabiosi » e simili.

Negli studii, che ho avviato ormai da tempo sulla biologia di un gruppo di Opercolati (*Chthamalus*), ho avuto già parecchie volte l'occasione di mantenere sperimentalmente tali forme in acqua a diminuita concentrazione salina e financo distillata, allo scopo precipuo di indagare certe manifestazioni, relative al fenomeno di anabiosi. Nel lavoro in esteso, ancora inedito, l'eurialinità di *C. stellatus* sarà presa in opportuna considerazione. Ritengo utile però dar qui, preliminarmente, notizia di qualcuna delle osservazioni, fatte già al riguardo.

Nel corso delle mie ricerche, ho anzitutto cercato di vedere se le manifestazioni di attività, nel normale, siano limitate al movimento dei cirri. Ho notato che questo è anzi preceduto dalla divaricazione delle valve calcaree e dei lembi membranosi; al contrario, le une e gli altri possono persistere in ritmiche aperture e chiusure, o anche rimanere beanti, per lungo tempo, mentre gli arti se ne stanno del tutto immobili. Non credo dunque che la mancanza di attività visibile dei cirri, sia sufficiente per dichiarare in perfetto stato di quiete questi organismi.

Ora appunto, vediamo come si comporti *C. s. depressus* passando dall'ambiente marino normale direttamente in acqua dolce.

Il contatto del nuovo fluido gli fa serrare l'opercolo ed il diaframma membranoso, condizione che può durare più o meno a lungo, talvolta per giorni interi. Ma d'un tratto apre le valve calcaree moderatamente, e, pur continuando a mantenere chiuso il diaframma membranoso, esegue, di tanto in tanto, movimenti di tutto l'apparato opercolare, che per caratterizzarli, brevemente, diremo di « rullio » e di « beccheggio ». Non molto di rado, specie durante la notte, il Cirripede apre anche il foro della membrana diaframmatica e lo lascia in tale stato per un tempo più o meno grande: da qualche minuto a qualche ora, salvo in seguito a serrarlo nuovamente e a riprendere i peculiari movimenti, di cui sopra, ovvero, richiudendo la fessura tra le valve calcaree, a cadere in lunga e perfetta immobilità. Capita, osservando attentamente, sotto le lenti del binoculare, un lotto di *C. s. depressus*, in acqua dolce da qualche tempo, di scorgere un individuo nel quale la fessura tra le valve sia ben aperta: se la posizione dell'esemplare è favorevole, non è difficile vedere il diaframma membranoso per un buon tratto della sua larghezza. Allora, a forte illuminazione, se questo è chiuso, si scorge che la sua faccia esterna è percorsa, con ritmo non sempre regolare, da particolari ondeggiamenti, dovuti alla pressione del liquido circolante nelle lacune, dentro lo spessore dell'organo. Se invece fra i due lembi opercolari è beante l'ostio opercolare<sup>(1)</sup> allora i margini di quelli si vedono avvicinarsi ed allontanarsi alternatamente, anche a notevoli intervalli. Dunque l'attività

(1) Cfr. questi « Rendiconti », vol. VIII (1928).



motoria del Cirripede è ridotta, sì, ma sussiste ancora - e con essa la corrente circolatoria dei succhi. A riguardo dell'attività respiratoria, anche il Krepis ha potuto dimostrare che l'assunzione dell'O<sub>2</sub> in acqua dolce continua, pur notevolmente diminuita, nei suoi Balani <sup>(1)</sup>. Il ricambio gassoso in ambiente e vita normali, negli Opercolati, come risulta da mie ricerche precedenti, è agevolato mediante una doppia corrente del liquido esterno, che penetra ed esce alternatamente dalla cavità palaleale attraverso l'apertura dell'opercolo e grazie ad un complesso meccanismo, cui partecipa il mantello, l'esoscheletro (opercolo) e il corpo propriamente detto. Ora, i movimenti di cui parliamo, non sembrano del tutto annullati, durante la permanenza in acqua dolce, quantunque siano ben lontani dall'avere l'efficienza normale. I cirri, però, è vero, non si agitano, nè vengono fuori dall'apertura opercolare, nemmeno dondolando il recipiente in cui si trova il blocco <sup>(2)</sup>. E non solo persistono le attività motorie spontanee, ma non restano nemmeno annullate, come fu già da me detto <sup>(3)</sup>, quelle che possono provocarsi con agenti esterni e particolarmente con mezzi meccanici.

Dunque tale stato, almeno in *C. s. depressus* non può considerarsi come vita latente o anabiosi e nemmeno come uno stato ipnico.

Ben più interessanti appariscono i fenomeni osservabili, qualora la specie in parola venga immersa nell'acqua dolce dopo un periodo di permanenza all'asciutto, non tanto esteso però da farla cadere in quella condizione, che ho indicato come anabiosi e ho accennato in una serie di lavori preliminari <sup>(4)</sup>. Poco dopo essere stati immersi in acqua di fonte, tali individui, che hanno la cavità palaleale praticamente priva di liquido, aprono lievemente e rapidamente la fessura opercolare e l'ostio del diaframma, e lanciano - come in acqua marina - un certo numero di bollicine gassose. Quando, più tardi, riaprono l'opercolo, è possibile però vedere, al binoculare, che la cavità palaleale è ancora occupata in gran parte da gas, sotto forma di bolla. Pare che l'animale faccia di tutto per evitare l'uscita di quest'aria, che esso ha portato dall'atmosfera; la detta bolla difatti, mediante la sua tensione superficiale, viene a costituire come un diaframma, perchè la sua parete, restando a contatto con la superficie interna dell'opercolo, ottura la fessura tra i lembi membranosi, impedendo così l'accesso del liquido esterno. Talvolta pare che la bolla voglia venir fuori, di seguito a movimenti più accentuati del corpo del Cirripede, ma, appena comincia a sporgere dalla fessura opercolare, viene subito ritirata. Nell'immersione in acqua marina ciò non succede, perchè l'organismo, appena introdotto in questa, si affretta a liberarsi completa-

(1) Op. cit. (1929).

(2) Cfr. op. cit. (1927).

(3) Vedere la mia Memoria, già citata in «Atti Accad. Gioenia».

(4) Oltre ai già citati, vedere questi «Rendiconti», vol. VII, 1928; vol. IX, 1929; «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», vol. III, 1928. Vedere anche: G. FLORIS, *Resistenza dei Ctaminali in gas inerte ecc.* in «Rend. Seminario Fac. Scienze» di Cagliari, 1932, fasc. 2°.

mente o quasi, del gas palleale, qualunque sia la posizione del suo corpo. Possiamo allora domandarci perchè nell'acqua dolce la quantità di gas rimasto sia molto notevole. È anzitutto evidente che gli stimoli, provenienti dal mezzo liquido, sebbene artificiale, in cui è stato immerso il Cirripede, sono sufficienti a scatenare il complesso meccanismo del sistema neuro-muscolare, deputato a sostituire, con il fluido ambiente, il gas, che trovasi sempre nella cavità palleale, dopo esposizione all'aria atmosferica. Ma non appena i tessuti del Ctamalo vengono a contatto con l'acqua dolce, ecco insorgere nello stesso sistema un riflesso inibitorio, destinato ad impedire la completa invasione del liquido ipotonico nella cavità palleale. I movimenti coordinati, iniziatisi per espellere il contenuto gassoso di questa cavità, non raggiungono quindi la voluta intensità, alcuni subito cessano, altri non si verificano, e così la bolla gassosa rimane, almeno in parte, nell'interno della camera palleale.

Va però fatto presente, che di solito, dopo un certo numero di giorni, questa quantità di gas, che potrebbe quasi apparire come riserva, gelosamente custodita, viene a scomparire, emessa successivamente in una serie di piccole porzioni, staccate di tanto in tanto, e gradualmente espulse. Non voglio negare che una frazione possa essere utilizzata direttamente dal corpo dell'animale, come anche essere passata in soluzione nell'acqua ambiente. Immergendo inoltre in acqua marina dei Ctamali, dopo una certa permanenza nell'atmosfera, e, verificatasi la completa espulsione dell'aria palleale, facendo arrivare per lungo tempo e continuamente una corrente di acqua dolce, nella vaschetta, si riesce ad avere, in acqua di fonte, individui privi di gas palleale. Ebbene, non ho potuto rinvenire, in tal caso, notevoli differenze nella resistenza e nel comportamento in confronto ai Ctamali forniti di aria, perchè immersi direttamente dall'atmosfera in acqua dolce. Solo i movimenti di questi ultimi sono poco più vivaci di quelli dei primi. Pare insomma che l'adattamento all'ambiente sperimentale sia più agevole, se l'invasione dell'acqua di fonte, nella cavità palleale, avvenga lentamente, ciò che si ha quando l'espulsione del gas si verifica gradatamente. Risulta di fatti che i Cirripedi sono omoiosmotici e possono quindi mutare la concentrazione del mezzo interno a seconda delle condizioni dell'ambiente esterno. Ma su tali facoltà osmoregolatrici ritornerò in altro lavoro.

La crisi, derivante dal cambiamento di condizioni fisiche dell'ambiente, alle quali abbiamo accennato nel corso di questo scritto, è dunque reale, facilmente constatabile, ma non ha effetti così gravi, data la resistenza organica dei Ctamali e i loro poteri di adattamento, da portarli alla morte in breve tempo: a tale esito però — di seguito a cause molto complesse, fra le quali la mancata assunzione di cibo — fatalmente si avvia il Cirripede, per quanto indubbiamente eurialino <sup>(1)</sup>.

(1) È quasi superfluo dire che al termine «eurialità» noi attribuiamo il significato comune, intendendo la semplice possibilità, in certi organismi acquatici, di sopravvivere, anche temporaneamente, al mutamento delle condizioni osmotiche dell'ambiente.

Vediamo difatti, dopo qualche tempo di permanenza in acqua dolce, manifestarsi uno stato edematoso generale, cioè a carico di tutti i tessuti. Ogni più lieve soluzione di continuo, nella superficie del corpo, basta a far morire istantaneamente il Ctamalo; il quadro edematoso si aggrava lentamente, ma incessantemente, sicchè ad un certo momento (verso i quattro mesi) l'animale perde il pieno dominio dei suoi organi. Difatti i lembi membranosi opercolari, per l'esagerato turgore, diventano sempre meno capaci di eseguire movimenti di chiusura ed apertura e finiscono col diventare rigidi e sporgenti. Il prosoma, gonfio, fa affacciare i cirri dall'ostio opercolare, e l'individuo soccombe.

Interessante si presenta poi la diminuita resistenza di fronte all'acqua dolce, in *C. s. depressus*, quando vi venga immerso mentre si trovava in stato di completa anabiosi. Difatti, queste forme di Cirripedi entrano in reviviscenza benissimo, anche in acqua distillata, ma non espellono subito il gas della cavità palleale, comportandosi quindi come quelli descritti or ora. La vita di essi, in acqua di fonte, non dura molto a lungo: al contrario, dopo un certo numero di giorni, o qualche settimana, vengono tutti a morte.

Per vero, ad attenta osservazione, non si rileva alcuna notevole differenza di comportamento tra gli esemplari portati in acqua di fonte, mentre si trovavano in anabiosi, e quelli, immersi in identico liquido, mentre erano ancora lontani da tale stato. Ma dall'esito diverso delle due prove sperimentali si ricava indubbio segno che questi si adattano con maggior facilità, mentre quelli non possono fare altrettanto, o perchè i poteri osmoregolatori non si mettono in atto perfettamente, o perchè a tale scopo esigono un periodo tanto lungo, da farsi precedere dal progredire delle condizioni letali. Ciò che ora qui possiamo rilevare, da questo interessante dato, è la dimostrazione che lo stato di anabiosi ingenera tale mutamento nelle condizioni fisiologiche del Cirripede, che la *restitutio ad integrum* necessita l'intervento di tutti i fattori normali dell'ambiente naturale, nonchè di un congruo tempo. Difatti la morte è altrettanto rapida, anche quando l'immersione in acqua dolce sia preceduta da reviviscenza in acqua marina e da susseguente, ma breve, permanenza in tale ambiente.

Un altro dato, interessante anch'esso, è stato ricavato dalla prova sperimentale seguente: individui di *C. s. depressus*, che attraversavano diversi momenti del processo pre- ed anabiotico, cioè in stadii<sup>(1)</sup> dal III al V, furono da me contemporaneamente immersi in acqua di fonte. La morte seguì più o meno rapidamente; ma soccomberono prima gli esemplari, che all'atto dell'immersione si trovavano in stadio V, poi quelli in IV, e così via, dimostrando che la resistenza all'ambiente sperimentale era tanto minore, per quanto più avanzata era la tappa verso lo stato di anabiosi.

Ciò significa che la caduta in anabiosi viene causata da un lento mo-

(1) Cfr. la mia Nota in questi «Rendiconti», vol. VIII, 1928, p. 91 e sgg.

dificarsi del mezzo interno - e che la reviviscenza<sup>(1)</sup> non deve farsi consistere nel momentaneo inizio delle attività vitali, specialmente motorie, visibili dall'esterno; ma in quel processo, che, dopo la immersione del soggetto in acqua marina pura, porta gradatamente al ristabilirsi delle condizioni normali del mezzo interno stesso.

Le esperienze accennate ci permettono di trarre le seguenti conclusioni:

1° Individui di *C. stellatus depressus*, immersi in acqua dolce, si mostrano eurialini, sebbene in tale ambiente possano sopravvivere al massimo quattro mesi.

2° L'immersione in acqua dolce determina una crisi, nell'attività motoria dell'organismo, soltanto parziale, sicchè non si può parlare di un arresto nelle relative funzioni e tanto meno di uno stato ipnico (*Salzschlaf* di Kreps), inteso nel senso di anabiosi o vita latente.

3° Gli individui, permanendo in tale ambiente sperimentale, vanno lentamente incontro a fatti edematosi, che raggiunto il massimo, producono la morte. (Non si intende con tale affermazione escludere l'intervento di altre cause letali, determinanti, predisponenti o concomitanti).

4° In acqua di fonte i Ctamali si tengono più che possibile isolati dall'ambiente, aprendo l'ostio opercolare al minimo e a lunghi intervalli. Il gas, contenuto eventualmente nella cavità palleale al momento dell'immersione, viene trattenuto per parecchi giorni, formando una bolla, che tende ad ostacolare la invasione del liquido esterno.

5° I Ctamali già caduti in anabiosi entrano in reviviscenza non appena immersi in acqua dolce, ma non espellono subito il gas dalla cavità palleale. Essi presentano una resistenza minore nel liquido sperimentale, rispetto a quella che dimostrano gli individui non anabiotici; se vengono portati in acqua dolce mentre attraversavano una delle tappe preanabiotiche, la loro resistenza vitale è tanto minore per quanto più vicino era lo stato di completa anabiosi, nell'istante in cui vennero immersi.

6° La caduta in anabiosi è causata da graduale modificazione del mezzo interno organico; il processo di reviviscenza ristabilisce le condizioni normali di tale mezzo, impiegandovi però un certo lasso di tempo.

(1) Cfr. la mia Nota in questi « Rendiconti », vol. IX, 1929, p. 95.



**Biologia** (Microbiologia). — *Intorno ad alcuni « Zygosaccharomyces »* <sup>(1)</sup>. Nota di M. SACCHETTI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. PETRI.

I fenomeni sessuali che precedono la formazione degli aschi e, più ancora, la sorprendente resistenza alle elevate concentrazioni zuccherine o, per usare la denominazione proposta dal Richter, l'*osmofilia* posseduta dalla maggior parte degli *Zygosaccharomyces*, hanno portato tali lieviti a divenire l'oggetto di numerose ed estese ricerche.

Cosicchè, dal 1901, da quando cioè il Barker istituì il genere, oltre quaranta specie sono state isolate da miele fermentante, da mosti concentrati da frutta, da cioccolato, da prodotti di fermentazione della Soja e da altri materiali.

Non risultando però che questi blastomiceti siano stati studiati in Italia <sup>(3)</sup>, è sembrato interessante il ricercarne la presenza in materiali italiani.

Per quanto iniziate da poco più di un anno, le ricerche hanno portato ad isolare diversi *Zygosaccharomyces* rinvenuti in substrati diversi, il che lascia supporre che questi lieviti siano abbondantemente diffusi in natura e che alla molteplicità di forme possa non essere estranea una eventuale copulazione incrociata tra cellule di specie o varietà diverse.

Nella presente Nota preliminare si accenna alla fonte da cui vennero isolati i lieviti e alle più salienti caratteristiche che questi presentano: di alcuni soltanto è stata finora completata l'identificazione, resa particolarmente laboriosa e difficile dal grande numero di specie già note e, soprattutto, dalla diversità dei criteri e dei metodi di studio seguiti dai diversi autori <sup>(4)</sup>.

La sporificazione degli *Zygosaccharomyces* segnalati, si compie spontanea, dopo un tempo variabile da alcuni giorni ad un mese, nella parte alta delle

(1) Lavori del laboratorio di Biologia Agraria del R. Ist. Sup. Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(3) Il CIFERRI (« Staz. Sperim. Ital. », vol. LVI, 1923) ha descritto lo *Z. Opuntiae*, isolato dalla mucillaggine dei cladodi del fico d'India: le caratteristiche della sporificazione e l'assenza di potere fermentativo, lasciano incerti circa il riferimento del fungillo in parola al genere *Zygosaccharomyces*. Il RODIO (« Bull. Orto Bot. Univ. Napoli » 6-7-1924) ha alquanto sommariamente descritto lo *Z. Cavarac* isolato da frutti marcescenti di *Phoenix dactylifera*.

(4) La frequente discordanza fra le diagnosi e le effettive caratteristiche possedute dai diversi lieviti, è messa in evidenza nel pregevole lavoro dello STELLING DEKKER, *Die sporogenen Hefen*. Amsterdam 1931.



culture in istriccio su agar o gelatina, dove il substrato sia prossimo all'essiccamento.

Non si ottiene invece col metodo di Hansen.

Nel seguente prospetto viene riassunto il loro comportamento verso gli zuccheri, accertato impiegando il metodo Durham con soluzioni al 10 % in acqua di lievito scevra di sostanze fermentescibili. L'alcool etilico è stato riconosciuto qualitativamente trasformandolo in aldeide acetica identificata colla reazione di Rimini<sup>(1)</sup>.

Oltre al potere fermento delle cellule integre e vive, per le forme non attive, in tale stato, verso il saccarosio, si è ricercata l'invertasi nelle cellule triturate con sabbia, col metodo del Kloecker<sup>(2)</sup>, questo essendo un carattere diagnostico di notevole importanza.

Zygosaccharomyces	Provenienza	Soluzione al 10 % di								Sol. 10 % di Saccarosio con cellule triturate
		Glucosio	Levulosio	Mannosio	Galattosio	Saccarosio	Maltosio	Lattosio	Rafinosio	
<i>Z. gracilis italicus</i>	mosto d'uva conc.	+++	+++	+++	+	—	+++	—	—	+++
<i>Z. felsineus</i>	»	+++	+++	+++	—	—	+++	—	—	+++
<i>Z. 339</i>	miele	+++	+++	+++	—	—	+	—	—	?
» 355	»	+++	+++	+++	—	—	++	—	—	?
» 379	»	+++	+++	+++	—	—	+++	—	—	?
» 381	»	+++	+++	+++	—	—	—	—	—	?
» 655	»	+++	+++	+++	+	—	+++	—	—	+++
» 1135	pesche sciroppate	+++	+++	+++	—	—	+++	—	—	+++
» 1211	»	+++	+++	+++	?	—	—	—	—	+++
» 849	uva moscato	+++	+++	+++	—	—	+++	—	—	+++
» casei	formaggio	+++	+++	+++	+++	+++	+	+++	++	non provat.
» 852.32	fichi secchi	+++	+++	+++	—	—	—	—	—	

Da un mosto concentrato d'uva nera (57 % circa di zuccheri) messo in commercio da una fabbrica modenese, sono stati isolati due *Zygosaccharomyces*<sup>(3)</sup>; al primo si è proposto il nome di *Z. gracilis italicus*, essendo

(1) E. RIMINI, « Gazz. Chim. Ital. » (1) 30, p. 279 (1900); SIMON, « Jour. Pharm. Chim. » (6), 7, 136 (1898); E. PARISI, « Ann. Chim. Appl. », vol. 18, fasc. 9, p. 395 (1928).

(2) KLOECKER, *Die Gärungsorganismen*, 3. Aufl., Berlin 1924.

(3) M. SACCHETTI, « Archiv. für Mikrob. », 3. Bd., 3. Heft, 1932.

prossimo allo *Z. gracilis* Karamboloff et Krumbholz<sup>(1)</sup> dal quale differisce nell'aspetto delle colonie giganti e per alcune caratteristiche degli aschi.

Il secondo è ravvicinabile allo *Z. variabilis* Kroemer et Krumbholz<sup>(2)</sup> ma ne differisce nettamente nell'aspetto delle vegetazioni, nella morfologia cellulare e nelle colonie giganti che hanno dimensioni e sculture superficiali del tutto caratteristiche. A questa specie nuova si è proposto il nome di *Z. felsineus*.

Caratterizza il processo di sporificazione dei due lieviti del mosto — processo che si compie in seguito alla copulazione iso-od eterogamica di due cellule vegetative, od anche, più raramente, per partenogenesi — la presenza di numerose cellule differenzianti speciali emissioni tubiformi (beccs, éperons degli autori francesi, schlauchförmigen Ausstülpungen degli autori tedeschi) che solo in via eccezionale partecipano alla copulazione per la quale apparirebbero predisposte.

Da un miele di Ravenna profondamente alterato dalla fermentazione, oltre ad una *Mycotorula*, si sono isolati cinque *Zygosaccharomyces* (339-355-379-381 e 655).

Il 381 sembra identificabile collo *Z. mellis* Fabian et Quinet<sup>(3)</sup> ed il 655 presenta alcune affinità collo *Z. Nussbaumeri* Lochhead et Heron<sup>(4)</sup> per quanto in questo lievito gli autori non abbiano osservato copulazioni eterogamiche, discretamente frequenti, invece, nello *Z. 655*.

Da pesche sciropate di fabbricazione domestica sono stati isolati lo *Z. 1135* e lo *Z. 1211*. In entrambi i lieviti sono molto numerosi gli aschi di origine eterogamica: sono caratteristiche, nel primo, la forma allungata delle cellule dell'asco e le lunghe emissioni tubiformi con cui spesso si compie la copulazione; il secondo, *Z. 1211*, pur essendo debolmente attivo verso il galattosio, si avvicina allo *Z. Nadsonii* Guilliermond<sup>(5)</sup> per le modalità di sporificazione.

Effettuando lo scorso autunno alcune ricerche sulla microflora dell'uva colla stessa tecnica seguita dal Cruess<sup>(6)</sup> in un campione di moscato raccolto a Praduro-Sasso (Bologna) si è rinvenuto lo *Z. 849*; la fermenta-

(1) N. KARAMBOLOFF und G. KRUMBHOLZ, « Archiv. für Mikrob. », 3. Bd., 1. Heft, 1932.

(2) G. KRUMBHOLZ, « Archiv. für Mikrob. », 2. Bd., 3. Heft, 1931.

(3) F. W. FABIAN and R. J. QUINET, « Mich. Agr. Exp. Sta. Techn. Bul. », n° 92, 1928.

(4) LOCHHEAD and D. A. HERON, « Dept. of Agr. Dom. of Canada Bull. », 116, 1929.

(5) A. GIULLIERMOND, « Compt. Rend. Soc. Biol. », t. 78, p. 568 (1915).

(6) W. V. CRUESS, « Univ. of California Agr. Sciences », vol. 4, n° 1, 1918.

zione del mosto d'uva dal quale fu estratto, venne portata a termine da questo lievito.

Le numerose ricerche eseguite sulla flora microbica dei nostri formaggi, sono in massima parte improntate al conteggio dei germi e, per lo più, si limitano al riconoscimento delle specie batteriche o delle muffe, riservando la denominazione generica di « lieviti » a tutte le forme gemmanti.

Ho iniziato uno studio qualitativo sui lieviti vegetanti in alcuni tipi di formaggio e le ricerche in corso hanno portato a ritrovare in un campione di stracchino il *Saccharomyces fragilis* Joergensen <sup>(1)</sup>.

In un formaggio tenero di Castel S. Pietro (Bologna), è stato osservato uno *Zygosaccharomyces* nettamente diverso dall'unico lievito di questo genere attivo verso il lattosio, lo *Z. lactis* Dombrowski <sup>(2)</sup>.

La forma delle colonie giganti, l'aspetto delle vegetazioni, le modalità di sporificazione (spesso preceduta da copulazioni eterogamiche) la forma degli aschi, non di rado allungata, ed il comportamento verso gli zuccheri (debole fermentazione del maltosio non attaccato dallo *Z. lactis*) consentono di ritenere questo lievito una forma nuova, alla quale viene proposto il nome di *Z. casei* sp. n.

Infine, da fichi secchi posti in una soluzione sterile di peptone è stato isolato lo *Z. 852-32* le cui cellule in corso di copulazione emettono tipiche appendici coniche. Questo lievito, a somiglianza dello *Z. globiformis* Kroemer et Krumbholz <sup>(3)</sup>, si dimostra eccezionalmente sporigeno differenziando gli aschi in tutta la superficie delle culture in istrischio.

La descrizione completa degli *Zygosaccharomyces* ai quali si è accennato nella presente Nota verrà data in seguito.

**Zoologia.** — *La autotomia dell'apparato digerente e la sua rigenerazione nelle Oloturie, come fenomeno spontaneo e normale.* Nota di F. BERTOLINI, pres. dal Socio G. DAL PIAZ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisiologia.** — *La fibra muscolare striata varia di volume durante la contrazione?* Nota di U. D'ANCONA, pres. dal Socio F. SILVESTRI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) A. JOERGENSEN, *Die Mikroorg. der Gärungsindustrie*. Berlin. L'A. isolò questo lievito dal Kefir.

• (2) W. DOMBROWSKI, «Centr. für Bakt.», Bd. 28, p. 345 (1910).

(3) G. KRUMBHOLZ, loc. cit.

**Fisiologia.** — *Ricerche sul contenuto gassoso di alcune alghe. — Sui gas contenuti in Enteromorpha compressa j Ag.* Nota di DANIN ZIPPORÀ, pres. dal Socio A. HERLITZKA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisiologia.** — *Ricerche sul movimento degli stami in alcune berberidacee. — Azione di stimoli sottolimali multipli a bassa frequenza.* Nota di S. COLLA, pres. dal Socio A. HERLITZKA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisiologia.** — *Azione dei vapori delle essenze vegetali e degli aromi animali sull'eccentricità riflessa midollare.* Nota di M. MITOLO, pres. dal Corresp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## Commemorazione del Socio Ferruccio Zambonini

letta dal Socio FEDERICO MILLOSEVICH nella seduta del 1° maggio 1932

---

FERRUCCIO ZAMBONINI nacque in Roma il 17 dicembre 1880.

Dopo la laurea, conseguita nel 1903, rapidissima fu la sua carriera accademica. Assistente per due anni nel Laboratorio di Chimica docimastica della Scuola d'Ingegneria di Torino e in seguito, per poco più di un triennio, nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli, raggiunse la cattedra Universitaria nel 1909. Per breve tempo professore di mineralogia nell'Università di Sassari, e poi più a lungo in quelle di Palermo e di Torino, passò, nel 1922, in seguito a concorso, all'insegnamento della Chimica generale nell'Università di Napoli.

Il male fulmineo, che in poche ore lo condusse al sepolcro, lo ghermì nell'aula di lezione, davanti ai suoi studenti. Bella morte degna di una vita breve, ma nobilmente e intensamente vissuta!

Non è un banale luogo comune l'affermazione che con Ferruccio Zambonini la scienza italiana ha subito una grave perdita. Effettivamente egli vi ha lasciato una impronta rimarchevole.

Esordì con lo studio delle proprietà morfologiche di minerali diversi, in quel campo di lavoro dove rifulse l'opera di Giovanni Struever, che fu maestro anche a lui, come a molti di noi. Ma quel campo era tutt'altro che inesauribile e, alla fine del secolo scorso, il più e il meglio era stato mietuto. A chi vi si affacciava in quegli anni restava solo la spigolatura. Lo Struever stesso, di ciò ben convinto, aveva additato una nuova via con i lavori compiuti in età matura, nei quali affrontò problemi di giacimento, di minerogenesi e di paragenesi con mentalità di geologo; e alcuni dei giovani mineralogisti dell'epoca, quelli che si tennero maggiormente fedeli all'indirizzo naturalistico, lo seguirono su questa strada. Zambonini invece ne batté un'altra tentando di risolvere problemi di tal genere con i metodi della chimica-fisica, la quale, in quel torno di tempo, iniziava in tutte le scienze naturali quella trasformazione benefica, che aveva già operata nel campo della chimica tradizionale. Era certamente per la mineralogia il mezzo migliore per procedere dalla descrizione alla spiegazione, per rappresentare il processo naturale, oltre che qualitativamente, anche, nei limiti del possibile, quantitativamente, per iniziare insomma la sperimentazione



dove aveva dominato quasi unicamente l'osservazione. L'occasione di siffatta orientazione fu offerta a Zambonini da ricerche da lui iniziate su alcune zeoliti delle leucititi del Lazio. Erano state precedute da altre su minerali idrati durante le quali gli si era presentato il problema della vera natura dell'acqua contenuta in molti silicati, problema che poi gli si impose quando si accinse a stabilire la costituzione chimica, allora ancor dubbia, della gismondina ed i limiti delle variazioni nella composizione della philipsite e della cabasite. Ne seguirono ricerche più vaste, estese ad altre zeoliti e in genere a silicati idrati, con conclusioni interessanti, che modificarono totalmente le opinioni universalmente accettate sulla costituzione di alcuni di essi. Principale e originale risultato di queste ricerche fu il confronto fra l'acqua zeolitica e quella degli idrogeli studiati da van Bemmelen, confronto che, comunque discusso, conserva tuttavia il suo valore, perchè non si fonda su ipotesi, ma su risultati sperimentali. E ancor oggi, dopo un rapido e tanto esteso progresso degli studi di struttura dei cristalli si è costretti a supporre, in mancanza di migliore spiegazione, l'esistenza, e non nei silicati soltanto, di un'acqua vagabonda fra i piani e dentro le maglie dei reticoli cristallini. Le ricerche di Zambonini in questo indirizzo, giustamente apprezzate da un chimico-fisico illustre quale il Tamman, confermate da ulteriori esperienze del Weigel e di altri, eseguite queste con attrezzature sperimentali infinitamente più adatte, hanno servito e possono servire ancora da modello a quanti si occupano dei fenomeni di disidratazione.

Non abbandonò del tutto in questo primo periodo della sua attività scientifica gli studi nell'indirizzo della mineralogia tradizionale, pur dando accentuato rilievo alla parte chimica. La sua mineralogia vesuviana (1910) ne è l'espressione migliore. Opera di coordinazione di dati sparsi e incompleti con aggiunta di numerose e importanti osservazioni originali che è, e sarà, libro di utile e frequente consultazione fra i mineralogisti.

Mentre contribuì con numerosi lavori analitici alla più perfetta conoscenza di tante specie minerali, di altre discuteva la costituzione chimica ancora dubbia, traendo con lucida argomentazione prezioso partito dal materiale che i rapidi progressi della chimica venivano accumulando e che egli, dotato di una memoria veramente eccezionale, aveva sempre presente alla mente per utilizzarlo a momento opportuno. Nello stesso tempo contribuiva ad accrescere l'elenco delle specie minerali nuove con la strüverite, con la delorenzite, con la muthmannite, con la grothina, con la rivaite, con la bassanite, con la vernadskite, e, in collaborazione con allievi, con la cannizzarite, con l'avogadrite, la malladrite, la mitscherlichite senza contare nuove varietà di specie note.

Una cospicua mole di lavoro fu portata da Zambonini agli studi sull'isomorfismo. La sua attività in questo campo si inizia con le ricerche sulle soluzioni solide dei composti di calcio, bario, stronzio e piombo con



FERRUCCIO ZAMBONINI



quelli delle terre rare, i cui primi risultati furono pubblicati nel 1913, ma successivamente rielaborati mano a mano che il rapido progresso degli studi di struttura cristallina e di fisica atomica portava nuova luce al fenomeno e permetteva di darne una spiegazione soddisfacente. Così riusciva a Zambonini di spiegare questi ed altri casi d'isomorfismo, tra cui quello classico albite-anortite, con la teoria dei diametri atomici di Bohr supponendo cioè, che si possa avere isomorfismo e miscibilità in larga misura fra due composti, quando i diametri dei leptoni che si sostituiscono non differiscono al di là di un certo limite l'uno dall'altro. Estendendo tali considerazioni gli riuscì di modificare opportunamente una vecchia regola di Hjortdahl e di darle una nuova forma valevole per i composti, nei quali entrano in giuoco soltanto, o almeno essenzialmente, le valenze principali. Questa forma è identificabile con la condizione dell'ottetto di Langmuir, quando si tratta di composti nei quali soltanto l'ossigeno forma ottetti. Come pure pensò per primo di ricorrere alla teoria di Werner dei numeri di coordinazione per spiegare relazioni cristallografiche molto strette da lui constatate fra fluoborati e permanganati, o perclorati, di metalli alcalini, cioè fra composti che non hanno certamente l'analogia chimica intesa nel senso di Mitscherlich.

Ad un'altra importante constatazione, suscettibile di una larga estensione nel campo dell'isomorfismo, Zambonini fu condotto dalle osservazioni di proprietà fisiche anomale nella serie clinzoisite-epidoto, alcuni termini della quale con eguale composizione possiedono proprietà fisiche diverse. Spiegò il fenomeno in modo semplice, ammettendo che nel reticolo spaziale della clinzoisite atomi di alluminio in diversa posizione e con diverso carattere chimico (legati, oppur no all'ossidril) vengano sostituiti da atomi di ferro. Il caso presenta analogie con i cristalli misti isomeri nello spazio o stereoisomeri scoperti dal Tammann in alcune leghe e il Nostro lo estese a questa e ad altre serie, aprendo con ciò una nuova via a tal genere di ricerche.

Giunto così ad affermarsi fra i più valenti ed esperti cultori di chimica mineralogica con queste ed altre numerose ricerche tendenti a stabilire relazioni isomorfiche ed anche morfotropiche fra minerali, o fra composti artificiali molteplici, Zambonini si trovò, non già a varcare il confine, perchè netti confini fra scienza e scienza non esistono, ma a lavorare sempre più prevalentemente e più addentro nel campo che segna il passaggio fra mineralogia e chimica.

La distinzione fra composti chimici naturali o minerali e quelli che si producono in laboratorio è certamente artificiale. La chimica dei cristalli appunto segna la zona comune alle due scienze e se il Nostro, dalla mineralogia tradizionale descrittiva o puramente determinativa di proprietà fisiche e chimiche, fu tratto ad occuparsi prevalentemente di isomorfismo, anche in senso teorico, vi fu fra i chimici propriamente detti chi a questo stesso tema portò largo contributo di studi geniali e fecondi.



Il sempre più deciso orientamento verso indagini di tal genere, il giusto riconoscimento dei suoi meriti, che gli fu attribuito in un concorso per cattedre di chimica a cui prese parte, lo portarono, negli ultimi anni, non solo all'insegnamento universitario della chimica, ma anche ad un genere di ricerche prettamente chimiche, nelle quali la sua pratica di cristallografo contribuì al raggiungimento di risultati molto interessanti. Alludo ai suoi lavori sui composti delle terre rare poco studiati in Italia, anche perchè esigono larghezza di mezzi ignota ai nostri istituti scientifici. Con siffatti lavori contribuì a far attribuire anche in questo campo degna considerazione alla scienza italiana.

Ho accennato per grandi linee alle più rimarchevoli ricerche del nostro compianto Socio, ma di moltissime non posso, per economia di tempo, far cenno, fuori dell'elenco bibliografico che viene pubblicato in appendice a questa breve commemorazione. Dalla lettura di questo appare chiaro che ad altri campi, oltre a quelli accennati, estese la sua fervida attività: sono determinazioni di proprietà ottiche, indagini sulla radioattività di minerali, osservazioni sull'attività e sul chimismo delle fumarole vesuviane, studi su acque minerali della Campania e, di rimarchevole interesse, alcuni lavori di petrografia; uno sui gabbri di Val di Susa e sul loro metamorfismo, altri su rocce di Campi Flegrei. Con questi pochi, ma veramente eccellenti, contributi petrografici, mostrò la sua versatilità d'ingegno e la sua estesa coltura. Fu infatti dotato di attitudini così eccezionali da poter contemporaneamente svolgere la sua attività in vari campi.

Alla domanda, se sia stato prevalentemente mineralogista o chimico, la risposta, secondo me, non è dubbia. Fu prevalentemente mineralogista, perchè quasi tutte le sue ricerche, tranne forse alcune delle ultimissime, ebbero un fine naturalistico. Forse lo Zambonini non se ne rendeva interamente conto, perchè teneva negli ultimi anni a dar maggior rilievo al lato chimico della sua attività, ma ciò non toglie che egli si avvallesse sempre della sua conoscenza dei metodi e delle dottrine della chimica per risolvere problemi cristallografici e spesso anche di minerogenesi.

La differenza fra chimica e mineralogia, checchè si voglia dire in contrario, è marcata ed essenziale. Vi è una tendenza, e non in Italia soltanto, a far apparire la mineralogia una scienza ibrida vivente a spese della geologia, da una parte, e della fisica e della chimica, dall'altra. Tale asserzione è erronea. Che non vi siano netti confini, ma solo vasti campi in cui scienze affini vengono ad incontrarsi, che molti coltivino espressamente e con degna preparazione questi campi come ha fatto Zambonini, che molti altri, incerti della loro via e delle loro migliori attitudini, li invadano senza uno scopo preciso, tranne forse quello di più facile e rapida carriera, non è argomento che valga a giustificare l'affermazione.

A definire una scienza, più che il contenuto, vale il metodo, e più ancora che il metodo, il fine della ricerca. Perchè l'orientazione verso la cono-



scienza di un determinato campo dello scibile costituisce la *forma mentis* del ricercatore. Con l'approfitarsi dei progressi della fisica e della chimica la mineralogia perfeziona il metodo, ma non si allontana dal fine, che ha in comune con la geologia, e non esce dall'ambito delle scienze naturali. Se mai dovesse considerarsi parte di una scienza è della geologia che lo sarebbe. Ma neanche tale affermazione avrebbe valore assoluto, in quanto che la mineralogia ha una autonomia privilegiata che è definita nel piano delle sue ricerche, il quale si sviluppa logicamente così: nel considerare le sostanze cristallizzate, volta a volta, come costruzioni geometriche, poi come edifici, la cui struttura è funzione degli atomi costituenti e la cui forma dipende da circostanze esteriori e infine come materiali della crosta terrestre. Ciò conduce alle complesse indagini sulla loro paragenesi, guidate sì dalla conoscenza delle leggi della chimico-fisica, confermata sì dall'esperimento, in quanto questo possa riprodurre in tutto o in parte le condizioni naturali della formazione della materia inorganica, ma illuminate dalla dottrina geologica.

Ferruccio Zambonini, disinteressato cultore di scienza, dedicò quasi interamente la sua attività alla ricerca pura e solo in rare occasioni ebbe ad occuparsi di problemi di pratiche applicazioni. Ma in tali occasioni, come nella sua missione in America, dove fu, nel 1913, inviato dal Governo per rendersi conto delle condizioni della nuova industria solfifera del Texas e nella Louisiana che si profilava fin d'allora minacciosa per quella siciliana, diede prova, con le lucide relazioni che scrisse, di saperli affrontare con successo.

Pari allo scienziato fu il maestro; chiaro ed efficace espositore delle dottrine scientifiche alla folta schiera degli studenti nell'aula, guida amorevole e animatrice ai giovani che si iniziano alla ricerca nel laboratorio. E alla scuola italiana fece dono con entusiasmo del suo tempo veramente prezioso e della sua instancabile operosità nell'ufficio di Rettore dell'Università di Napoli, da lui tenuto due volte con saggezza e fermezza e dando prova di spiccate qualità di amministratore.

Illustri colleghi: in brevi tratti e con cuore di amico ho ricordato l'opera di uno scienziato, che ha onorato la nostra Accademia. Se è vero che i sentimenti sinceramente espressi si comunicano a chi ci ascolta, ciascuno di voi in questo momento ne avrà presente allo spirito l'immagine e ne deplorerà con me l'immatura scomparsa.

#### ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE DI F. ZAMBONINI

1. «Sul Sanidino del Monte Cimino (Viterbese)». (Riv. di Min. e Crist.), 1898, XIX.
2. «Magnetite dei fossi di Acquacetosa e del Tavolato». (Ibidem), 1898, XX.
3. «Ueber zwei neue Hydrosilikate». (Zeitsch. für Kryst.), 1899, XXXII.
4. «Ueber den Olivin Latiums». (Ibidem), 1899, XXXII.
5. «Ueber flächenreiche Epidotkrystalle von Sulzbach». (Neues Jahrbuch für Min. etc.), 1900, I.

6. «Anortite di S. Martino. (Viterbo)». (Rivista di Min. e Crist.), 1900, XXIV.
7. «Sull'esistenza della sodalite nei blocchi erratici del Viterbese». (Ibidem), 1900, XXIV.
8. «Ueber den Pyroxen Latiums». (Zeitsch. für Kryst.), 1900, XXXIII.
9. «Sul Sanidino». (Rivista Min. e Crist.), 1900, XXV.
10. «Mineralogische Mittheilungen», 1-10. (Zeitsch. für Kryst.), 1901, XXXIV.
11. «Su un pirosseno sodifero dei dintorni di Oropa nel Biellese». (Rend. R. Acc. Lincei), 1901, 1° sem.
12. «Ueber ein merkwürdiges Mineral von Casal Brunori bei Rom». (Centralblatt für Min. etc.), 1901, n. 13.
13. «Mineralogische Mittheilungen», 11-13. (Zeitsch. für Kryst.), 1901, XXXIV.
14. «Su alcuni minerali della Rocca Rossa e Monte Pian Reale (Val di Susa)». (Rend. R. Acc. Lincei), 1901, 2° sem.
15. «Wavellite di Manziana (Prov. di Roma)». (Ibidem), 1902, 1° sem.
16. «Sul glaucofane di Chateyrour (Valle di Gressoney)». (Ibidem), 1902, 1° sem.
17. «Kurzer Beitrag zur Chemischen Kenntniss einiger Zeolithe der Umgegend Roms». (Neues Jahrbuch für Min. etc.), 1902, II.
18. «Notizen über den Guarinit». (Centralblatt für Min. etc.), 1902, n. 17.
19. «Krystallographisches über den Epidot». (Zeitsch. für Kryst.), 1902, XXXVII.
20. «Amphibol von Cappuccini di Albano». (Zeitsch. für Kryst.), 1903, XXXVII.
21. «Beiträge zur Mineralogie Piemonts». (Centralblatt für Min. etc.), 1903.
22. «Sull'Epidoto del passo Bettolina, vallone di Verra». (Rend. R. Acc. Lincei), 1903, 2° sem.
23. «Su una notevole combinazione della celestina di Boratella in Romagna». (Ibidem), 1904, 1° sem.
24. «Ueber einige Mineralien von Canale Monterano in der Provinz Rom». (Zeitsch. für Kryst.) 1905, XL.
25. «Analisi di lawsoniti italiane». (Rend. R. Acc. Lincei), 1904, 2° sem.
26. «Ueber die Drusenmineralien des Syenits der Gegend von Biella». (Zeitsch. für Kryst.), 1905, XL.
27. «Krystallographische Untersuchung der racemischen und activen p-Methoxymandelsäure». (Ibidem), 1905, XL.
28. «Einige Beobachtungen über die optischen Eigenschaften des Melanophlogits». (Ibidem), 1905, XLI.
29. «Beiträge zur krystallographischen Kenntniss einiger anorganischer Verbindungen». (Ibidem), 1905, XLI.
30. «Ricerche su alcune zeoliti». (Memorie R. Acc. dei Lincei), 1905, V.
31. «Ueber eine krystallisierte Schlacke der Seigerhütte bei Hettstedt, nebst Bemerkungen über die chemische Zusammensetzung des Melilith». (Zeitsch. für Kryst.), 1905, XLI.
32. «Sulla costituzione della titanite». (Rend. R. Acc. Lincei), 1906, 1° sem.
33. «Appunti sulla scheelite di Traversella». (Ibidem), 1906, 1° sem.
34. «Sull'Epidoto dei dintorni di Chiavriè, presso Condove, nella valle di Susa». (Ibidem), 1906, 2° sem.
35. «Abhandlungen zur Krystallographie von Quintino Sella. Herausgegeben von F. Zambonini». (Ostwalds Klassiker der exacten Wissensch.), n. 155.
36. «Ulteriori ricerche sulle zeoliti». (Memorie R. Acc. Lincei), 1906, VI.
37. «Sulla galena formatasi nell'ultima eruzione vesuviana dell'aprile 1906». (Rend. R. Acc. Lincei), 1906, 2° sem.
38. «Notizie mineralogiche sull'eruzione vesuviana dell'aprile 1906». (Atti R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1906, XIII.
39. «Ueber die metamorphosierten Gabbro der Rocca Bianca im Susa-Tale». (Neues Jahrbuch für Min. etc.), 1906, II

40. « Strüverite, un nuovo minerale ». (Rend. R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1907.
41. « Sulla radio attività della cotunnite vesuviana ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1907, 1° sem.
42. « Notizia cristallografica sull'azzurrite del Timpone Rosso presso Lagonegro ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1907, 2° sem.
43. « Su alcuni minerali della Grotta dello zolfo a Miseno ». (Rend. R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1907.
44. « Ueber Delorenzit, ein neues Mineral ». (Zeitsch. für Kryst.), 1908, XLV.
45. « Sulla disanalite di Monte Somma ». (Rend. R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1908.
46. « Ueber ein Idokrasvorkommen aus dem Susatale ». (Zeitsch. für Kryst.), 1908, XXV.
47. « Su alcuni minerali non osservati finora al Vesuvio ». (Rend. R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1908.
48. « Contributo allo studio dei silicati idrati ». (Atti R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1908, XIV.
49. « Die morphotropischen Beziehungen zwischen Enstatit, Diopsid, Hedenbergit, Aegirin und Spodumen ». (Zeitsch. für Kryst.), 1909, XLVI.
50. « Sulla costituzione delle zeoliti ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1909, 1° sem.
51. « Sulla identità della belonesite con la sellaite ». (Ibidem), 1909, 1° sem.
52. « On the identity of Guarinite and Hjortdahlite ». (Mineral. Magaz.), 1909.
53. « I minerali del Monte Somma e del Vesuvio ». (Natura), 1909, n. 1.
54. « Krystallographische Untersuchung anorganischer Verbindungen ». (Zeitsch. für Kryst.), 1910.
55. « Sulla vera natura della pseudonefelina di Capo di Bove presso Roma ». (Rend. R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli).
56. « L'opera scientifica di Arcangelo Scacchi ». (Discorso pronunciato nell'Aula Magna della R. Università di Napoli, il 10 luglio 1910).
57. « Mineralogia Vesuviana ». (Opera premiata dalla R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli). Vol. di p. 368 in 4°.
58. « Muthmannit, ein neues Mineral ». (Zeitsch. für Kryst.), 1911.
59. « Sull'applicazione del contenuto in uranio e piombo di alcuni minerali alla determinazione dell'età delle rocce che li contengono ». (Rend. R. Acc. Lincei), 2° sem. 1911.
60. « Baddeleyte e pirrite del Monte Somma ». Nota preliminare. (Rend. R. Acc. Lincei), 2° sem. 1911.
61. « La mineralogia in Italia negli ultimi cinquant'anni ». (Discorso di Classe letto nel Convegno di Roma della Soc. Italiana per il Progresso delle Scienze). Ottobre 1911.
62. « Ueber die Identität des Baumlerit mit dem Chlorocalcit ». (Central. für Min.), 1912.
63. « Contributi allo studio dei solfosali naturali. I. Il gruppo plagionite ». (Rivista di Min. e Crist.), 1912.
64. « Appendice alla Mineralogia Vesuviana ». (Atti R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1912.
65. « Titanate, Silikotitanate, Silikozirkoniate ». (Articolo nello Handbuch der Mineralchemie del prof. Doelter).
66. « Sulle soluzioni solide dei composti di calcio, stronzio, bario e piombo con quelli delle "terre rare" ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1° sem. 1913.
67. « Grothina, un nuovo minerale ». (Ibidem).
68. « Cenni sulle cupole solifere della Coastal Plain ». Torino, 1914.
69. « Osservazioni sulla composizione chimica di alcuni minerali ». (Atti R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli), 1914.
70. « Nota bibliografica sul libro del prof. Jaeger: Eine Anleitung zur Ausführung exakter physiko-chemischer Messungen bei höheren Temperaturen ».
71. « Sulle soluzioni solide dei composti di calcio, stronzio, bario e piombo con quelli delle "terre rare" ecc. ». (Rivista Italiana di Miner.), 1915.

72. « Giovanni Strüver ». (Boll. R. Comit. Geol. d'Italia), 1915.
73. « Contributi allo studio dei solfosali naturali ». (Riv. Ital. di Min.), 1916.
74. « Il significato geologico di alcuni miti mediterranei e F. M. Pagano ». (Riv. Ital. di Sociologia), 1916.
75. « Le regole di Tschermak e di Buys-Ballot ». (Atti R. Acc. di Fis. e Mat. di Napoli), 1916.
76. « A proposito di un recente lavoro del prof. G. Cesaro sulla cancrinite e sulla non esistenza al Monte Somma di questo minerale ». (Riv. Italiana di Miner.), 1917.
77. « Sulla identità della spangite con la phillipsite ». (Atti R. Acc. Scienze di Torino), 1917.
78. « Leucite pseudomorfa di nefelite di Parco Ghigi, presso Ariccia, nei Monti Albani ». (Ibidem), 1918.
79. « Sur l'identité de la shattuckite et de la planchéite ». (Compt. rend.), 1918.
80. « Il tufo pipernoide della Campania ed i suoi minerali ». (Memorie R. Comitato Geolog. d'Italia), 1919.
81. « Sur la véritable nature du titanolivine de la vallée d'Ala. (Piémont) ». (Bull. Soc. Franç. Min.), 1919.
82. « Sulla clinozoisite di Chiampernotto in Val d'Ala ». (Boll. R. Com. Geol.), 1920.
83. « Wolframati e molibdati normali di bismuto. Loro relazioni con i corrispondenti composti di piombo ». (Gazz. Chim. Ital.), 1920.
84. « Sui cristalli misti stereoisomeri della serie clinozoisite-epidoto ». (Rend. R. Acc. Lincei - 4 Note), 1921.
85. « Osservazioni sulla composizione di alcuni minerali ». Memoria II. (Atti Soc. Ital. Sc. Nat.), 1921.
86. « Sulla palmierite del Vesuvio ed i minerali che l'accompagnano ». (Boll. R. Comit. Geolog.), 1922.
87. « Ardenbite di Ceres in Val d'Ala ». (Ibidem), 1922.
88. « L'isomorfismo dell'albite con l'anortite ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1922.
89. « Commemorazione del Socio Giacomo Ciamician ». (R. Acc. Sc. Torino), 1922-23.
90. « La struttura atomica secondo Bohr e l'isomorfismo dei metalli delle "terre rare" con quelli del gruppo del calcio ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1924, 2° sem.
91. « L'isomorfismo del fluoborato e del permanganato di potassio ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1922, 2° sem.
92. « Ueber die Mischkristalle, welche die Verbindungen des Calciums, Strontiums, Bariums und Bleis mit jenen der seltenen Erden bilden ». (Zeitschr. f. Kryst.), 1923.
93. « Sul molibdato normale di torio ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1923, 1° sem.
94. « Sulla presenza del solfato anidro di sodio fra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1923, 2° sem. e (Annuario R. Osservatorio Vesuviano), 1924, vol. I.
95. « Fenomeni di erosione nella trachite fonolitica di Cuma ». (Ann. R. Osservatorio Vesuviano), 1925, vol. II.
96. « Sulla presenza della mirabilite fra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio. Sulla presenza della picromerite fra i prodotti delle fumarole Vesuviane ». (Ann. R. Osservatorio Vesuviano), 1925, vol. II.
97. « Sopra un rapporto del prof. De Fiore intorno a un sollevamento delle coste orientali dell'Etna ». (Rend. Acc. Scienze Napoli), serie 3ª, 1925.
98. « Sulla presenza, tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio di una varietà cesifera di fluoborato di potassio ». (Ibidem), 1926, vol. III e (Rend. R. Acc. Lincei), 1926, 2° sem.
99. « Commemorazione del Socio Carlo Viola ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1926, 2° sem.
100. « Commemorazione del Socio Agostino Ogialoro Todaro », letta all'Acc. Pontaniana il 7 nov. 1926.



101. « L'opera scientifica di Quintino Sella ». (Archeion), 1927.
102. « Mezzi crenologici dei Campi Flegrei ». (Atti del XIX<sup>o</sup> Congresso Nazionale nei Campi Flegrei), 10-15 giugno 1928.
103. « Contributo allo studio delle proprietà fisiche delle miscele isomorfe ». (Festschrift Victor Goldschmidt), Heidelberg, 1928.
104. « Luigi Brugnatelli. Note biografiche ». (Boll. Soc. Geol. Italiana), 1928, vol. XLVII.
105. « Commemorazione del Socio Arcangelo Scacchi ». (Atti della Soc. Ital. delle Scienze "detta dei XL"). Estratto, tomo XXIII.
106. « Le ricerche chimiche eseguite sui materiali della zona vulcanica della Campania ». (Boll. Soc. Geol. Ital.), vol. XLIX, 1930, fasc. 2<sup>o</sup>.
107. « Eugenio Scacchi ». (Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Nat. di Napoli), 1929, vol. XXXV.
108. « Notice sur les formes cristallines de l'heptafluotantalate, de l'heptafluoniobate et de l'hexafluotitanate de potassium. Extrait Livre Jubilaire (1878-1928) ». (Bull. Soc. Franç. Minér.), vol. LIII, 1930.
109. « Chimica e Mineralogia ad uso delle scuole Medie ». 1<sup>a</sup>-4<sup>a</sup> ediz., 1923-1931. Perrella, Napoli.
110. « Mineralogia ad uso degli Istituti tecnici ». Ibidem, 1931.

## ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE DI F. ZAMBONINI

IN COLLABORAZIONE

- ZAMBONINI e CAROBBI, « Sui lantanati di Baskerville e Catlett ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1923, 2<sup>o</sup> sem.
- ZAMBONINI e CAROBBI, « Sui carbonati doppi di sodio e dei metalli del gruppo del cerio ». (Ibidem). p. 125.
- ZAMBONINI e CAROBBI, « Sulla presenza tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio del composto  $Mn_2K_2(SO_4)_3$  ». (Rend. R. Acc. Sc. Napoli), 1924.
- ZAMBONINI e CAROBBI, « Contributo allo studio delle relazioni di isomorfismo fra i composti di berillio e quelli di magnesio ». (Rend. R. Acc. Lincei), 1924, 2<sup>o</sup> sem.
- ZAMBONINI e CAROBBI, « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. I. Solfati di lantanio e potassio ». (Ibidem), 1924.
- ZAMBONINI e CAGLIOTI, « II Solfati di neodimio e potassio ». (Ibidem), 1924.
- ZAMBONINI e CAROBBI, « Contributo allo studio dei cromati dei metalli del gruppo del cerio ». (Rend. R. Acc. Sc. Napoli), 1924.
- ZAMBONINI e RESTAINO, « Sulla presenza del cloruro ferroso fra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio ». (Ann. R. Osserv. Vesuviano), 1924, 3<sup>a</sup> ser.
- ZAMBONINI, DE FIORE e CAROBBI, « Su un solfobismutite di piombo di Vulcano (Isole Eolie) ». (Ibidem), 1924.
- ZAMBONINI e R. G. LEVI, « Ricerche sull'Isomorfismo dei molibdati delle terre rare con quelli del calcio, dello stronzio, del bario e del piombo ». (Rend. R. Acc. Lincei), Ser. 6<sup>a</sup>, 1925.
- ZAMBONINI e CAROBBI, « Solfati di lantanio e tallio talloso ». (Ibidem).
- ZAMBONINI e CAROBBI, « I Solfati doppi delle terre rare e dei metalli alcalini. III. Solfati doppi di lantanio e sodio ». (Ibidem).
- ZAMBONINI e CAROBBI, « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. IV Solfati doppi di neodimio e sodio ». (Ibidem).
- ZAMBONINI e CAROBBI, « Contributo allo studio delle relazioni di isomorfismo fra il tallio trivalente ed i metalli delle terre rare ». (Ibidem).
- ZAMBONINI e CAROBBI, « Sulla presenza tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, del



- tetraclorocupriato potassico diidrato  $K_2CuCl_4 \cdot 2H_2O$ ». (Ann. R. Osserv. Vesuviano), 1925.
- ZAMBONINI, CAROBBI e CAGLIOTI, «Ricerche chimiche e chimico-fisiche su tre acque minerali di Agnano (Napoli)». (Ann. di Chim. Appl.), vol. XV.
- ZAMBONINI e CAGLIOTI, «Solfati di neodimio e tallio talloso». (Rend. R. Acc. Lincei), ser. 6, vol. II, 1925.
- ZAMBONINI e CONIGLIO, «Sulla presenza in alcuni prodotti dell'attuale attività del Vesuvio di quantità notevoli di composti di cesio». (Rend. R. Acc. Lincei), 1° sem. 1926.
- ZAMBONINI e RESTAINO, «I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. V. Solfati di cerio (ceroso) e ammonio». (Ibidem).
- ZAMBONINI e RESTAINO, «VI. Solfati di cerio (ceroso) e potassio». (Ibidem) 2° sem.
- ZAMBONINI e CAROBBI, «Sulla presenza del fluosilicato sodico e di quello di potassio tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio». (Ibidem),
- ZAMBONINI e RESTAINO, «Solfati di cerio ceroso e tallio talloso». (Ibidem).
- ZAMBONINI e STOLFI, «VII. Solfati di lantanio e ammonio». (Ibidem).
- ZAMBONINI e CONIGLIO, «Sulla presenza di composti solubili del selenio e del tellurio tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio». (Ann. R. Osserv. Vesuv.), II (3°).
- ZAMBONINI e CAROBBI, «Ricerche chimiche sulle incrostazioni gialle della lava Vesuviana del 1631». (Atti R. Acc. Scienze di Napoli), 1926.
- ZAMBONINI e RESTAINO, «VIII. Solfati doppi di cerio ceroso e sodio». (Rend. R. Accad. Lincei), serie 6<sup>a</sup>, 1927.
- ZAMBONINI e CAGLIOTI, «Ricerche sui manganomolibdati». (Rend. R. Acc. Scienze di Napoli), 1927.
- ZAMBONINI e CAGLIOTI, «IX. Solfati di neodimio e rubidio». (Rend. R. Acc. Lincei), serie 6<sup>a</sup>, 1927.
- ZAMBONINI e CAGLIOTI, «Ricerche chimiche sulla roosterite di San Piero in Campo (Isola d'Elba) e sui berilli in generale». (Gazz. Chim. Ital.), 1928.
- ZAMBONINI e STOLFI, «X. Solfati di neodimio e ammonio». (Rend. R. Acc. Lincei), serie 6<sup>a</sup>, 1926.
- ZAMBONINI e FERRARI, «Ricerche sul fosfato e sul clorofosfato di piombo». (Rend. R. Acc. Lincei), vol. VII, 1928.
- ZAMBONINI e RESTAINO, «XI. Solfati di cerio ceroso e rubidio». (Ibidem), 1928.
- ZAMBONINI e RESTAINO, «XII. Solfati di cerio ceroso e cesio». (Ibidem), vol. IX.
- ZAMBONINI e CAGLIOTI, «Sulla determinazione quantitativa spettroscopica di piccole quantità di stronzio, bario e cesio nei minerali, nelle rocce e nelle acque minerali, ecc.». (Rend. R. Acc. Lincei), vol. VIII, 1928.
- ZAMBONINI e CAROBBI, «La roccia leucitica dell'Averno nei Campi Flegrei». (R. Acc. Scienze di Napoli), serie 2<sup>a</sup>, 1930.
- ZAMBONINI e CAROBBI, «Ricerche sulla forsterite e sullo spinello». (Boll. Soc. Naturalisti Napoli), 41, 1930.
- ZAMBONINI e RESTAINO, «XIII. Solfati di praseodimio e ammonio». (Rend. R. Acc. Lincei), serie 6<sup>a</sup>, 1930.
- ZAMBONINI e FERRARI, «Sulla identità di struttura cristallina della cancrinita del Monte Somma con quella di Mias». (Rend. R. Acc. Lincei), serie 6<sup>a</sup>, 1930.
- ZAMBONINI e MALOSI, «Riproduzione artificiale della litiofilite». (Zft. für Kryst.), Bd. 80, 1931.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il doloroso annuncio della morte dei Soci PEANO e CAGNI, ne ricorda brevemente i meriti insigni di studiosi nei campi di scienza che coltivarono, ed esprime il voto che la loro commemorazione venga tenuta in una delle prossime sedute.

Il Socio MILLOSEVICH legge la commemorazione del Socio ZAMBONINI. Il Presidente ringrazia, a nome della Classe, per la bella rievocazione del compianto Socio.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio MARCOLONGO presenta in omaggio all'Accademia il suo volume su « La Meccanica di Leonardo » e accenna ai punti più importanti da lui chiariti, circa alle conoscenze del Grande intorno alla statica ed alla dinamica.

Il Presidente si congratula col Socio MARCOLONGO ed esprime l'augurio che egli abbia da occuparsi anche degli altri artisti-scientziati del Rinascimento.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in dono; segnalando i volumi VIII e IX delle « Tables annuelles internationales de constantes et données numériques »; la collana di pubblicazioni geologiche del De Angelis d'Ossat; « Sénilité et rajeunissement » di A. Lumière.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio MILLOSEVICH presenta a nome del Socio BOERIS la Memoria del dott. Cavinato « L'uso del prisma per la determinazione degli indici di rifrazione dei cristalli ».

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELLINI, BAGLIONI, GARBASSO, LEVI-CIVITA, MILLOSEVICH, SCORZA, SILVESTRI.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 1° maggio 1932*

---

- ARCANGELI ALCESTE. — Isopodi terrestri raccolti dal Prof. Silvestri nel Nord-America. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVI, pp. 121-141). Spoleto, 1932. 8°.
- BATTAGLIA M. — Cura della tubercolosi chirurgica col vaccino selezionato e stabilizzato. (Estr. dagli « Annali Italiani in Chirurgia ». Vol. XI). Napoli, 1932. 8°, pp. 1-8.
- BUA GAETANO. — Risultati di nuovi esperimenti di attrazione della mosca delle olive eseguiti nel comune di Pisciotta (Salerno) nel 1931. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Superiore Agrario di Portici ». Serie III, vol. V. 1931, pp. 63-71). Spoleto, 1932. 8°.
- BURGATTI PIETRO. — Teoria matematica della elasticità. (Analisi Vettoriale generale e applicazioni. Vol. III). Bologna, Nicola Zanichelli, 1931. 8°, pp. I-VIII, 1-370.
- CLARK AUSTIN H. — Echinoderms from the islands of Niuafoou and Nukualofa, Tonga Archipelago, with the description of a new genus and two new species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 80). Washington, 1931. 8°, pp. 1-12.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Studio geoidrologico dell'Anziate. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXV, pp. 150-164). Roma, 1932. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Brevi cenni sulla geologia del Colle Esquilino in Roma. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXV, pp. 83-86). Roma, 1932. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT E CLERICI E. — Le escursioni del XLIII Congresso della Società Geologica italiana nel Lazio. (22-27 settembre 1930). (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XLIX. 1930, pp. LXXXIV-CIII). Roma, 1931. 8°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Il sottosuolo dei Mercati Traianei e del Foro d'Augusto. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXIV, pp. 227-234). Roma, 1931. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Rocce e fossili della terra Francesco Giuseppe raccolti dal Generale Nobile nel 1931. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXV, pp. 32-36). Roma, 1932. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Lastre flessibili di marmo trovate nella nave imperiale di Nemi. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXIV, pp. 85-86). Roma, 1931. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Quaternario marino presso Anzio (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXIV, pp. 87-91). Roma, 1931. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Osservazioni sopra costruzioni marittime e la geologia (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica italiana ». Vol. XLIX, 1930, pp. 229-230). Roma, 1931. 8°.

- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Roma e Lazio: geologia applicata all'agrarìa. (Estr. dagli « Atti del II° Congresso Nazionale di Studi Romani »). Roma, 1931. 8°, pp. 1-6.
- DE ANGELIS D'OSSAT. — Catasto delle acque dell'Agro romano Valle del Galera. (Estr. dai « Nuovi Annali dell'Agricoltura ». Anno XI, pp. 497-540). Roma, 1931. 8°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Roma e Lazio: materiali da costruzione e da ornamento. (Estr. dagli « Atti del II° Congresso Nazionale di Studi Romani »). Roma, 1931. 8°, pp. 1-8.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Rocce adoperate nella cupola del Pantheon. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXIII, pp. 211-215). Roma, 1930. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Physikalische Grundbegriffe in der Bodenkunde. (Sonderabdr. aus « Die Ernährung der Pflanze » Jahrgang XXVI, Heft 24, ss. 549-572). Berlin, 1930. 4°.
- GE ANGELIS D'OSSAT G. — Geologia nostra. Discorso inaugurale del presidente alla XLIII riunione estiva della Società Geologica Italiana. Roma 22-27 settembre 1930. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XLIX). Roma, 1930. 8°, pp. 1-10.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Catasto delle acque dell'Agro romano Valle dell'Arnone. (Estr. dai « Nuovi Annali dell'Agricoltura ». Anno X, pp. 43-82). Roma, 1930. 8°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Ancora per un più grande ufficio geologico. (Estr. dalla Rivista mensile illustrata « La Miniera Italiana ». n. 6. 1931). Roma, 1931. 4°, pp. 1-2.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — La geologia e catacombe romane. (Estr. dalle « Memorie della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Vol. XV, pp. 529-573). Roma, 1931. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Sulla presenza dell'Alìos nella zona litoranea romana. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXIII, pp. 99-103). Roma, 1930. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — I materiali da costruzione dell'Umbria. (Estr. da « L'industria Mineraria ». Anno I, n. IX-X. 1927). Roma, s. d. 4°, pp. 1-3.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Per un più grande ufficio geologico (Estr. dalla Rivista mensile illustrata « La Miniera Italiana ». N° 12. 1930). Roma, 1930. 4°, pp. 1-3.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Die landwirtschaftlichen Boden Italiens. (Sonderabdr. aus « Die Ernährung der Pflanze ». Jahr XXIV. Nr. 17, pp. 329-344). Berlin, 1928. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Sul valore cronologico del cranio umano fossile scoperto presso Roma. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XLIX, pp. xxxiii-xxxvi). s. d. t. 8°.
- FOWLER HENRY W. — The fishes obtained by the Pinchot South Seas Expedition of 1929, with description of one new genus and three new species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 80). Washington, 1932. 8°, pp. 1-16.
- HOUGH WALTER. — The Buffalo motive in middle Celebes decorative design (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1932. 8°, pp. 1-8.
- LAM H. J. — Miangas (Palmas). Scattered Annotations. Batavia, 1932. 8°, pp. 1-66.
- LUMIÈRE AUGUSTE. — Sénilité et Rajeunissement. Avec 24 figures intercalées dans le texte. (Actualités scientifiques et industrielles) Paris. Librairie J. B. Baillière et Fils, 1932. 8°, pp. 1-160.
- MARCOLONGO ROBERTO. — La meccanica di Leonardo da Vinci. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli ». Vol. XIX. Serie 2°, n. 2). Napoli, 1932. 4°, pp. 1-148.
- OSBORN HENRY FAIRFIELD. — Fifty-two years of research, observation and publication 1877-1929. A life adventure in breadth and depth. Edited by Florence Milligan. With complete Bibliography, Chronologie and classified by Subject 1877-1920. New York, Charles Scribner's Sons, 1930. 8°, pp. 1-XI, 1-160.

PAYNE CECILIA H. — Edward Skinner King. 1861-1931. (Reprinted from «Popular Astronomy», Vol. XL, n. 2, pp. 65-68), s. l. 1932. 8°.

SILVESTRI F. — Spedizione scientifica all'oasi di Cufra (marzo-luglio 1931) Tisanuri. (Estr. dagli «Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova»). Vol. LV, pp. 293-301. Genova, 1932. 8°.

SILVESTRI F. — Descripción de cinco nuevas Campodea (Thys.) de Marruecos (Public. en el «Boletín de la Sociedad Española de Historia Natural». Tomo XXXII, pp. 75-87). Madrid, 1932. 8°.

La Società Geologica italiana e lo studio della Valle dell'Aniene. (Estr. da: «L'Industria Mineraria», n. X-XI. 1930). Roma, 1930. 4°, pp. 1-6.

N. P.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Fascicolo del 15 maggio 1932 (Anno X)*

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Meccanica.** — *Sulle leggi di forza centrale corrispondenti ad assegnate traiettorie e sopra un caso particolare notevole. Nota* <sup>(1)</sup> **del Corrisp. V. NOBILE.**

L'accenno, occasionalmente fatto in questi « Rendiconti » <sup>(2)</sup>, ad un problema posto e risoluto dal sig. Sakellariou (determinare la più generale legge di forza centrale dipendente dalla distanza e dalla velocità che dia per traiettorie le coniche del piano aventi un fuoco nel centro attraente) e le successive considerazioni del prof. Levi-Civita <sup>(3)</sup> colle quali vien chiarito e giustificato il procedimento del Sakellariou mi offrono l'opportunità per alcune osservazioni sull'argomento che credo non inutile esporre qui brevemente. La questione viene a ricollegarsi a taluni concetti generali — per quanto elementari — per cui si ha non solo il vantaggio di poter passare facilmente ad interessanti estensioni ma ancora quello di rimanere al coperto dal pericolo di certi fraintendimenti nei quali è caduto in passato qualche autore.

Il problema qui considerato, che comprende come caso particolare quello del Sakellariou, può enunciarsi così:

*Data una famiglia di curve mediante una equazione polare contenente k parametri*

$$(1) \quad f(r, \theta; a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$$

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) N. SAKELLARIOU, *Sur une classe de mouvements centrales*; questi « Rendiconti », vol. XII, fasc. 10.

(3) T. LEVI-CIVITA, *A proposito delle Note dei sig.ri Hatzidakis e Sakellariou sui moti centrali*; questi « Rendiconti », vol. XIII, fasc. 10.

determinare la più generale legge di forza centrale (con intensità funzione del punto e del vettore velocità) a cui corrispondano come traiettorie le linee date.

Esso equivale a ricercare le condizioni che deve presentare una funzione  $R(r, \theta, r', \theta')$  - dove sono indicate con accenti le derivazioni rispetto al tempo - perchè lungo una generica traiettoria (1) sia verificata l'equazione

$$(2) \quad r'' = R + r\theta'^2$$

sussistendo inoltre, per ogni moto particolare, l'altra relazione  $(r^2\theta')' = 0$ .

Tale problema è, naturalmente, da intendersi nel senso che debbano aversi traiettorie di quella famiglia quali che siano le circostanze iniziali del moto (sempre che l'equazione delle linee stesse non limiti l'arbitrarietà della scelta come accade per  $k = 1$ ) e che inoltre nella espressione della funzione  $R(P, v)$  a cui si deve pervenire possano figurare, oltre alle quattro variabili  $r, \theta, r', \theta'$  considerate come indipendenti, solo costanti *assolute*, cioè quantità le quali *conservino gli stessi valori numerici in tutti i movimenti particolari ai quali la forza centrale  $R$  può dar luogo*. Una espressione di  $R$  che contenesse i parametri  $a_i$  e la costante delle aree e nella quale si attribuissero a tali parametri valori fissi sarebbe valida solo per punti appartenenti alla particolare traiettoria e nel particolare stato cinetico che a quei valori corrispondono. Una siffatta espressione potrebbe, insomma, essere considerata come definitiva solo a condizione di riguardare in essa le  $a_i$  e la costante delle aree  $c$  come funzioni di  $r, \theta, r', \theta'$  definite dalla (1) e dalle relazioni che da questa si ottengono con derivazioni successive rispetto al tempo. Tali operazioni portano in generale (cioè per  $k$  qualunque) ad introdurre le derivate totali della  $R$  rispetto al tempo e pertanto le derivate parziali della funzione stessa rispetto alle variabili  $r, \theta, r', \theta'$ : si è condotti così non alla espressione esplicita o implicita della  $R$  ma ad una equazione alle derivate parziali che tale funzione deve verificare e ciò attraverso un procedimento che essenzialmente tende alla eliminazione delle  $a_i$ .

Tale procedimento è molto ovvio. Alla equazione (1) si aggregheranno le altre  $k$  che si ottengono da quella derivandola  $k$  volte rispetto al tempo, in modo da potersi eliminare fra le  $k + 1$  equazioni delle quali si dispone i parametri  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Si otterrà così una equazione risultante

$$(3) \quad \Phi[r, r', r'', \dots, r^{(k)}; \theta, \theta', \theta'', \dots, \theta^{(k)}] = 0$$

che bisognerà trasformare in modo che vi compaiano soltanto le variabili  $r, \theta, r', \theta'$  e inoltre la  $R$  ed eventualmente le derivate parziali di essa rispetto alle variabili anzidette. Se  $k = 2$  le relazioni

$$(4) \quad r'' = R + r\theta'^2, \quad \theta'' = -\frac{2r'}{r}\theta',$$

permettono di dare alla (3) la forma

$$F(R, r, r', \theta, \theta') = 0;$$

cosicchè la determinazione della  $R$  richiede, in tal caso, solo operazioni algebriche e derivazioni.

Se è  $k > 2$  bisognerà tener conto, oltre che delle (4), delle altre  $k - 2$  coppie di relazioni che da quelle si deducono con derivazioni successive rispetto al tempo. Mediante le relazioni così ottenute si esprimeranno, come facilmente si vede, le derivate  $r^{(i)}$  e  $\theta^{(i)}$ ;  $r$  funzione delle variabili  $r, \theta, r', \theta'$  e delle derivate parziali della  $R$  rispetto alle medesime variabili fino all'ordine  $k - 2$ : si perverrà così, in ultima analisi, ad una equazione alle derivate parziali dell'ordine  $k - 2$ .

Ci occuperemo qui del caso  $k = 3$ , che più specialmente ci interessa ed a cui corrisponde una equazione alle derivate parziali del primo ordine, e in particolare di quello in cui le traiettorie sono le coniche del piano con un fuoco in comune (coincidente col centro d'attrazione). Dalla equazione di tali curve

$$(5) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$$

risultano, derivando rispetto al tempo, le relazioni <sup>(1)</sup>

$$(6) \quad r' = \frac{e}{p} (r^2 \theta') \sin(\theta - \alpha) \quad , \quad r'' = \frac{e}{p} r^2 \theta'^2 \cos(\theta - \alpha).$$

Eliminando la costante  $e/p$  fra la seconda e la terza oppure la  $\alpha$  fra la prima e la terza si è condotti per la  $r''$  all'una o all'altra delle due espressioni

$$r'' = r' \theta' \cot(\theta - \alpha) \quad , \quad r'' = r^2 \theta'^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)$$

alle quali corrispondono rispettivamente per la  $R$  le due

$$(7) \quad R = r' \theta' \cot(\theta - \alpha) - r \theta'^2 \quad , \quad R = - \frac{r^2 \theta'^2}{p}$$

contenenti ciascuna un solo parametro, equivalenti entrambe all'altra  $-c^2/p r^2$  e deducibili anche dalla formula di Binet. Esse mostrano che una qualunque legge di forza  $R(r, \theta, r', \theta')$  che dia per traiettorie le (5) deve essere *riducibile* alla forma  $\lambda/r^2$  o, se si vuole, alle altre, nella intesa, naturalmente, che le *costanti* che figurano in quelle espressioni sono tali solo *sulle singole*

(1) Scriviamo a parte, in parentesi, il fattore  $r^2 \theta'$ , per significare che esso deve esser considerato come costante nelle derivazioni rispetto al tempo.

*traiettorie*, ciò che non permette<sup>(1)</sup> — è molto chiaro ma giova ripeterlo a scasso di malintesi non infrequenti — di dedurre che l'unica funzione  $R$  rispondente al problema sia quella che esprime la legge newtoniana ( $\lambda$  identica per tutte le *traiettorie*).

Le stesse considerazioni valgono evidentemente per quelle espressioni di  $R$  che si ottenessero da una di quelle innanzi trovate col particolarizzare il valore numerico del parametro che in ciascuna di esse ancora figura. Tali espressioni, le quali corrisponderebbero a famiglie a *due* parametri comprese nella (5), non possono neppure considerarsi definitive, sebbene non vi figuri più alcun parametro: esse sono, come le (7), valide solo sulle corrispondenti *traiettorie* e ad esse sono riducibili, sulle linee medesime, tutte le altre infinite leggi di forza che danno le *traiettorie* della famiglia a tre parametri, però, come si vedrà più innanzi, con conveniente determinazione della velocità iniziale.

Ciò spiega la apparente anomalia per cui, mentre per  $k = 2$  si trova una sola forza rispondente al problema, per  $k = 3$  se ne hanno *infinite*: tutte queste infinite forze possono dare anch'esse le *traiettorie* della famiglia a due parametri, ma il procedimento algebrico applicabile per  $k = 2$  non vale a distinguerle perchè dà solo l'unica espressione a cui tutte si riducono sulle particolari linee considerate.

Per la formazione della equazione alle derivate parziali da cui dipende la  $R$  basta derivare totalmente rispetto al tempo la seconda delle (7) e sostituire nei due membri al posto di  $r''$  e  $\theta''$  le espressioni (4), ciò che equivale a considerare variazioni che hanno luogo nel movimento reale lungo una *traiettoria* (qualunque). Si ha allora

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{(r^2\theta')}{p} \cdot \theta'' = \frac{2r'}{r} \cdot \frac{r^2\theta'^2}{p}$$

e quindi

$$(8) \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{2r'}{r} R$$

(1) Nel caso della natura è solo la introduzione di una legge di osservazione (3ª di Keplero) che rende lecito affermare l'invariabilità di  $c^2/p$  in tutti i possibili movimenti e quindi di prescegliere fra le *infinite* leggi di forza atte a dare le *traiettorie* assegnate la newtoniana.

Qualora si voglia pervenire a quest'ultima senza fare uso della terza di Keplero bisogna supporre *a priori*, come nel seguito della presente Nota si vedrà, che  $R$  dipenda dalla sola posizione.

La espressione  $c^2/pr^2$  e le (7) a questa equivalenti possono bene, malgrado la limitata validità, servire a risolvere i problemi del moto lungo le *traiettorie* considerate (problema dei due corpi), ma nessuna di esse avrebbe alcun valore di fronte a problemi più complessi o comunque diversi della meccanica celeste.

e quest'ultima può scriversi, tenendo conto delle (4),

$$(8') \quad \frac{\partial R}{\partial r} r' + \frac{\partial R}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial R}{\partial r'} (R + r\theta'^2) - \frac{2r'\theta'}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta'} = -\frac{2r'}{r} R.$$

Conviene però separare nella velocità l'elemento scalare da quello vettoriale: l'equazione che così si ottiene include allora senz'altro quella relativa al caso trattato dal sig. Sakellariou. Indicando con  $v$  il modulo di  $\mathbf{v}$  e con  $\omega$  l'angolo del raggio vettore colla tangente, si ha

$$(9) \quad r' = v \cos \omega, \quad r\theta' = v \sin \omega$$

e la equazione (8) prende, colle nuove variabili, la forma

$$(10) \quad v \left( \cos \omega \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\sin \omega}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial R}{\partial r'} v' + \frac{\partial R}{\partial \omega} \omega' = -\frac{2v \cos \omega}{r} R.$$

In quanto alle espressioni di  $v'$  e  $\omega'$  esse si possono dedurre dalle (9), ma la  $v'$  è data subito da una delle equazioni intrinseche del moto:  $v' = R \cos \omega$  e per la  $\omega'$  si può derivare rispetto al tempo la relazione

$$\cot \omega = \frac{r'}{r\theta'} = \frac{rr'}{r^2 \theta'}$$

e si ha successivamente, tenendo presenti le (4) e le (9),

$$\omega' = -\frac{\sin^2 \omega}{(r^2 \theta')} (r'^2 + rr'') = -\frac{\sin \omega}{vr} (Rr + v^2).$$

La (10) si trasforma pertanto con breve calcolo nella seguente

$$(11) \quad \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{v} \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{2R}{r} + \frac{\operatorname{tg} \omega}{r} \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{Rr + v^2}{v^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) = 0$$

che è l'equazione cercata. Essa include in particolare (quando si supponga  $R$  funzione di  $r$  e  $v$  soltanto) quella che il prof. Levi-Civita ha ritrovata nella Nota già citata, dopo una lieve rettifica al calcolo del Sakellariou e con altro procedimento. Per la integrazione si è condotti, secondo i metodi noti, a sostituire alla equazione trovata quella omogenea

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{R}{v} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\operatorname{tg} \omega}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{Rr + v^2}{v^2} \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) - \frac{2R}{r} \frac{\partial f}{\partial R} = 0.$$

Il sistema differenziale delle caratteristiche

$$(13) \quad dr = \frac{v dv}{R} = \frac{r d\theta}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{-v^2 r d\omega}{(Rr + v^2) \operatorname{tg} \omega} = \frac{-r dR}{2R}$$



presenta le tre combinazioni integrabili

$$r dR + 2 R dr = 0$$

$$v dv + r dR + R dr = 0$$

$$\cot \omega d\omega = - \left( \frac{R}{v^2} + \frac{1}{r} \right) dr = - \frac{dv}{v} - \frac{dr}{r},$$

donde i tre integrali

$$(14) \quad Rr^2 = c_1, \quad v^2 + 2 Rr = c_2, \quad vr \sin \omega = c_3$$

mediante i quali si ottiene il quarto con una quadratura. Basta nella relazione

$$d\theta = \operatorname{tg} \omega \frac{dr}{r}$$

esprimere  $\omega$  in funzione di  $r$  tenendo conto delle (14): si ha con facile calcolo, detta  $c_4$  una nuova costante,

$$\theta - \varphi = c_4,$$

avendo posto

$$(15) \quad \varphi = c_3 \int \frac{dr}{r \sqrt{c_2 r^2 - 2 c_1 r - c_3^2}}.$$

L'integrale generale della (11) sarà pertanto dato da una funzione  $R(r, \theta, v, \omega)$  che verifichi la relazione implicita

$$(16) \quad \Phi(Rr^2, v^2 + 2 Rr, vr \sin \omega, \theta - \varphi) = 0,$$

essendo  $\Phi$  una funzione arbitraria e intendendosi, naturalmente, che, eseguita la quadratura elementare (15), si siano sostituiti nella espressione della  $\varphi$  alle  $c_1, c_2, c_3$  i primi membri delle (14). La coordinata  $\theta$  ove si voglia che figurì nella  $R$  vi rimane dunque inscindibilmente collegata alle tre altre variabili  $r, v, \omega$ .

È ben facile accertarsi che alle leggi di forza così trovate corrispondono necessariamente traiettorie appartenenti alla famiglia (5). Vale a tal fine una considerazione molto semplice che sostanzialmente coincide con quella fatta dal prof. Levi-Civita nel caso del problema più ristretto trattato dal Sakellariou. Una funzione  $R(r, \theta, v, \omega)$  che rientri nella categoria (16) deve verificare l'equazione (11) e pertanto la (10) e la (8). In quest'ultima è da considerare la  $r$  come una funzione ben definita del tempo, funzione che non può essere diversa da quella che lega  $r$  e  $t$  nel moto lungo una delle traiettorie determinate dalla forza centrale  $R$  che si considera, perchè dalla (11) non si passa alla (8) se non pel tramite delle equazioni del moto. Essa è dunque integrabile immediatamente come una

equazione differenziale ordinaria e conduce, colla sostituzione di  $r$  a  $t$  come variabile indipendente, alla relazione già nota  $R = \lambda/r^2$ , valida solo lungo la traiettoria corrispondente ad un assegnato valore di  $\lambda$ .

Ma la variabilità di  $\lambda$  da una traiettoria all'altra non toglie che l'espressione trovata possa eguagliarsi a quella della forza nella formola di Binet allo scopo di determinare le equazioni finite delle linee in questione: si otterrà così l'equazione differenziale

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{c^2} = \mu$$

il cui integrale generale contiene due altri parametri oltre  $\lambda$  ed è immediatamente riducibile alla forma (5).

Per la determinazione delle circostanze iniziali che danno le singole traiettorie, si noti — e ciò vale anche per altre forme della equazione (1) — sempre che sia  $k = 3$  — che le tre relazioni

$$f(r, \theta \parallel a_i) = 0 \quad , \quad \frac{df}{dt} = f_1(r, \theta, r', \theta' \parallel a_i) = 0 \quad , \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = f_2(r, \theta, r', \theta' \parallel a_i) = 0$$

( $i = 1, 2, 3$ )

(dove nella  $f_2$  si sono sostituiti al posto di  $r''$ ,  $\theta''$  i valori (4) e introdotta la particolare funzione  $R$  considerata) permettono in generale, dati comunque  $a_1, a_2, a_3$ , di fissare le condizioni iniziali del moto. Scelta come iniziale la posizione individuata da una arbitraria soluzione della prima equazione, i valori cercati di  $r'$  e  $\theta'$  si hanno dalla risoluzione del sistema

$$f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0$$

che, nel caso speciale delle traiettorie (5), può scriversi

$$f_1 = r' - \frac{e}{p} (r^2 \theta') \sin(\theta - \alpha) = 0$$

$$f_2 = R + r \theta'^2 - \frac{e}{p} r^2 \theta'^2 \cos(\theta - \alpha) = 0 \quad ,$$

e conduce, dopo la immediata eliminazione di  $\theta'$ , ad una equazione ordinaria in  $r'$ .

La relazione (16) dà luogo a qualche rilievo, interessante ai fini dell'astronomia, sulle leggi di forza centrale atte a dare le traiettorie (5) ed è opportuno al riguardo un esplicito cenno.

a) In primo luogo si vede che non possono aversi forze dipendenti dalle due coordinate e neanche dalla sola  $\theta$  senza che dipendano anche<sup>(1)</sup>

(1) La dipendenza è effettiva, perchè, sostituendo nella espressione finita della  $\varphi$

$$\varphi = - \text{arc sen} \frac{c_1 r + c_3^2}{r \sqrt{c_1^2 + c_2^2 c_3^2}}$$

a  $c_1, c_2, c_3$  i valori dati dalle (14), si vede che non risulta eliminata nè la  $v$  nè la  $\omega$ .

dalla velocità (grandezza e direzione). Ciò si deduce dal fatto che  $\theta$  è inseparabile da  $v, r, \omega$ , come è stato innanzi osservato;

b) Di forze centrali rispondenti al problema e dipendenti dalla sola posizione non v'è altra che la newtoniana. Ciò mostra che *è teoricamente non necessaria la terza legge di Keplero per risalire alla legge di gravitazione*, a condizione però di ammettere *a priori* la dipendenza della intensità della forza dalla sola posizione del pianeta e di attenersi a considerazioni del genere <sup>(1)</sup> di quelle qui esposte;

c) Esistono invece infinite leggi di forza centrale dipendenti dalla distanza e dalla velocità (grandezza e direzione) rispondenti al problema: esse includono quelle corrispondenti al caso considerato dal Sakellariou.

**Fisica.** — *Integrazione asintotica dell'equazione differenziale di Thomas-Fermi.* Nota <sup>(2)</sup> del Socio A. SOMMERFELD.

Si sa, ed è facile di verificare, che l'equazione differenziale <sup>(3)</sup>

$$(1) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}}$$

la quale, secondo la statistica di Fermi, regola il potenziale e la densità degli elettroni all'interno di un atomo, (di numero atomico abbastanza elevato) ha una particolare soluzione esatta, cioè

$$(2) \quad \varphi = \frac{12^2}{x^3}.$$

Essa soddisfa bensì la condizione

$$(3) \quad \varphi = 0 \quad \text{per} \quad x = \infty$$

(1) Se si immagina R funzione delle sole coordinate  $r, \theta$  la equazione (11) si riduce a

$$\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2R}{r} + \frac{\text{tg } \omega}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

e questa, dovendo sussistere per ogni posizione indipendentemente da  $\omega$ , si scinde nelle due

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2R}{r} = 0$$

le quali caratterizzano la legge newtoniana.

(2) Presentata nella seduta del 1° maggio 1932.

(3) L. H. THOMAS, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 23, p. 542, novembre 1924; E. FERMI, «Zeits. f. Phys.», 48, p. 73, febbraio 1928.

che si deve porre per l'atomo neutro, ma non la condizione al contorno

$$(4) \quad \varphi = 1 \quad \text{per} \quad x = 0.$$

La soluzione (2) può dunque, nella migliore delle ipotesi, essere usata per la descrizione asintotica dell'atomo statistico. Ma essa, come risulta dal confronto con la tabella calcolata da Fermi, è in qualche modo soddisfacente solo per valori estremamente elevati di  $x$ . Noi ci proponiamo perciò di calcolare una più precisa approssimazione asintotica.

È comodo eseguire dapprima la trasformazione

$$(5) \quad x = \frac{1}{y}, \quad \varphi = \frac{\psi}{y}.$$

L'equazione (1) si trasforma così in

$$(6) \quad y^4 \frac{d^2 \psi}{dy^2} = \psi^{3/2}.$$

Dalla (2) risulta

$$(7) \quad \psi = 12^2 y^4.$$

Noi correggiamo questa equazione, che è già un integrale particolare esatto, ponendo

$$(8) \quad \psi = 12^2 y^4 (1 + By^\lambda + \dots).$$

Questa, sostituita nella (6) dà la condizione

$$12^3 y^6 \left[ 1 + \frac{B}{12} (4 + \lambda) (3 + \lambda) y^\lambda + \dots \right] = 12^3 y^6 \left( 1 + \frac{3}{2} By^\lambda + \dots \right).$$

Per soddisfare questa condizione è necessario e sufficiente porre

$$(9) \quad (4 + \lambda) (3 + \lambda) = 18, \quad \lambda^2 + 7\lambda = 6.$$

Troviamo dunque per  $\lambda$  una equazione di secondo grado con le due radici

$$(10) \quad \lambda = \frac{-7 + \sqrt{73}}{2} = 0.772, \quad \lambda_1 = \frac{-7 - \sqrt{73}}{2} = -7.772.$$

Solo la prima di queste radici, essendo positiva, può essere usata per la nostra posizione (8). La costante  $B$  resta indeterminata.

Ricorriamo ora al seguente artificio fondamentale, scrivendo invece di (8)

$$(11) \quad \psi = 12^2 y^4 (1 + Cy^\lambda)^n,$$

che per  $y$  piccola equivale evidentemente alla (8). Possiamo servirci ora

delle due grandezze  $C$  e  $n$  a nostra disposizione per soddisfare la condizione limite

$$\varphi = 1 \quad \text{per} \quad x = 0$$

cioè, nelle nostre nuove variabili

$$\psi = y \quad \text{per} \quad y = \infty.$$

Raggiungiamo lo scopo portando fuori della parentesi il termine  $Cy^\lambda$

$$(12) \quad y^{-3} = 12^2 C^n y^{\lambda n} (1 + \dots)$$

cioè  $\lambda n = -3$ ,  $C = 12^{2/3\lambda}$ .

Secondo la (9) è  $\lambda\lambda_1 = -6$ , dunque  $\frac{-3}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{2}$ .

Tenendo conto di ciò segue dalla (11)

$$(13) \quad \psi = 12^2 y^4 [1 + (12^{2/3} y)^\lambda]^{\frac{\lambda_1}{2}}$$

o anche, tenendo conto della (5)

$$(14) \quad \varphi = \frac{12^2}{x^3} \left[ 1 + \left( \frac{12^{2/3}}{x} \right)^\lambda \right]^{\frac{\lambda_1}{2}}.$$

Per valori della  $x$  estremamente grandi questa si trasforma nella (2).

Con « valori estremamente grandi » si intendono qui quelli per i quali

$$x \gg 12^{2/3} = 5.241, \text{ e non solo } x \gg 1.$$

In fine possiamo scrivere più semplicemente al posto della (14), portando fuori il secondo termine della parentesi e tenendo conto di nuovo di  $\lambda\lambda_1 = -6$

$$(15) \quad \varphi = \frac{1}{(1 + \chi)} |\lambda_1|/2, \quad \chi = \left( \frac{x}{12^{2/3}} \right)^\lambda \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0.772 \\ |\lambda_1| = 7.772. \end{array} \right.$$

Sul grado di approssimazione ci orienta la seguente tabella

$x$	$\chi$	Eq. (2)	Eq. (15)	Fermi (1)
100	9.712	0.00014	0.00010	0.00010
30	3.846	0.00533	.0022	.0022
20	2.805	0.018	.0056	.0056
10	1.684	0.114	.0228	.024
5	0.964	1.152	.072	.079

(1) I numeri calcolati da FERMI (Leipziger Vorträge 1928) coincidono completamente coi risultati ottenuti da BUSH e CALDWELL (« Phys. Rev. », 38, 1898, 1931) per mezzo di un interessante apparecchio per integrazioni.



La nostra rappresentazione approssimata diventa insufficiente, come era da aspettarsi, quando  $x$  si avvicina al valore  $5 \cong 12^{2/3}$ , cioè quando  $z$  si approssima al valore 1; la divergenza raggiunge allora già circa il 100/0. La formula asintotica originaria (2) è per contro ancora insufficiente anche per  $x = 100$ . Per  $x = 0$  la nostra approssimazione (15) conduce bensì al valore esatto  $\varphi = 1$ , ma con falsa tangente. Mentre cioè la giusta inclinazione è

$$\frac{d\varphi}{dx} = -1.589$$

(cfr. per es. E. B. Baker) la nostra rappresentazione (15) dà

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dx} = -\infty$$

perchè

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{|\lambda_1|}{2}, \quad \frac{dz}{dx} \sim x^{\lambda-1} = \infty \text{ per } x = 0$$

Questa è la principale divergenza della nostra soluzione approssimativa dalla esatta; essa si spiega perchè la nostra approssimazione aveva solo validità asintotica e, per così dire, era stata forzatamente adattata al punto  $x = 0$ ,  $\varphi = 1$ .

L'equazione (15) ha dato buoni risultati nel calcolo della diffusione di elettroni (non troppo lenti) da parte di atomi di mercurio. Questo problema è trattato da W. Henneberg. Egli si è servito in ciò, secondo il consiglio di H. Bethe, del procedimento di Wentzel-Brillouin, con i perfezionamenti di Kramers. Egli ha potuto determinare la differenza di fase  $\delta_l$  tra la  $l$ -esima onda parziale incidente e diffusa, per mezzo di un integrale che si può eseguire con sufficiente approssimazione, prendendo  $\varphi$  come variabile indipendente e esprimendo  $x$  (che è proporzionale alla distanza  $r$  dal nucleo) per mezzo della (15) in funzione di  $\varphi$ . Risulta ( $Z$  = numero atomico)

$$\delta_l = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Z}{\sqrt{E}} \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \varphi_0^{2/3}}}.$$

Dove  $\varphi_0$  è quel valore di  $\varphi$  che si ha nella posizione

$$r^2 = \frac{(l + 1/2)^2}{E}, \quad E = \text{energia degli elettroni incidenti}.$$

Conoscendo  $\delta_l$  si può, con note formule (1), calcolare con una somma rispetto ad  $l$  sia la distribuzione angolare degli elettroni diffusi, sia il raggio d'azione dell'atomo.

(1) ALLIS e MORSE « Zeits. f. Phys. », 70, 1931, « Gl. » (9) e (10), p. 572.

Desidero ancora notare che ho trovato la (15) dapprima col metodo indicato da R. Emden nel suo « Gaskugeln » e seguito da Thomas <sup>(1)</sup>; con questo la equazione differenziale originaria di secondo ordine (1) si riduce a una equazione differenziale di primo ordine, e quest'ultima viene integrata approssimativamente. La nostra equazione di secondo grado (9) risulta con ciò come equazione caratteristica in un punto singolare di questa equazione differenziale.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Le formule di Saint-Venant per le varietà  $V_n$  a curvatura costante.* Nota di GIACINTA ANDRUETTO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota pubblicata recentemente in questi « Rendiconti » <sup>(3)</sup> ho esposto un procedimento molto semplice, per ottenere le formule di Saint-Venant per una varietà qualsiasi, a tre dimensioni.

Mi propongo ora, in questa breve Nota, di risolvere l'analoga questione per il caso di una varietà  $V_n$  ad  $n$  dimensioni, supponendo che abbia una curvatura riemanniana *costante*. Tale questione è stata iniziata dal Ricci <sup>(4)</sup> ed ultimata dal Palatini <sup>(5)</sup>. Questi Autori adoperano i metodi del calcolo differenziale assoluto, mentre invece io adopero, come già nella mia Nota sopra citata, i metodi vettoriali moderni, che conducono in modo più semplice e rapido al risultato.

I. Sia  $V_n$  una varietà qualunque ad  $n$  dimensioni e supponiamo che ogni suo punto P subisca un determinato spostamento infinitesimo, tangente alla  $V_n$ : cioè supponiamo che la varietà subisca, come si suole dire, una *deformazione infinitesima*. Se  $\mathbf{s}$  è il vettore (infinitesimo) che rappresenta lo spostamento subito dal punto P, l'omografia:

$$(1) \quad \alpha = d_v \mathbf{s} / dP$$

si chiama *omografia di deformazione*. Il secondo membro è la derivata super-

(1) Loc. cit.

(2) Nella seduta del 15 maggio 1932.

(3) ANDRUETTO, *Le formule di Saint-Venant per gli spazi curvi a tre dimensioni* (questi « Rendiconti », vol. XV, I sem., 1932, X).

(4) RICCI, *Delle derivazioni covarianti e controvarianti* (Studi editi dall'Università di Padova, a. 1888).

(5) PALATINI, *Sulle quadriche di deformazione per gli spazi  $S_3$*  (« Atti R. Istituto Veneto », Tomo LXXVI, a. 1916-17).

ficiale di  $\mathbf{s}$ , ed il vettore  $d_v \mathbf{s}$  è il differenziale *superficiale* (nel senso di Boggio)<sup>(1)</sup> del vettore  $\mathbf{s}$ . La *dilatazione* dell'omografia  $\alpha$ , cioè

$$(2) \quad D\alpha = D(d_v \mathbf{s}/dP),$$

ha come quadrica *indicatrice* il luogo dei punti  $M$  che soddisfano alla equazione:

$$(3) \quad (M - O) \times D\alpha(M - O) = \text{cost.},$$

che dicesi anche *quadrica di deformazione*. È noto che, data una quadrica qualunque, questa non può assumersi come quadrica di deformazione, cioè in altri termini, data una qualunque dilatazione  $D\alpha$ , essa, in generale, non rappresenta una deformazione d'una varietà  $V_n$ ; affinché ciò avvenga deve essere soddisfatta una certa condizione, che ora stabiliremo.

Indicando con  $\xi$  ed  $\eta$  rispettivamente la dilatazione e l'assiale della omografia  $\alpha$ , cioè ponendo (*Geom. Diff.*, pag. 146):

$$\xi = D\alpha \quad , \quad \eta = A\alpha,$$

si ha:

$$(4) \quad \alpha = d_v \mathbf{s}/dP = \xi + \eta.$$

Considerando ora l'omografia (di secondo ordine)  $d_v \alpha/dP$  e chiamando  $\Re$  l'omografia (di terzo ordine) di Riemann relativa alla varietà  $V_n$ , sussiste la condizione di integrabilità espressa dalla formula seguente, del Prof. Boggio (*Geom. Diff.*, pag. 196):

$$k \frac{d_v \alpha}{dP} - \frac{d_v \alpha}{dP} = K k \Re \mathbf{s}.$$

Sostituendo qui ad  $\alpha$  il valore (4) possiamo ancora scrivere:

$$(5) \quad \frac{d_v \eta}{dP} - k \frac{d_v \eta}{dP} = k \frac{d_v \xi}{dP} - \frac{d_v \xi}{dP} - K k \Re \mathbf{s}.$$

2. Da questa equazione occorre anzitutto ricavare  $d_v \eta/dP$  in funzione della  $\xi$  e della  $\Re$ ; perciò applichiamo l'operatore  $K$  ai due membri della (5) e ricordando che

$$(6) \quad K\xi = \xi \quad , \quad K\eta = -\eta,$$

avremo:

$$(7) \quad -\frac{d_v \eta}{dP} - Kk \frac{d_v \eta}{dP} = Kk \frac{d_v \xi}{dP} - \frac{d_v \xi}{dP} - k \Re \mathbf{s}.$$

(1) BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria Differenziale*. Pag. 178 (Zanichelli, Bologna, 1930). In ciò che segue, indicheremo quest'opera con *Geom. Diff.*

Applicando poi l'operatore  $k$  ai due membri della (7), risulta:

$$(7') \quad -k \frac{d_v \eta}{dP} - kKk \frac{d_v \eta}{dP} = kKk \frac{d_v \xi}{dP} - k \frac{d_v \xi}{dP} - \Re s,$$

ma è noto (*Geom. Diff.*, pag. 152) che  $kKk = KkK$ , perciò si ha, badando alle (6):

$$\begin{aligned} kKk \frac{d_v \eta}{dP} &= KkK \frac{d_v \eta}{dP} = -Kk \frac{d_v \eta}{dP}, \\ kKk \frac{d_v \xi}{dP} &= KkK \frac{d_v \xi}{dP} = Kk \frac{d_v \xi}{dP}, \end{aligned}$$

quindi sostituendo nella (7'), risulta:

$$(8) \quad -k \frac{d_v \eta}{dP} + Kk \frac{d_v \eta}{dP} = Kk \frac{d_v \xi}{dP} - k \frac{d_v \xi}{dP} - \Re s.$$

Sottraendo dalla (5) la (7) e la (8), si deduce:

$$(9) \quad 2 \frac{d_v \eta}{dP} = 2k \frac{d_v \xi}{dP} - 2Kk \frac{d_v \xi}{dP} - Kk \Re s + k \Re s + \Re s;$$

ma, tenendo conto della proprietà ciclica della omografia di Riemann (*Geom. Diff.*, pag. 188) che può scriversi:

$$k \Re s - Kk \Re s = \Re s,$$

la precedente relazione diventa:

$$(10) \quad \frac{d_v \eta}{dP} = k \frac{d_v \xi}{dP} - Kk \frac{d_v \xi}{dP} + \Re s,$$

la quale sussiste per una  $V_n$  qualunque.

3. Supponiamo ora che la varietà  $V_n$  abbia la curvatura riemanniana costante  $c$ : allora è noto che (*Geom. Diff.*, pag. 202)  $\Re = c\xi_3$ , dove  $\xi_3$  è un'omografia di terz'ordine tale che qualunque siano i vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  si ha:

$$(11) \quad \xi_3 \mathbf{a} \mathbf{b} = H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - H(\mathbf{b}, \mathbf{a});$$

la (10) potrà allora scriversi:

$$\frac{d_v \eta}{dP} = (1 - K)k \frac{d_v \xi}{dP} + c\xi_3 s;$$

da questa relazione occorre eliminare la derivata di  $\eta$ , allo scopo di avere

una condizione nella sola  $\xi$ . A ciò si perviene facilmente, grazie ad un'altra condizione di integrabilità stabilita dal Prof. Boggio. Perciò prendiamo la derivata superficiale della precedente relazione ed avremo, badando alla (4):

$$\frac{d_v^2 \eta}{dP^2} = (1 - K) k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} + c \xi_3 \xi + c \xi_3 \eta,$$

da cui, applicando l'operatore  $k^*$  (*Geom. Diff.*, pag. 152):

$$k^* \frac{d_v^2 \eta}{dP^2} = k^* (1 - K) k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} + ck^* (\xi_3 \xi) + ck^* (\xi_3 \eta).$$

Sottraendo da questa uguaglianza la precedente ed applicando l'accennata condizione di integrabilità (*Geom. Diff.*, pag. 196) cioè:

$$k^* \frac{d_v^2 \alpha}{dP^2} - \frac{d_v^2 \alpha}{dP^2} = -K (K\alpha \cdot \mathfrak{H}) - \alpha \mathfrak{H},$$

risulta, ricordando che  $\mathfrak{H} = c\xi_3$ :

$$cK (\eta \xi_3) - c (\eta \xi_3) = (k^* - 1) (1 - K) k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} + \\ + c (k^* - 1) \xi_3 \xi + c (k^* - 1) \xi_3 \eta,$$

ossia:

$$(12) \quad (1 - k^*) (1 - K) k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} + c (1 - k^*) \xi_3 \xi = \\ = c \{ (k^* - 1) \xi_3 \eta + (1 - K) \eta \xi_3 \}.$$

Ora dimostreremo tra poco che il 2° membro è nullo, e perciò rimane:

$$(13) \quad (1 - k^*) \left\{ (1 - K) k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} + c \xi_3 \xi \right\} = 0;$$

questa è la relazione cercata, cioè è la condizione a cui deve soddisfare la dilatazione  $\xi = D\alpha$  affinchè la sua quadrica indicatrice possa assumersi come quadrica di deformazione della varietà  $V_n$  considerata.

4. Facciamo ora vedere che il secondo membro della (12) è nullo, cioè che ponendo:

$$\Phi = k^* (\xi_3 \eta) - \xi_3 \eta + \eta \xi_3 - K (\eta \xi_3)$$

si ha  $\Phi = 0$ .



Consideriamo a questo scopo tre vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  tangenti alla  $V_n$  in  $P$  ed avremo per la definizione degli operatori  $k^*$  e  $K$ :

$$\begin{aligned}\Phi \mathbf{abc} &= k^*(\xi_3, \eta) \mathbf{abc} - \xi_3 \eta \mathbf{abc} + \eta \xi_3 \mathbf{abc} - K(\eta \xi_3) \mathbf{abc} = \\ &= \xi_3 \eta \mathbf{bac} - \xi_3 \eta \mathbf{abc} + \eta \xi_3 \mathbf{abc} - K \xi_3 \mathbf{ab} \cdot K \eta \mathbf{c},\end{aligned}$$

od ancora, per la (11), e per la definizione della diade  $H$  (*Geom. Diff.*, pag. 147):

$$\begin{aligned}\Phi \mathbf{abc} &= \eta \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \eta \mathbf{b} - (\eta \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \eta \mathbf{a}) + \\ &+ \eta (\mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \times K \eta \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \times K \eta \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}).\end{aligned}$$

I termini del secondo membro si elidono evidentemente a due a due, perciò  $\Phi \mathbf{abc} = 0$  e per l'arbitrarietà di  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , si conclude  $\Phi = 0$ ; c. d. d.

5. Nel caso di una varietà  $V_3$  a tre dimensioni, la (13) può mettersi sotto una forma più semplice; chiamando infatti  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  due vettori tangenziali, la (13) sviluppata, porge:

$$\begin{aligned}&k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} \mathbf{ab} - k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} \mathbf{ba} - Kk \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} \mathbf{ab} + Kk \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} \mathbf{ba} + \\ &+ c(\xi_3 \xi \mathbf{ab} - \xi_3 \xi \mathbf{ba}) = 0;\end{aligned}$$

ma, introducendo il rotazionale superficiale di un'omografia, è facile stabilire che

$$k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} \mathbf{ab} - k \frac{d_v^2 \xi}{dP^2} \mathbf{ba} = k \frac{dK \text{ Rot}_v \xi}{dP} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),$$

inoltre, per la (11) e per formule note:

$$\xi_3 \xi \mathbf{ab} = H(\xi \mathbf{a}, \mathbf{b}) - H(\mathbf{b}, \xi \mathbf{a}) = (\xi \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge,$$

perciò si può scrivere:

$$\left( k \frac{d_v K \text{ Rot}_v \xi}{dP} - Kk \frac{d_v K \text{ Rot}_v \xi}{dP} \right) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = c(\mathbf{b} \wedge \xi \mathbf{a} - \mathbf{a} \wedge \xi \mathbf{b}) \wedge,$$

ove, il secondo membro vale anche  $c[(\xi - I_1 \xi)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})] \wedge$ .

Essendo i due membri omografie assiali, applicando l'operatore  $V$  risulta:

$$2 V k \frac{d_v K \text{ Rot}_v \xi}{dP} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = c(\xi - I_1 \xi)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b});$$

per l'arbitrarietà di  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , e per la definizione di  $\text{Rot}_v$ , si conclude infine:

$$\text{Rot}_v K \text{Rot}_v \xi = c (\xi - I_1 \xi),$$

che coincide con quella stabilita per tutt'altra via nella mia Nota citata in principio.

**Matematica.** — *Sulla teoria unitaria dello spazio fisico.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In varie Note pubblicate in questi « Rendiconti » <sup>(2)</sup>, il prof. Paolo Straneo stabilisce una teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità, che, costituendo una sintesi geometrica dei fenomeni fisici, si riduce alla teoria della gravitazione di Einstein nell'assenza di fenomeni elettrici. Partendo dall'ipotesi che la *connessione* dello spazio fisico debba essere *lineare*, circostanza in certa maniera imposta dalla stessa esperienza, il prof. Straneo adottò prima la connessione i cui parametri sono della forma

$$A) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + 2 \delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu}$$

o

$$A') \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + (\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} + \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu}) + (\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu}),$$

e più tardi (Nota IV) la connessione di parametri

$$C) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + (\delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \psi_{\mu}),$$

supponendo nulla la parte simmetrica di  $2 \delta_{\mu}^{\alpha} \psi_{\nu}$ .

Ambedue conducono allo stesso tensore di curvatura  $L_{\mu\nu\rho}^{\dots\alpha}$  ed alle medesime equazioni

$$B) \quad L_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} + 2 \left( \frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) = E_{\mu\nu}$$

che, nella teoria del prof. Straneo, esprimono la legge fondamentale unitaria, rappresentando il vettore  $(\psi_{\mu})$  il potenziale elettromagnetico.

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », vol. XIII, 1931, pp. 364-695-770; vol. XV, 1932, p. 77.

Nella sua ultima Nota il prof. Straneo opta per la connessione C) perchè questa gode della proprietà di essere una connessione metrica, poichè annulla il tensore

$$Q'_{ihl} = g_{hl/i}.$$

La connessione C) era stata considerata, con uguale intento, da Infeld, il quale si occupa di essa anche in una Nota recente <sup>(1)</sup>.

Oggetto di questa Nota è formulare alcune considerazioni sulla connessione C) e sopra altre che conducono ad equazioni del tipo B), d'una delle quali già l'autore ebbe ad occuparsi <sup>(2)</sup>.

2. Data una varietà  $X_n$  a  $n$  dimensioni, rappresentiamo <sup>(3)</sup> con  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  e  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  i parametri definitivi rispettivamente della connessione controvariante e covariante; con  $(A_\beta^\gamma)$  il tensore unità e con  $C_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma}$ ,  $S_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma}$ ,  $S'_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma}$ ,  $Q_\alpha^{\beta\gamma}$ ,  $Q'_{\alpha\beta\gamma}$  le componenti dei tensori caratteristici:

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} = A_{\beta/\alpha}^\gamma,$$

$$S_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma),$$

$$S'_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma\gamma})$$

$$Q_\alpha^{\beta\gamma} = g^{\beta\gamma}/_\alpha$$

$$Q'_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma/\alpha}.$$

I tensori  $(g_{\alpha\beta})$  e  $(g^{\alpha\beta})$  sono simmetrici, di rango  $n$  e soddisfano alla condizione

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = A_\alpha^\gamma.$$

Rappresentiamo ancora con  $(R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\delta})$  e  $(R'_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\delta\delta})$  i tensori di curvatura rispettivamente controvariante e covariante ed adottiamo per i tensori contratti le seguenti notazioni:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\delta\delta} = R_{\beta\gamma}^{\delta\delta} \quad ; \quad R'_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\delta\delta} = R_{\beta\gamma}^{\delta\delta}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\delta\delta} = V_{\alpha\beta}^{\delta\delta} \quad ; \quad R'_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\delta\delta} = V_{\alpha\beta}^{\delta\delta}.$$

(1) Ved. «Rendiconti», vol. XV, 1932, p. 157.

(2) *Proprietà di alcune connessioni lineari*, «Rendiconti», vol. XIII, p. 179.

(3) Adottiamo le notazioni del prof. SCHOUTEN, mutando  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma}$  in  $-\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma}$ .

Come si sa <sup>(1)</sup>, i parametri della connessione lineare hanno la forma

$$(3) \quad \begin{cases} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ & \lambda \end{smallmatrix} \right\} + T_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^{\prime\lambda} = - \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ & \lambda \end{smallmatrix} \right\} + T_{\alpha\gamma}^{\prime\cdot\lambda} \end{cases}$$

essendo

$$(4) \quad T_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} = C_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} - T_{\alpha\gamma}^{\prime\cdot\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha h} Q_{\gamma}^{\cdot h\lambda} + g_{\gamma k} Q_{\alpha}^{\cdot k\lambda} - g^{\lambda l} g_{\gamma k} g_{\alpha m} Q_i^{\cdot k m}) + \\ + S_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} - g^{\lambda m} (g_{\alpha k} S_{m\gamma}^{\cdot\cdot k} + g_{\gamma k} S_{m\alpha}^{\cdot\cdot k});$$

$$(5) \quad T_{\alpha\gamma}^{\prime\cdot\lambda} = \frac{1}{2} (Q'_{\gamma\alpha\beta} + Q'_{\alpha\gamma\beta} - Q'_{\beta\alpha\gamma}) g^{\beta\lambda} - \\ - S_{\beta\gamma}^{\prime\cdot\cdot k} g_{\alpha k} g^{\beta\lambda} - S_{\beta\alpha}^{\prime\cdot\cdot k} g_{\gamma k} g^{\beta\lambda} + S_{\alpha\gamma}^{\prime\cdot\cdot\lambda};$$

$$(6) \quad T_{[\alpha\gamma]}^{\cdot\cdot\lambda} = S_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} \quad ; \quad T_{[\alpha\gamma]}^{\prime\cdot\cdot\lambda} = S_{\alpha\gamma}^{\prime\cdot\cdot\lambda},$$

e si verificano anche le relazioni

$$(7) \quad Q'_{\mu\lambda\nu} = g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} Q_{\mu}^{\prime\alpha\beta} + 2 C_{\mu(\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} g_{\nu)\alpha} \quad (2).$$

a) Consideriamo la connessione C) del prof. Straneo. Siccome egli adotta (Nota IV, p. 80) la derivazione covariante con la forma

$$(8) \quad \nabla_{\nu} g_{\alpha\mu} = Q'_{\nu\alpha\mu} = \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - L_{\alpha\nu}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - L_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\alpha},$$

si sottintende, con le nostre notazioni,  $-L_{\alpha\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\prime\lambda}$  e perciò

$$(9) \quad T_{\alpha\nu}^{\prime\cdot\cdot\lambda} = A_{\nu}^{\lambda} \psi_{\alpha} - A_{\alpha}^{\lambda} \psi_{\nu}.$$

Ma questa connessione non è controvariante metrica <sup>(3)</sup>, cioè non annulla il tensore  $(Q'_{\nu\alpha\mu})$ . Infatti, sostituendo la espressione C) di  $L_{\mu\nu}^{\alpha}$  in (8), risulta

$$(10) \quad Q'_{\nu\alpha\mu} = \left[ \begin{smallmatrix} \alpha & \nu \\ & \mu \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ & \alpha \end{smallmatrix} \right] - g_{\lambda\mu} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \nu \\ & \lambda \end{smallmatrix} \right\} - g_{\lambda\alpha} \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ & \lambda \end{smallmatrix} \right\} - \\ - (A_{\alpha}^{\lambda} \psi_{\nu} - A_{\nu}^{\lambda} \psi_{\alpha}) g_{\lambda\mu} - (A_{\mu}^{\lambda} \psi_{\nu} - A_{\nu}^{\lambda} \psi_{\mu}) g_{\lambda\alpha} = \psi_{\alpha} g_{\nu\mu} - 2 \psi_{\nu} g_{\alpha\mu} + \psi_{\mu} g_{\nu\alpha}.$$

Così doveva essere, poichè, sostituendo in (5) il valore (9) di  $T_{\alpha\gamma}^{\prime\cdot\cdot\lambda}$  e te-

(1) Ved. J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Springer, 1924, p. 73.

(2) *Der Ricci-Kalkül*, p. 70.

(3) Adottiamo la nomenclatura del prof. SCHOUTEN, loc. cit.

nendo presente che, per la (6), è  $S'_{\alpha\gamma}{}^{\lambda} = T'_{\alpha\gamma}{}^{\lambda}$ , perchè  $(T'_{\alpha\gamma}{}^{\lambda})$  è emisimmetrico, deve essere

$$\frac{1}{2} (Q'_{\gamma\alpha\beta} + Q'_{\alpha\gamma\beta} - Q'_{\beta\alpha\gamma}) g^{\beta\lambda} = S'_{\beta\gamma}{}^k g^{\alpha k} g^{\beta\lambda} + S'_{\beta\alpha}{}^k g^{\gamma k} g^{\beta\lambda}$$

che, per le (6), (9) e (10) è di fatto una identità, come può facilmente verificarsi.

D'altra parte, perchè la connessione C) annullasse  $(Q'_{\alpha\beta\gamma})$ , dovrebbe essere, per le (5) e (6)

$$S'_{\beta\gamma}{}^k g^{\alpha k} g^{\beta\lambda} + S'_{\beta\alpha}{}^k g^{\gamma k} g^{\beta\lambda} = 0,$$

o

$$2\psi^{\lambda} g_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha} A_{\gamma}^{\lambda} + \psi_{\gamma} A_{\alpha}^{\lambda}.$$

Ponendo  $\lambda = \alpha$  e sommando, si ha

$$2\psi_{\gamma} = \psi_{\gamma} + n\psi_{\gamma}$$

o

$$(n - 1)\psi_{\gamma} = 0$$

e quindi  $(\psi_{\gamma}) = 0$  (escludendo il caso senza interesse di  $n = 1$ )<sup>(1)</sup>.

b) Supponiamo che la connessione sia *covariante e controvariante metrica*, che cioè sia

$$(Q_{\alpha}{}^{\beta\gamma}) = 0, \quad (Q'_{\alpha\beta\gamma}) = 0.$$

Per le (4) e (7) sarà

$$(C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) = 0; \quad T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -T'_{\alpha\beta}{}^{\gamma}; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = -\Gamma'_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.$$

Dei tensori caratteristici solo non si annullano possibilmente (se si annullassero la connessione sarebbe di Riemann) (S) e (S') che soddisfano l'egualianza

$$S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -S'_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.$$

Supponendo la connessione *emisimmetrica*, supponendo cioè

$$(11) \quad S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = S_{[\alpha} A_{\beta]}^{\gamma},$$

sarebbe, come è facile vedere

$$(12) \quad T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = S_{\alpha} A_{\beta}^{\gamma} - S^{\gamma} g_{\alpha\beta}$$

e la connessione lineare (3), corrispondente a questo valore di  $T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$  non conduce a un tensore ridotto di curvatura della forma B).

(1) Essendo  $(\psi_{\gamma}) = 0$ , la connessione C) sarebbe quella di Riemann.



Ciò dipende dal fatto che la forma B) del tensore ridotto del prof. Straneo non può corrispondere a una connessione lineare che sia *allo stesso tempo*, *covariante e controvariante metrica*:  $(Q) = 0$ ,  $(Q') = 0$ .

Potrà essa corrispondere a qualche connessione lineare, che sia *metrica* soltanto nella *covarianza* o nella *controvarianza*? È ciò che esamineremo.

c) Supponiamo che la connessione sia *invariante per incidenza*, *covariante simmetrica e controvariante metrica*, cioè che sia

$$(13) \quad C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = C_{\alpha} A_{\beta}^{\gamma} \quad ; \quad (S'_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}) = 0; \quad (Q'_{\alpha\beta\gamma}) = 0.$$

Per la (4) e (5) sarà

$$T'_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} = 0 \quad ; \quad T_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\lambda} = C_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\lambda}$$

e perciò

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \gamma \\ \lambda \end{array} \right\} + C_{\gamma} A_{\alpha}^{\lambda} \\ \Gamma'_{\alpha\gamma}{}^{\lambda} = - \left\{ \begin{array}{l} \alpha \gamma \\ \lambda \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

Sarà anche

$$R'_{\alpha\beta\gamma}{}^{\cdot\cdot\delta} = K_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\delta} = \{\gamma\delta, \alpha\beta\}$$

il tensore di Riemann-Christoffel; e siccome in questo caso (ved. articolo citato, dell'autore)

$$R_{\beta\gamma} = R'_{\beta\gamma} + 2 C_{[\gamma/\beta]},$$

avremo

$$(15) \quad R_{\beta\gamma} = K_{\beta\gamma} + 2 C_{[\gamma/\beta]}$$

essendo  $(K_{\beta\gamma})$  il tensore ridotto di  $(K_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\delta})$ . Od ancora

$$(16) \quad R_{\beta\gamma} = K_{\beta\gamma} + \left( \frac{\partial C_{\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial C_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right)$$

perchè i parametri  $\Gamma'_{\alpha\gamma}{}^{\lambda}$  del trasporto covariante sono simmetrici. E sarà anche

$$(17) \quad R = R_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma} = K_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma} = K.$$

D'altra parte, essendo in generale

$$C_{[\alpha\beta]}^{\cdot\cdot\gamma} = S_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\gamma} + S'_{\beta\alpha}{}^{\cdot\cdot\gamma}$$

avremo

$$(18) \quad S_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\gamma} = C_{[\alpha} A_{\beta]}^{\gamma}$$

cioè  $S_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\gamma}$  è della forma  $S_{[\alpha} A_{\beta]}^{\gamma}$ , dove  $S_{\alpha} = C_{\alpha}$  e la connessione è *controvariante emisimmetrica*.

Oltre a ciò, siccome è anche, in tutta la connessione invariante per incidenza <sup>(1)</sup>,

$$(19) \quad Q'_{\alpha\beta\gamma} = -g_{\beta h} g_{\gamma l} Q_{\alpha}{}^{hl} + 2 C_{\alpha} g_{\beta\gamma},$$

sarà nel presente caso, essendo nullo il tensore  $(Q'_{\alpha\beta\gamma})$ ,

$$(20) \quad Q_{\alpha\beta\gamma} = 2 C_{\alpha} g_{\beta\gamma};$$

cioè il tensore  $(Q_{\alpha\beta\gamma})$  è della forma  $Q_{\alpha} g_{\beta\gamma}$ , essendo  $Q_{\alpha} = 2 C_{\alpha}$ .

La connessione è *controvariante conforme*: anche in questo caso <sup>(2)</sup>

$$(21) \quad (V'_{\alpha\beta}) = 0$$

e la connessione sarà *covariante equiaffine* (*inhalstreu*).

Se è  $n = 4$ , vediamo che (per le formole (16) e (17)) la connessione così definita soddisfa a tutte le condizioni attribuite dal prof. Straneo alla struttura dello spazio fisico. Il vettore  $(\psi_{\mu})$ , che nella teoria rappresenta il potenziale elettromagnetico, è  $-\frac{1}{2}(C_{\mu})$  ed è perciò in rapporto col tensore  $(C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) = (A_{\beta/\alpha}^{\gamma})$ ; riassumendo, è

$$-2\psi_{\mu} = C_{\mu} = S_{\mu} = \frac{1}{2}Q_{\mu}.$$

Il tensore  $R_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}Rg_{\beta\gamma}$  è il tensore  $L_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}Lg_{\beta\gamma}$  del prof. Straneo.

d) Supponiamo ora che la connessione sia *invariante per incidenza*, *controvariante simmetrica e covariante metrica*, cioè che

$$(22) \quad C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = C_{\alpha} A_{\beta}^{\gamma} \quad ; \quad (S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) = 0 \quad ; \quad (Q_{\alpha}{}^{\beta\gamma}) = 0.$$

Per le (4) e (5) sarà

$$T_{\alpha\gamma}{}^{\lambda} = 0 \quad ; \quad T'_{\alpha\beta}{}^{\lambda} = C_{\gamma\alpha}{}^{\lambda},$$

e quindi

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \gamma \\ \lambda \end{array} \right\} \\ \Gamma'_{\alpha\gamma}{}^{\lambda} = - \left\{ \begin{array}{l} \alpha \gamma \\ \lambda \end{array} \right\} + C_{\gamma} A_{\alpha}^{\lambda}. \end{array} \right.$$

Il tensore di curvatura controvariante  $(R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta})$  coincide col tensore di Riemann-Christoffel:

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \{\gamma^{\delta}, \alpha\beta\};$$

(1) Ved. SCHOUTEN, loc. cit., p. 70.

(2) Ved. articolo citato dell'autore (« Rendiconti », vol. XIII, p. 182).

e, dalla formola generale <sup>(1)</sup>,

$$R'_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + 2 S'_{\alpha\beta}{}^{..k} C_{k\gamma}{}^{\delta} + C_{\beta\gamma/\alpha}{}^{\delta} - C_{\alpha\gamma/\beta}{}^{\delta}$$

che relaziona i due tensori di curvatura, tenendo presente che in questo caso

$$(24) \quad S'_{\alpha\beta}{}^{..k} = C_{[\beta} A_{\alpha]}^k$$

risulta, dopo un facile calcolo <sup>(2)</sup>

$$(25) \quad R'_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + 2 C_{[\beta/\alpha]} A_{\gamma}{}^{\delta}.$$

Perciò

$$R'_{\beta\gamma} = K_{\beta\gamma} + 2 C_{[\beta/\gamma]}$$

o

$$(26) \quad R'_{\beta\gamma} = R_{\beta\gamma} + \left( \frac{\partial C_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial C_{\gamma}}{\partial x^{\beta}} \right);$$

ed anche

$$(27) \quad R' = R'_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma} = K_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma} = K.$$

Dalla (24) risulta

$$S'_{\alpha\beta}{}^{.. \gamma} = S'_{[\beta} A_{\alpha]}^{\gamma}$$

dove

$$S'_{\beta} = C_{\beta}.$$

Ciò vuol dire che la connessione è *covariante emisimmetrica*.

Dalla (19), essendo  $(Q_{\alpha}{}^{\beta\gamma}) = 0$ , si ha

$$Q'_{\alpha\beta\gamma} = 2 C_{\alpha} g_{\beta\gamma}$$

cioè  $Q'_{\alpha\beta\gamma}$  è della forma  $Q'_{\alpha} g_{\beta\gamma}$ , essendo  $Q'_{\alpha} = 2 C_{\alpha}$ .

La connessione è *covariante conforme*. Siccome è anche  $(V_{\alpha\beta}) = 0$ , è *controvariante equiaffine* (*inhaltstreu*).

Per  $n = 4$ , le formole (26) e (27) mostrano che la connessione così definita soddisfa ancora a tutte le condizioni di struttura dello spazio fisico di Straneo, essendo

$$2\psi_{\mu} = C_{\mu} = S'_{\mu} = \frac{1}{2} Q'_{\mu},$$

e

$$R'_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} R g_{\beta\gamma}$$

il tensore strutturale.

(1) Ved. SCHOUTEN, loc. cit., p. 84.

(2) Questa formola fu stabilita dal prof. SCHOUTEN, *Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung*, « Math. Zts. », Bd. 13, 1922.

### 3. Riassumendo:

I. — La connessione  $C$ ) di Straneo e Infeld non è *covariante metrica* nè *controvariante metrica* ( $g_{\alpha\beta/\gamma} \neq 0$ , e  $g^{\alpha\beta}_{/\gamma} \neq 0$ ).

II. — Le connessioni lineari delle alinee  $c$ ) e  $d$ ) del n. 2 conducono al tensore strutturale di Straneo; ma non sono simultaneamente *metriche* nel trasporto covariante e nel trasporto controvariante. Sono però simultaneamente *conformi*. Quella della alinea  $c$ ) *conserva gli angoli* in ambedue i trasporti, ma conserva soltanto le *grandezze* nel trasporto controvariante (a meno che non sia  $(C_\alpha)$  un gradiente, ma in tal caso un mutamento della misura covariante ci conduce a un trasporto di Riemann). Quella della alinea  $d$ ) *conserva gli angoli* in tutti e due i trasporti, ma conserva soltanto le *grandezze* nel trasporto covariante (a meno che non sia  $(C_\alpha)$  un gradiente e per una scelta conveniente della misura covariante). La prima delle due connessioni considerate conserva i p-vettori *covarianti* nel trasporto lungo un contorno chiuso infinitesimo; la seconda conserva i p-vettori *contravarianti* (poichè, nella prima,  $(V'_{\alpha\beta}) = 0$  e, nella seconda,  $(V_{\alpha\beta}) = 0$ ). Si distinguono ambedue dalla connessione di Weyl, perchè il tensore  $(C^{\gamma}_{\alpha\beta})$  non è nullo, bensì della forma  $(C_\alpha A^{\gamma}_{\beta})$ . Sono connessioni *invarianti per incidenza* e non *invarianti per contrazione*. Si riducono al caso di Weyl (per una conveniente scelta della misura covariante) quando  $(C_\alpha)$  sia un vettore gradiente.

III. — Una connessione che è simultaneamente *covariante metrica* e *controvariante metrica* ( $Q = Q' = 0$ ), se, come fu visto nel n. 2, è emisimmetrica, non conduce alle equazioni di struttura B).

**Matematica** (Calcolo delle probabilità). — *Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo.* (Un problema di Bruno de Finetti). Nota di A. KOLMOGOROFF, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sia  $X(\lambda)$  una variabile reale, che varia in modo *aleatorio* in funzione del tempo  $\lambda$ , e precisamente in modo tale che la distribuzione di probabilità

$$\Phi_{\Delta}(x) = \mathfrak{P} \{ X(\lambda_2) - X(\lambda_1) < x \} \quad (\lambda_2 > \lambda_1)$$

dipenda soltanto da  $\Delta = \lambda_2 - \lambda_1$  e non da  $\lambda_1$ , nè da  $X(\lambda_1)$ , nè da tutto l'andamento di  $X(\lambda)$  per  $\lambda < \lambda_1$ . Con  $\mathfrak{P} \{ \dots \}$  intendiamo al solito indicare la probabilità della relazione tra parentesi. La funzione di ripartizione  $\Phi_{\Delta}(x)$  sodisfa allora notoriamente l'equazione funzionale <sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \Phi_{\Delta_1 + \Delta_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\Delta_1}(x-y) d\Phi_{\Delta_2}(y).$$

Ci proponiamo col presente lavoro di dare, generalizzando alcuni risultati di Bruno de Finetti <sup>(3)</sup>, una soluzione generale dell'equazione (1) sotto le sole condizioni che siano finiti i momenti primo e secondo

$$m_{\Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi_{\Delta}(x) \quad , \quad \sigma_{\Delta}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{\Delta})^2 d\Phi_{\Delta}(x).$$

Osserviamo, per i non specialisti, che la funzione  $\Phi_{\Delta}(x)$  non è mai decrescente, è continua a sinistra, e che si ha  $\Phi(-\infty) = 0$ ,  $\Phi(+\infty) = 1$ .

Sia 
$$\psi_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi_{\Delta}(x)$$

(1) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(2) Cfr. ad es. il mio lavoro *Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, « Math. Annalen », 104, pp. 416-458 (1931).

(3) Cfr. *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea*, « Rend. Lincei », 12, pp. 278-282 (1930).



la funzione caratteristica di  $\Phi_{\Delta}(x)$ . Per proprietà note delle funzioni caratteristiche si ha

$$\psi_{\frac{1}{n}}(t) = \{\psi_1(t)\}^{\frac{1}{n}}, \quad \psi_{\frac{1}{n^2}}(t) = \{\psi_1(t)\}^{\frac{1}{n^2}}.$$

Essendo  $\psi_{\Delta}(t)$  continua rispetto a  $\Delta^{(1)}$ , ne segue che è sempre

$$(2) \quad \psi_{\Delta}(t) = \{\psi_1(t)\}^{\Delta}.$$

Essendo  $\Phi_{\Delta}(t)$  unicamente determinata da  $\psi_{\Delta}(t)$ , ci basta determinare la forma generale di  $\psi_1(t)$ .

Secondo de Finetti si ha

$$\psi_1(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\Delta} \{\psi_{\Delta}(t) - 1\}}, \quad \log \psi_1(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \{\psi_{\Delta}(t) - 1\}, \quad \Delta \rightarrow 0^{(2)}.$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \{\psi_{\Delta}(t) - 1\} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi_{\Delta}(x) - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ it \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi_{\Delta}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) d\Phi_{\Delta}(x) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ itm_{\Delta} + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) d\Phi_{\Delta}(x) \right\} = itm_1 + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) d\Phi_{\Delta}(x). \end{aligned}$$

Sia ora

$$(3) \quad F_{\Delta}(x) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^x x^2 d\Phi_{\Delta}(x).$$

(1) Quando  $\Delta \leq \frac{1}{n}$ , si ha  $\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1^2 \frac{\Delta}{n} \leq \sigma_1^2 \frac{\Delta}{n} = \frac{1}{n} \sigma_1^2$ ;  $\sigma_{\Delta}^2$  tende pertanto a zero per  $\Delta \rightarrow 0$ , e corrispondentemente  $\psi_{\Delta}(t)$  tende a 1. Tenendo conto dell'equazione  $\psi_{\Delta_1 + \Delta_2}(t) = \psi_{\Delta_1}(t) \cdot \psi_{\Delta_2}(t)$  si conclude che  $\psi_{\Delta}(t)$  è continua rispetto a  $\Delta$ .

(2)  $\frac{1}{\Delta} \{\psi_{\Delta}(t) - 1\}$  è limitato per ogni  $t$  prefissato; l'equazione  $\psi_1(t) = 0$  è quindi esclusa, cosicchè il logaritmo di  $\psi_1(t)$  si può determinare per ogni  $t$ .

$F_{\Delta}(x)$  è una funzione non decrescente di  $x$  con  $F(-\infty) = 0$  e

$$F(+\infty) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\Phi_{\Delta}(x) = \frac{1}{\Delta} (m_{\Delta}^2 + \sigma_{\Delta}^2) = \Delta m_1^2 + \sigma_1^2.$$

In ogni intervallo  $(a, b)$  che non contiene al suo interno nè ha come estremo lo zero, si ha

$$\frac{1}{\Delta} \int_a^b (e^{itx} - 1 - itx) d\Phi_{\Delta}(x) = \int_a^b p(x, t) dF_{\Delta}(x),$$

ove

$$(+)\quad \left\{ \begin{array}{ll} p(x, t) = \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ p(x, t) = -\frac{t^2}{2} & \text{per } x = 0. \end{array} \right.$$

Dato però che la funzione  $p(x, t)$  è, per ogni  $t$  assegnato, finita e continua (anche per  $x = 0$ ), abbiamo

$$\frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) d\Phi_{\Delta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF_{\Delta}(x).$$

Scegliamo ora una successione di grandezze positive  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$  tendente a zero. Dalla successione di funzioni

$$F_{\Delta_1}(x), F_{\Delta_2}(x), \dots, F_{\Delta_n}(x), \dots$$

si può, come è noto, estrarre una sottosuccessione

$$F_{\Delta_{n_1}}(x), F_{\Delta_{n_2}}(x), \dots, F_{\Delta_{n_k}}(x), \dots$$

convergente (in tutti i punti in cui questa risulta continua) verso una funzione  $F(x)$ . La  $F(x)$  sarà di certo non decrescente e con gli estremi

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(-\infty) \geq \lim F_{\Delta}(-\infty) = 0 \\ F(+\infty) \leq \lim F_{\Delta}(+\infty) = \sigma_1^2. \end{array} \right.$$

Poichè la funzione  $p(x, t)$  tende a zero per  $t$  fisso e  $x \rightarrow \pm \infty$ , si ottiene finalmente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF_{\Delta_{n_k}}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF(x),$$

$$\begin{aligned}\log \psi_1(t) &= \lim_{\Delta} \frac{1}{\Delta} \{ \psi_{\Delta}(t) - 1 \} = \lim \left\{ itm_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) d\Phi_{\Delta}(x) \right\} = \\ &= \lim \left\{ itm_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF_{\Delta}(x) \right\},\end{aligned}$$

$$(6) \quad \log \psi_1(t) = im_1 t + \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF(x).$$

Essendo finito il secondo momento  $\sigma_1^2$ , è

$$\log \psi_1(t) = im_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \omega(t^2)^{(1)}.$$

Dalla (6) si ha d'altronde

$$\begin{aligned}\log \psi_1(t) &= im_1 t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{t^2}{2} + \omega(t^2) \right) dF(x) = im_1 t - \\ &- \frac{t^2}{2} \{ F(+\infty) - F(-\infty) \} + \omega(t^2),\end{aligned}$$

e ne segue

$$F(+\infty) - F(-\infty) = \sigma_1^2,$$

ossia, ricordando la (5),

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = \sigma_1^2.$$

Supponiamo inoltre che  $F(x)$  sia continua a sinistra (i valori di  $F(x)$  nei punti di discontinuità sono peraltro inessenziali). Che  $F(x)$  sia non decrescente abbiamo già detto.

Le formule (6), (4) e (2), insieme alla nota formula

$$(7) \quad \Phi_{\Delta}(x) - \Phi_{\Delta}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \psi_{\Delta}(t) dt,$$

danno la soluzione generale del nostro problema.

$$(1) \quad \frac{\omega(t^2)}{t^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

**Matematica.** — *Sopra un teorema di esistenza nel calcolo delle variazioni* <sup>(1)</sup>. Nota di B. MANIÀ, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. TONELLI.

1. Nel secondo volume dei « Fondamenti del Calcolo delle Variazioni » il prof. L. Tonelli ha dato vari gruppi di teoremi di esistenza dell'estremo in problemi di calcolo delle variazioni. I teoremi del primo di questi gruppi si possono dedurre da un criterio generale dato più tardi da H. Hahn <sup>(3)</sup>; ma, mentre per i primi quattro teoremi di esistenza la deduzione è immediata, per il quinto è necessario premettere delle osservazioni di natura geometrica, che riteniamo opportuno di esporre.

2. *Lemma.* — Sia  $\alpha$  un angolo  $< \pi$  formato da due direzioni orientate, e un certo arco rettificabile  $\gamma$  abbia quasi dappertutto la direzione della tangente appartenente ad  $\alpha$ ; allora, anche la direzione della corda  $c$  di  $\gamma$  appartiene ad  $\alpha$ .

*Dim.* — Supponiamo che la direzione di  $c$  non appartenga ad  $\alpha$ , e prendiamo una retta orientata  $r$  per il primo estremo di  $c$ , che formi con entrambi i lati di  $\alpha$  un angolo <sup>(4)</sup> maggiore di  $\pi:2$  e con  $c$  un angolo minore di  $\pi:2$ . Fissiamo poi un angolo  $\alpha'$  che si trovi, rispetto a  $c$  e ad  $r$ , nelle stesse condizioni di  $\alpha$  e contenga  $\alpha$  nel suo interno.

Se  $p$  è una poligonale avente gli stessi estremi di  $c$ , la misura complessiva di quelli dei suoi lati che hanno direzione non appartenente ad  $\alpha'$  è

$$\geq c \cos \widehat{cr} > 0.$$

Ora, se

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

è una successione di poligonali inscritte in  $\gamma$ , convergenti uniformemente all'arco, e la cui lunghezza tenda alla lunghezza dell'arco, le tangenti  $t_n$

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 15 maggio 1932.

(3) Questo criterio dato da H. HAHN nei « Sitzungsberichte d. Ak. d. Wiss. in Wien » 1925, si trova, esteso da L. TONELLI, negli « Annali della Scuola Normale », 1932.

(4) Per angolo di due rette orientate intendiamo quello dei due da esse formati che è compreso fra 0 e  $\pi$ .

di  $p_n$  convergono approssimativamente alle tangenti  $t$  di  $\gamma$ , e, precisamente, posta fra  $p_n$  e  $\gamma$  la corrispondenza

$$s_n = \frac{p_n}{\gamma} s^{(1)},$$

assegnati ad arbitrio due numeri positivi  $\sigma$  e  $\eta$ , si può determinare un intero positivo  $\bar{n}$  tale che per  $n > \bar{n}$ , esclusi i valori di  $s$  appartenenti a uno pseudo-intervallo  $E_n$  di misura minore di  $\eta$ , ogni altro  $s$ , dia una coppia di punti corrispondenti, rispettivamente di  $\gamma$  e di  $p_n$ , per i quali

$$\alpha(t, t_n) < \sigma^{(2)}.$$

Ne viene, se in  $E_n$  poniamo anche quegli eventuali punti di  $\gamma$  nei quali la direzione della tangente è esterna ad  $\alpha$ , che in tutti i punti di  $p_n$  appartenenti ad uno pseudoarco di misura

$$> \frac{p_n}{\gamma} (\gamma - \eta) = p_n - \eta \frac{p_n}{\gamma}$$

la direzione di  $p_n$  forma con una direzione di  $\alpha$  un angolo minore di  $\sigma$ .

Ora, se si prende  $\sigma$  minore del minimo angolo formato da un lato di  $\alpha$  con un lato di  $\alpha'$ , e  $\eta$  tale che

$$\eta \frac{p_n}{\gamma} \leq \eta < c \cos \widehat{cr}$$

si vede che ciò è in contraddizione con quanto abbiamo ottenuto sopra.

3. *Lemma.* — Sia  $R$  un rettangolo diviso in striscie mediante rette parallele alla sua altezza, e ad ogni tale striscia sia associato un angolo minore di  $\pi$ , contenente la direzione orientata dell'altezza del rettangolo. L'insieme di due angoli relativi a due striscie successive sia anch'esso un angolo minore di  $\pi$ . In queste ipotesi, le lunghezze delle curve continue rettificabili, appartenenti ad  $R$  e aventi quasi dappertutto direzione appartenente all'angolo relativo alla striscia che contiene il punto che si considera, sono limitate superiormente.

*Dim.* — Sia  $C$  una delle curve dell'enunciato e dividiamola in un numero di parti uguali abbastanza grande affinchè ciascuna di queste non possa avere punti in più di due striscie, e consideriamo la poligonale inscritta corrispondente. Se un arco di  $C$  appartiene a due striscie, sostituiamo il

(1) Qui con  $p_n$  e  $\gamma$  sono indicate le lunghezze della poligonale e dell'arco, e con  $s_n$  l'arco che dà il punto variabile su  $p_n$ .

(2) V. TONELLI, *Fondamenti...* I, p. 95 e sgg.



lato corrispondente della poligonale con altri due o tre lati: il primo, dal primo estremo dell'arco al primo punto di esso che sta sulla retta di divisione delle due striscie, l'ultimo, dall'ultimo punto dell'arco appartenente alla retta di divisione al secondo estremo dell'arco, il secondo, dal secondo estremo della prima delle due corde ora indicate al primo della seconda.

La poligonale che otteniamo ha in ogni punto la direzione appartenente all'angolo relativo alla striscia a cui appartiene quel punto, e ci basta provare che queste poligonali hanno lunghezza sempre minore di un numero fisso, o, ciò che è lo stesso, che la parte di una qualunque di esse appartenente a una striscia qualunque ha lunghezza minore di un numero fisso.

Per questo, cominciamo con l'osservare che se una spezzata di due lati appartiene tutta a una striscia, ha direzione appartenente all'angolo relativo a questa, e i suoi estremi sono sopra una perpendicolare alla base del rettangolo, allora la quota del secondo estremo sulla base è maggiore della quota del primo. Prendiamo poi in considerazione una striscia qualunque. Se la poligonale che si considera ha delle parti esterne alla striscia, queste saranno formate oltre che da un eventuale arco iniziale e da un arco finale, da archi tutti esterni alla striscia e aventi gli estremi sopra una retta limite della striscia stessa.

Dimostriamo che la quota del secondo estremo di un tale arco  $k$  è maggiore della quota del primo.

Per i vertici di  $k$  conduciamo le perpendicolari alla base del rettangolo e prendiamo come ulteriori vertici le loro intersezioni con  $k$ . Se l'arco di poligonale così trasformato ha dei lati paralleli all'altezza del rettangolo, sopprimiamoli ed eseguiamo una traslazione verso il basso di un arco finale di  $k$ ; con ciò si ottiene un nuovo arco di poligonale  $k'$  che soddisfa le stesse condizioni del precedente, ha lo stesso primo estremo, e il secondo a una quota più bassa. Dopo di ciò, consideriamo il vertice dell'arco di poligonale  $k'$  che ha la massima distanza della perpendicolare alla base sulla quale stanno gli estremi, ed osserviamo che il primo estremo del lato terminante in esso ha quota più bassa del secondo estremo del lato partente da esso. Possiamo sopprimere questi due lati e sostituire all'arco  $k'$  un altro che si ottiene traslando verso il basso la seconda delle due parti che si ottengono.

Proseguendo in questo modo, si trasforma alla fine l'arco di poligonale, in una spezzata di due lati con lo stesso primo estremo, avente il secondo estremo a una quota maggiore della quota di questo. Lo stesso, e a maggior ragione, vale allora per l'arco di poligonale che consideravamo.

Se a tutti gli archi, come quello considerato, sostituiamo un segmento perpendicolare alla base del rettangolo e congiungente il primo estremo dell'arco col secondo, le varie parti della poligonale data, che appartengono alla striscia che si osserva, risultano riunite in un unico arco, che soddisfa la condizione relativa all'angolo di direzione.

Ma un limite superiore per la lunghezza di tale arco è dato dalla disuguaglianza:

$$L \leq \Delta : \cos \frac{1}{2} \gamma$$

essendo  $\gamma$  l'ampiezza dell'angolo relativo alla striscia e  $\Delta$  la massima distanza di due punti qualunque della striscia stessa <sup>(1)</sup>.

Così il lemma è dimostrato.

4. Possiamo ora dimostrare il seguente

*Teorema.* — Se  $I_C$  è un integrale quasi regolare, seminormale, semi-definito positivo; se, considerata una parte limitata e chiusa  $A'$  del campo  $A$ , è possibile di suddividerla, mediante un numero finito di parallele, in porzioni a ciascuna delle quali corrisponda un arco della circonferenza  $x'^2 + y'^2 = 1$  di lunghezza minore di  $\pi$ , contenente tutte le coppie  $(x', y')$  normalizzate che annullano la  $F$  in almeno un punto  $(x, y)$  della porzione medesima, in ogni classe completa di curve ordinarie  $C$ , tutte contenute in  $A'$ , esiste il minimo assoluto di  $I_C$  <sup>(2)</sup>.

*Dim.* — Poichè « se il campo  $A'$  è limitato e chiuso; se  $I_C$  è quasi regolare positivo seminormale; se le curve ordinarie  $C'$  di  $A'$  per le quali

$$I_{C'} \leq 0$$

hanno tutte lunghezza minore di un numero fisso; in ogni classe completa  $k$  di curve ordinarie  $C$  di  $A'$  esiste il minimo assoluto di  $I_C$  » <sup>(3)</sup> ci basta provare che, nelle ipotesi enunciate sopra, le curve  $C'$  per le quali  $I_{C'} \leq 0$ , hanno lunghezza inferiore a un numero fisso.

Prendiamo un rettangolo  $R$  contenente  $A'$  e avente l'altezza parallela alla direzione delle striscie, e su di essa fissiamo un verso positivo. Se a due striscie consecutive corrispondono due angoli a uno dei quali appartenga la direzione positiva delle striscie e all'altro quella negativa, fra le due striscie si può intercalarne un'altra alla quale corrisponde un angolo non contenente nè l'una nè l'altra di quelle due direzioni. Così le striscie risultano divise in gruppi di striscie consecutive a ciascuna delle quali corrisponde un angolo contenente sempre la direzione positiva o sempre la direzione negativa delle striscie, e due tali gruppi sono sempre separati da una striscia alla quale corrisponde un angolo non contenente nè l'una nè l'altra delle due direzioni.

(1) Vedi TONELLI, *Fondamenti*, 2°, pp. 17-18.

(2) Vedi, anche per le notazioni, TONELLI, *Fondamenti*, 2°, p. 33.

(3) Questo è il criterio di HANS HAHN nella forma più generale datagli da L. TONELLI (v. « Annali della Scuola Normale Sup. », 1932, fasc. 1° e 2°).

Preso uno qualunque di questi gruppi di striscie, se a due sue striscie consecutive corrispondono angoli la cui somma <sup>(1)</sup> è maggiore di  $\pi$ , possiamo intercalare fra queste una nuova striscia, così che la somma dei due angoli corrispondenti a due strisce consecutive sia sempre  $< \pi$ .

Dopo di ciò, osserviamo che è sempre  $I_C \geq 0$ , e se  $I_{C'} \leq 0$ , sulla curva  $C'$ , esclusi al più i punti di uno pseudoarco di misura nulla, la direzione deve appartenere all'angolo relativo alla striscia che contiene il punto in cui si considera.

Perciò una tale curva  $C'$  ha in una striscia alla quale corrisponde un angolo non contenente nè la direzione positiva nè quella negativa delle striscie, un solo arco di lunghezza inferiore a un numero dato dalla formula ricordata nella dimostrazione del lemma precedente. Tolti questi archi, rimane un numero finito di parti, ciascuna delle quali appartiene a uno dei gruppi di striscie indicati sopra, e per la lunghezza di ciascuna di esse si può dare un limite superiore in base al lemma precedente.

Così risulta dimostrato il teorema.

**Matematica.** — *Sur les arcs frontières rendus impropres par les singularités des coefficients, dans le problème de Dirichlet pour les équations du second ordre et du type elliptique à deux variables.* Nota di J. CAPOULADE, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Qui si intende l'insieme dei due angoli, non la somma delle loro misure.

**Meccanica.** — *Sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes.* Nota di M. L. DUBREIL-JACOTIN, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Je me propose, dans cette Note, d'établir quelques propriétés rigoureuses des ondes dans les liquides hétérogènes. Je me bornerai au cas où le mouvement est le même dans des plans verticaux parallèles et peut par suite être étudié dans l'un d'eux comme mouvement à deux dimensions. Le domaine fluide D est limité par une horizontale H et une courbe  $l$ . Nous supposons que cette courbe  $l$  est peu différente d'une horizontale et se déplace avec une vitesse horizontale  $c$  sans altération de forme. Dans un système d'axes  $xOy$  liés à la courbe le champ du mouvement est la bande fixe comprise entre H et  $l$ , et les équations du mouvement sont, en supposant qu'il n'y a pas diffusion au cours du mouvement et que l'axe Oy est dirigé verticalement vers le bas :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x} + v\zeta - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial y} - u\zeta - \frac{\partial v}{\partial t}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

avec  $E = gy - \frac{1}{2}w^2$ ,  $w^2 = u^2 + v^2$ ,  $\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ ,  $u$  et  $v$  étant les composantes de la vitesse relative dans le système  $xOy$ .

Nous caractériserons la nature ondulatoire du mouvement par les mêmes hypothèses que M. Levi-Civita <sup>(2)</sup>. On a en particulier :

$$a) \quad \frac{(u - c)^2 + v^2}{c^2} < \beta^2 \quad \beta \text{ étant petit};$$

$$b) \quad \rho dy \int_{t_1}^{t_2} (u - c) dt \quad \text{fini quel que soit } (t_2 - t_1)$$

(1) Nella seduta del 15 maggio 1932.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Questioni di Meccanica classica e relativista*, II Conferenza. Bologna, Zanichelli 1924.

ce qui exprime qu'il n'y a pas de transport de masse dans les couches profondes.

Cela étant (2), montre qu'il existe une fonction de courant  $\psi(x, y, t)$  telle que  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Les conditions aux limites cinématiques entraînent, comme dans le cas d'un liquide homogène, que H et l sont deux lignes de courant, soient  $\psi = 0$ ,  $\psi = q(t)$ , ( $q(t)$  étant le flux relatif de la vitesse à travers une génératrice verticale par unité de temps). Quant à la condition dynamique sur l,  $p = \text{const.}$ , elle peut s'écrire aussi:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \text{d'où:} \quad u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Sous cette dernière forme elle s'écrit donc:

$$(4) \quad \frac{dE}{dt} = gv - \frac{1}{2} \frac{dw^2}{dt} = 0.$$

1. *Ondes irrotationnelles.* — Nous allons montrer que, comme dans le cas homogène, le mouvement est permanent dans le système xOy.

En effet,  $\psi$  est alors harmonique, et si  $f(x, y)$  est la fonction harmonique nulle sur H et égale à 1 sur l, on a nécessairement  $\psi(x, y, t) = q(t)f(x, y)$ . En portant cette valeur dans (4), on obtient une équation linéaire en  $q'$  et  $q^2$  qui, à une transformation analytique près, est identique à celle établie par M. Fenchel<sup>(1)</sup> dans le cas homogène, et entraîne  $q' = 0$ . Il reste à montrer que la permanence cinématique entraîne la permanence dynamique. Or (1) peut maintenant s'écrire

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy}{\rho(x, y, t)} = dE$$

d'où:

$$(5) \quad p = f(E, t) \qquad (6) \quad \rho = h(E, t)$$

avec

$$h = \frac{\partial f}{\partial E} \quad (f \text{ étant une fonction arbitraire}).$$

Sur l, la permanence cinématique et (4) ou (5) entraînent  $E = \text{const.}$ , et comme l est toujours formée des mêmes particules, (6) montre que, sur l,  $\rho = \text{const.}$

(1) «Rendiconti della R. Acc. dei Lincei», serie 6<sup>a</sup>, to. XIII, p. 740 (1931).



D'autre part, (3) s'écrit, à cause de (6),

$$(7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{D(E, \psi)}{D(x, y)} \frac{\partial \rho}{\partial E} = 0.$$

Si  $\frac{D(E, \psi)}{D(x, y)}$  n'était pas nul, à cause de la permanence cinématique et de (6) on aurait :

$$\frac{D(E, \psi)}{D(x, y)} = k(E)$$

et  $\rho$ , solution de l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + k(E) \frac{\partial \rho}{\partial E} = 0$$

serait de la forme

$$(6') \quad \rho = h_1 \left( t - \int \frac{dE}{k(E)} \right)$$

et comme sur  $l$ ,  $\int \frac{dE}{k(E)} = \text{const.}$ ,  $\rho$ , indépendant de  $t$  sur  $l$ , serait une constante, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'hétérogénéité. On a donc :

$$(8) \quad \frac{D(E, \psi)}{D(x, y)} = 0 \quad \text{ou} \quad E = K(\psi)$$

et (7) montre que  $\rho$  est indépendant de  $t$ ;  $h = \frac{\partial f}{\partial E}$  est donc aussi indépendant de  $t$ , et, à cause de  $p = \text{const.}$  sur  $l$ , (5) montre qu'il en est de même pour  $p$  et qu'il y a permanence dynamique; les lignes  $p = \text{const.}$ ,  $\rho = \text{const.}$  et  $E = \text{const.}$  sont confondues avec les lignes de courant.

4. On sait que la recherche des mouvements d'ondes permanents et périodiques d'un liquide hétérogène, faite au moyen de la première approximation, n'a donné des solutions irrotationnelles que dans le cas de la profondeur infinie<sup>(1)</sup>.

Il est immédiat, d'après ce qui précède, qu'il ne peut y avoir de solution dans le cas de la profondeur finie. Sur  $H$  en effet on a  $v = 0$ ,  $E = \text{const.}$  d'où  $u = \text{const.}$ , d'où, à cause de l'hypothèse du non transport de masse dans les couches profonde,  $u = c$ . Et la fonction analytique  $u - c + iv$ , nulle sur le fond, est nécessairement identiquement nulle.

Dans le cas de la profondeur infinie, de tels mouvements d'ondes irrotationnels, s'ils existent, ne pourront pas, d'après ce qui précède, être

(1) LOVE, *Wave Motion in a Heterogeneous Heavy Liquid*, « Proc. Lond. Math. Soc. », XXII, 307 (1891). BURNSIDE, *On the Small Wave-Motions of a Heterogeneous Fluid under Gravity*, « Proc. Lond. Math. Soc. », XX, 392 (1889). Voir aussi H. LAMB, *Hydrodynamics fifth ed.*, p. 356. Cambridge University Press (1930).

différents cinématiquement des ondes irrotationnelles permanentes d'un fluide homogène. Mais un tel mouvement ne pourra être solution dans le cas hétérogène que si la pression est constante sur toute ligne de courant. Si nous effectuons alors les mêmes transformations analytiques que M. Levi-Civita <sup>(1)</sup>, nous sommes ramenés à la détermination d'une fonction analytique  $\theta + i\tau = \omega(\xi + i\eta)$  (avec  $|w| = ce^\tau$ ,  $v = ce^\tau \sin \theta$ ), vérifiant dans tout le cercle de rayon 1, et non plus seulement sur la circonférence, l'équation fondamentale <sup>(2)</sup>:

$$(I) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} - pe^{-\tau} \sin \theta = 0$$

où  $\sigma$  est l'angle polaire et  $p$  une constante qui n'a aucun rapport avec la pression.

Mais si une telle fonction existait, la fonction :

$$F(\xi, \eta) = \frac{d\tau}{d\sigma} - pe^{-\tau} \sin \theta$$

nulle dans tout le domaine considéré, serait harmonique. Or  $\tau$  et  $\theta$  étant harmoniques, on a, puisque  $\frac{d\tau}{d\sigma} = \xi \frac{\partial \tau}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \tau}{\partial \xi}$ :

$$\Delta F = -8e^{-\tau} \sin \theta \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 \right]$$

et cette expression ne peut être nulle que si  $\theta = 0$  — ce qui ne donne pas de mouvement d'onde véritable — ou si  $\theta = \text{const}$ , ce qui donne encore  $\theta = 0$ , puisque  $l$  est peu différente d'une horizontale. Ainsi:

*Dans un fluide hétérogène incompressible, il ne peut se propager d'ondes irrotationnelles de type permanent.*

En première approximation, l'équation (I) se réduit à

$$(I') \quad \frac{d\tau}{d\sigma} - p\theta = 0$$

et la fonction  $F$ , bien évidemment harmonique, est nulle dans tout le cercle si elle est nulle sur le contour. On trouve donc que *les ondes de Airy sont une solution comme dans le cas homogène.*

(1) T. LEVI-CIVITA, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie*, « Math. Ann. », t. 93, p. 264 (1925).

(2) En réalité, cette équation suppose la périodicité du mouvement. Mais l'impossibilité se déduit aussi, sans faire aucune hypothèse, de l'équation intermédiaire du même Mémoire:

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - \frac{g}{c^3} e^{-\tau} \sin \theta = 0.$$

II. *Ondes rotationnelles.* — Nous nous bornerons ici aux ondes permanentes ayant le même caractère que les ondes irrotationnelles: constance de la pression sur toute ligne où la densité est constante, ces lignes étant, en vertu de la permanence, les lignes de courant. La condition de compatibilité pour (1):  $\frac{D(\zeta, \psi)}{D(x, y)} = 0$  ou  $\Delta\psi = j(\psi)$ , est la même que lorsque  $\rho = \text{const.}$  De tels mouvements d'ondes, s'ils existent, seront donc nécessairement les mouvements d'ondes rotationnels les plus généraux d'un fluide homogène. Mais pour qu'inversement un tel mouvement soit solution dans ce cas, il faut encore, puisque  $p$  est constant sur toute ligne de courant, que la condition (4) soit vérifiée en tout point de  $D$ , donc que l'on ait:

$$E = K(\psi).$$

Pour une profondeur finie, cette condition entraîne ici encore que, sur le fond, la vitesse absolue est nulle:  $u - c = v = 0$ . On prévoit donc qu'il ne doit pas y avoir de mouvement ondulatoire dans ce cas qui comprend comme cas particulier le mouvement irrotationnel. S'il existait un tel mouvement,  $\psi$  serait solution de l'équation:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - 2gy - K(\psi) = 0.$$

Si nous supposons que la fonction  $K$ , continue et dérivable, est analytique, en vertu de la condition (a), elle est partout finie et  $\frac{\partial\psi}{\partial y}$  a un minimum non nul. Toutes les conditions sont remplies pour l'application du théorème de Cauchy à la droite  $H$  que l'on peut définir par  $y = 0$ ,  $\psi = 0$ . Nous savons alors qu'il existe deux intégrales et deux seulement passant par cette droite. Or les deux cylindres  $\psi = s(y)$  définis par

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 2gy - K(s) = 0 \quad \text{avec} \quad s = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0$$

sont ces deux intégrales. Toutes les lignes de courant  $\psi = q$  sont des horizontales et l'on n'obtient pas de mouvement ondulatoire proprement dit.

Pour une profondeur infinie, nous connaissons comme solution dans le cas homogène les ondes de Gerstner. Avec nos axes, elles sont définies par les relations:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial y} = u = c(1 + e^{-k\beta} \cos k\alpha) \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v = ce^{-k\beta} \sin k\alpha \end{cases}$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les fonctions de  $x$  et  $y$  définies par

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \sin k\alpha \\ y = \beta + \frac{1}{k} e^{-k\beta} \cos k\alpha \end{cases}$$

$k$  étant égal à  $\frac{g}{c^2}$ . On en déduit:

$$\psi = c \left( \beta(x, y) + \frac{e^{-2k\beta(x, y)}}{2k} \right).$$

Nous savons *a priori* que  $\Delta\psi$ , fonction de  $\psi$ , s'exprimera uniquement en fonction de  $\beta$ ; on trouve en effet:

$$\Delta\psi = - \frac{2cke^{-2k\beta}}{1 - e^{-2k\beta}}.$$

Enfin le calcul de  $E$  donne:

$$E = g \left( \beta - \frac{e^{-2k\beta}}{2k} - \frac{1}{2k} \right).$$

Nous arrivons donc au résultat suivant, non encore énoncé à ma connaissance:

*Quelle que soit la répartition de la densité, les ondes de Gerstner sont une solution rigoureuse possible pour un liquide hétérogène de profondeur infinie* <sup>(1)</sup>.

(1) La détermination de  $p$  en fonction de  $\psi$  à l'aide des équations (1) suppose la connaissance de la fonction  $\rho(\psi)$ , que l'on peut déduire de données physiques.

**Meccanica.** — *Sulla relatività nel microcosmo.* Nota di Z. PYCHA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

Alla Teoria Gravitazionale di Einstein seguirono varî tentativi di ampliamento della geometria riemanniana, in modo che, accanto alla gravitazione, anche l'elettricità potesse spiegarsi come l'espressione di una struttura geometrica dello spazio e del tempo, rivelataci attraverso la misura nella geometria naturale. Sono noti i lavori, fatti a tal riguardo, dal Weyl, dall'Eddington, dal Kaluza, dall'Einstein stesso e, tra gli italiani, dallo Straneo. Queste teorie unitarie della gravitazione e dell'elettricità si ispirano alla circostanza, che tutti i *fenomeni fisici elementari* attualmente conosciuti possono teoricamente considerarsi, in ultima analisi, come manifestazioni del campo gravitazionale e del campo elettromagnetico. Vi è però ancora da osservare, che i *fenomeni fisici elementari* avvengono essenzialmente nel mondo atomico, ed è noto che la fisica del microcosmo — ossia la fisica dell'atomo — si differenzia dall'ordinaria fisica del macrocosmo per il suo « carattere quantistico ».

In una Nota recente<sup>(2)</sup> ho tentato un'interpretazione geometrica anche di tale aspetto dei fenomeni nel microcosmo mediante un ulteriore ampliamento della struttura geometrica del cronotopo; precisamente ho fatto un'estensione della fisica weyliana al microcosmo, fondandomi sul « *calcolo differenziale assoluto unico* » di B. Finzi<sup>(3)</sup>, ed ho interpretato la natura quantistica della fisica dell'atomo con una struttura fibrosa del cronotopo.

In questa Nota mi occupo più particolarmente della struttura del cronotopo così considerato e discuto il criterio con il quale la relatività generale può trasportarsi nel microcosmo.

**1. Cenno sulla geometria del Cronotopo Quantistico.** — Poichè per la fisica del microcosmo, basata notoriamente sullo studio dei fenomeni di irradiazione atomico, l'esperienza non ci fornisce degli scalari per le grandezze fisiche misurate, ma — come mise in evidenza Heisenberg<sup>(4)</sup> — delle matrici,

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(2) Z. PYCHA, *Geometria del Cronotopo Quantistico*, « Atti d. Pont. Acc. delle Scienze Nuovi Lincei », a. LXXXV (1932), pp. 165-183.

(3) B. FINZI, *Calcolo dei sistemi multipli*, questi « Rendiconti », vol. XIII, serie 6ª (1° sem. 1931), pp. 8-12.

(4) HEISENBERG, « Zeitschrift für Physik », 33, p. 879; HEISENBERG, BORN, JORDAN, « Zeitschrift für Physik », 34, p. 858; 35, p. 557.



o — seguendo B. Finzi <sup>(1)</sup> — più generalmente dei sistemi multipli d'ordine  $2r$ , ho usato nella Nota citata tali sistemi per la rappresentazione delle grandezze fisiche e geometriche; ho quindi indicato un punto del cronotopo microcosmico mediante quattro sistemi d'ordine  $2r$ :  $x^i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), definiti da  $n^{2r}$  elementi  $x^{i_1 i_2 \dots i_{2r}}$ , ognuno dei quali può porsi in corrispondenza biunivoca e completa con le disposizioni con ripetizione di  $n$  numeri a  $2r$  a  $2r$ ; per la coordinata temporale ho posto, come già fece B. Finzi,  $x^0 = c \cdot t \cdot \delta$ , dove  $c$  indica la velocità della luce nel vuoto,  $t$  lo scalare rappresentante il tempo in un determinato luogo e  $\delta$  l'unità nel prodotto d'ordine  $r$  <sup>(2)</sup>. Ma al cronotopo quantistico, che così si considera, non si possono estendere i concetti della geometria weylana, traducendo senz'altro i rispettivi algoritmi in quelli analoghi del calcolo dei sistemi multipli, poichè l'incommutabilità di due fattori generici nel prodotto d'ordine  $r$  lascia indeterminata la definizione della metrica. Per determinare quest'ultima mi sono basato, ispirandomi al summenzionato « calcolo differenziale assoluto unico » di B. Finzi, sulle seguenti ipotesi <sup>(3)</sup>:

1° Le coordinate  $x^i$  siano commutabili tra loro in ogni singolo punto;

2° Quattro differenziali  $dx^i$  rappresentino le componenti di uno spostamento infinitesimo, in un punto, solo nel caso che siano commutabili tra loro ed inoltre con le coordinate del punto che si considera;

3° Le funzioni  $g_{ik}$  e  $\varphi_i$  che compaiono nelle due forme fondamentali caratterizzanti la metrica del cronotopo con un dato riferimento, non contengano coefficienti anisotropi, di modo che rientrino nel tipo seguente:

$$(I) \quad f(x) = \sum_{i_0 i_1 i_2 i_3} a_{i_0 i_1 i_2 i_3} (x^0)^{i_0} \cdot (x^1)^{i_1} \cdot (x^2)^{i_2} \cdot (x^3)^{i_3};$$

4° Risguardiamo leciti solo quei cambiamenti di riferimento (cioè del sistema di coordinate e della taratura) che riescano definiti da funzioni del tipo anzi precisato.

Affinchè due punti  $P \equiv (x^i)$  e  $P' \equiv (x^i + dx^i)$ , le cui coordinate differiscono per infinitesimi, possano concepirsi come estremi di uno spo-

(1) B. FINZI, *La relatività generale nei fenomeni di irradiazione atomico*, questi « Rendiconti », vol. XIII (1931), pp. 119-124.

(2) Per le nozioni del *Calcolo dei sistemi multipli*, di B. FINZI, si vedano questi « Rendiconti », vol. XII (1930), pp. 631-639; vol. XIII (1931), pp. 8-12. Per una trattazione più ampia vedasi: B. FINZI, *Calcolo dei sistemi multipli*, « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », serie II, vol. LXIV (1931), pp. 97-142.

(3) Cfr. la mia Nota: *Geometria del cronotopo quantistico*, loc. cit., pp. 174-176.

stamento infinitesimo, è necessario, per le ipotesi fatte, che essi abbiano le loro coordinate commutabili l'uno coll'altro. Due punti in tali condizioni chiamavo « *immediatamente vicini* »; la misura dello spostamento da essi individuato è — con una prefissata taratura — definita dal sistema:

$$(2) \quad (ds)^2 = \sum_{\substack{ik \\ 2r}}^i g_{ik} \cdot \underset{2r}{dx^i} \cdot \underset{2r}{dx^k} \quad (g_{ki} = g_{ik}),$$

dove, in forza alle ipotesi fatte, l'espressione al secondo membro è con qualsiasi riferimento indipendente dall'ordine dei fattori, come appunto propone B. Finzi nel suo calcolo differenziale assoluto unico.

Ispirandomi poi alla circostanza che l'essere od il non essere « *immediatamente vicini* » risulta coll'ipotesi esposte una proprietà invariante della reciproca posizione di due punti, ho voluto concepire il cronotopo come l'insieme di tutte le linee costituite dai punti immediatamente vicini. Con ciò imponevo alla varietà spazio-tempo nel microcosmo una certa qual struttura fibrosa, in quanto che le linee anzidette possono immaginarsi come fibre di un feltro, o fili di un reticolo che chiamavo brevemente « *Spazio Finziano* ». Vi ho poi esteso opportunamente i concetti della geometria weyliana. Considerando infine lo spazio finziano come la sintesi della geometria naturale del microcosmo, ho voluto interpretare la sua struttura fibrosa come l'espressione geometrica del carattere quantistico dei fenomeni fisici elementari, appartenenti al microcosmo.

È però da osservarsi che l'ipotesi di riguardare illeciti cambiamenti di riferimento non definibili mediante funzioni del tipo (1), è essenziale per lo spazio finziano; scende appunto da questa ipotesi che punti immediatamente vicini si conservano tali attraverso un cambiamento di riferimento, ciò che dà precisamente l'invarianza alla struttura del reticolo, immedesimato con lo spazio finziano. Di conseguenza non può scegliersi, come nel cronotopo macrocosmico, qualsiasi punto come origine,  $O \equiv (0, 0, 0, 0)$ , delle coordinate, ma saranno suscettibili di tale scelta manifestamente soltanto i punti di coordinate isotrope; questi possono anche dirsi brevemente « *punti isotropi* », poichè, in forza all'ipotesi 4° sopra indicata, essi si conservano tali attraverso un cambiamento di riferimento.

Questo fatto non deve però interpretarsi come un rigettare il notorio principio dell'indipendenza del sistema di riferimento. Basta infatti riflettere che riferimento e spazio sono da considerarsi in intima colleganza tra loro, in quanto che ambedue sono inscindibilmente legati ai fenomeni naturali, senza i quali tanto l'uno, quanto l'altro perdono ogni significato.

Ho lasciata sospesa, nella mia Nota citata, la questione, se la varietà metrica reticolare così presentata sia, o non sia connessa, vale a dire se sia, o non sia sempre possibile passare, « *senza uscire dallo spazio finziano* » (cioè dai fili del reticolo), da un punto P ad un altro P' qualsivoglia,

avente coordinate non commutabili con quelle di P. Di tale questione voglio ora trattare.

2. *Il carattere di connessione dello spazio finziano.* — Diciamo in generale «infinitamente vicini» punti le cui coordinate differiscono per infinitesimi. È manifesto che due punti infinitamente vicini non sono sempre anche immediatamente vicini; anzi, è facile convincersi che nello spazio finziano non esiste alcun punto per cui tutti i punti ad esso infinitamente vicini siano contemporaneamente anche immediatamente vicini ad esso. Si potrebbe allora domandare, se, dati due punti infinitamente vicini, ma non immediatamente vicini, P e Q, esista sempre almeno un punto, R, immediatamente vicino ai due considerati, il quale permetta di passare da P a Q, con un passaggio intermedio per esso, senza uscire dallo spazio finziano. Ma anche questo non è sempre possibile. Per dimostrarlo, consideriamo ad es. il caso semplice, in cui P e Q abbiano rispettivamente le quattro coordinate uguali e definite da sistemi multipli formati con soli quattro elementi diversi da zero, di modo che il calcolo possa essere impostato su dei sistemi doppi, i cui elementi corrispondano alle disposizioni con ripetizione dei numeri 1, 2. Dovremo allora porre per gli  $n^{2r}$  scalari che definiscono le coordinate  $x^i$  di P (e analogamente anche per gli elementi  $y^i$  delle coordinate  $y^i = x^i + dx^i$  di Q):

$$x^i_{l_1 \dots l_r m_1 \dots m_r} = \begin{cases} 0, & \text{se } l_p \neq l_q, m_p \neq m_q, l_p, l_q = 1, 2 \\ x_{lm}, & \text{se } l_p = l_q, m_p = m_q, l_p, l_q = 1, 2 \end{cases} \quad (p, q = 1, 2, \dots, r).$$

Se esiste un punto  $R \equiv (z^i)$  immediatamente vicino ad ambedue i punti P e Q (che si considerano *non* immediatamente vicini), dovranno sussistere le eguaglianze:

$$(3) \quad \begin{cases} x^k_{2r} \cdot z^k_{2r} = z^k_{2r} \cdot x^k_{2r} \\ y^k_{2r} \cdot z^k_{2r} = z^k_{2r} \cdot y^k_{2r} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (1).$$

Le prime di esse sostituiscono in forma abbreviata le seguenti  $4n^{2r}$  eguaglianze:

$$\begin{aligned} & \sum_1^n x_{m_1 \dots m_r} x_{l_1 \dots l_r m_1 \dots m_r} z^k_{m_1 \dots m_r l_{r+1} \dots l_{2r}} = \\ & = \sum_1^n x_{m_1 \dots m_r} z^k_{l_1 \dots l_r m_1 \dots m_r} x_{m_1 \dots m_r l_{r+1} \dots l_{2r}} \\ & (k = 0, 1, 2, 3 \quad ; \quad l_p, m_q = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

(1) Tralasciamo l'indice delle coordinate di P e di Q, giacchè sono supposte rispettivamente uguali.

Ad analoghe  $4n^{2r}$  eguaglianze equivalgono le seconde delle (3); esse si ottengono scambiando semplicemente nelle precedenti la lettera  $x$  con la lettera  $y$ . Ma per le ipotesi semplificative fatte riguardo le coordinate di P e di Q tali  $2 \cdot 4n^{2r}$  eguaglianze si riducono alle  $2 \cdot 4 \cdot 2^2 = 32$  seguenti (che, in sostanza, stabiliscono solo 8 equazioni lineari ed omogenee per quei quattro elementi  $\chi_{l_1 \dots l_r m_1 \dots m_r}^k$ , per cui è  $l_p = l_q, m_p = m_q, l_p, m_q = 1, 2$ , elementi i quali risultano manifestamente uguali per tutte e quattro le coordinate  $z^k$  di R e si possono quindi indicare brevemente con  $\chi_{lm}$ ):

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^2 x_{ln} \chi_{nm}^k = \sum_1^2 \chi_{ln}^k x_{nm} \\ \sum_1^2 y_{ln} \chi_{nm}^k = \sum_1^2 \chi_{ln}^k y_{nm} \end{array} \right. \quad (l, m = 1, 2).$$

Perchè queste siano soddisfatte, qualunque siano gli  $x_{lm}$  e gli  $y_{lm}$  <sup>(1)</sup>, è necessario che gli elementi  $\chi_{lm}$  costituiscano un sistema isotropo (cioè sia  $\chi_{lm} = k\delta_{lm}$ , dove  $\delta_{lm}$  è diverso da zero solo quando  $l = m$ , nel qual caso è uguale all'unità). Se quindi si suppone che P e Q non si trovino nell'intorno di un punto le cui coordinate soddisfacciano le condizioni richieste per le coordinate di R, non esiste un punto che sia contemporaneamente immediatamente vicino a P ed a Q, onde, con un passaggio intermedio per esso, fosse possibile passare da P a Q senza uscire dallo spazio finziano.

Vogliamo ancora dimostrare che nel caso delle matrici di Heisenberg (cioè quando si faccia  $r = 1$ ), vi sono dei punti infinitamente vicini, per i quali non è possibile passare dall'uno all'altro neanche con un numero grande quanto si vuole di passaggi intermedi attraverso punti immediatamente vicini, se non si vuole uscire da un intorno infinitesimo di essi. Sfruttiamo a tal uopo un teorema del Volterra, che ci dice che condizione necessaria e sufficiente, perchè tutte le matrici commutabili con una terza siano commutabili fra loro, è che la sostituzione caratterizzata da quest'ultima sia elementare <sup>(2)</sup>. Scegliamo un punto P le cui coordinate siano sistemi caratterizzanti delle sostituzioni elementari; è allora manifesto che anche tutti i punti in un suo intorno infinitesimo potranno avere coordinate dello stesso carattere. Ma in un tale intorno non esiste alcun punto, che abbia le sue coordinate commutabili con quelle di altri punti dell'intorno medesimo, senza che anche tutti questi le abbiano commutabili l'uno col l'altro. È dunque senz'altro evidente che, se nell'intorno di P consideriamo

(1) Essendosi però supposto che i punti P e Q appartengano ad uno stesso intorno infinitesimo, gli elementi  $x_{lm}, y_{lm}$  non dovranno differire che per infinitesimi.

(2) V. VOLTERRA, *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* § 6, «Rend. del Circolo Mat. di Palermo», t. II, 1898; *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, «Memorie della Soc. It. delle Scienze», serie III, t. XII.



un punto Q non immediatamente vicino a P, è in tal caso impossibile passare da P a Q, anche con un numero grande quanto si vuole di passaggi intermedi, a meno che facendo questi passaggi non si esca da un intorno infinitesimo di P. Resta così accertato che non sempre lo spazio finziano è connesso in un intorno infinitesimo, vale a dire non è sempre possibile passare da un punto ad un altro ad esso infinitamente vicino, rimanendo in un intorno infinitesimo del punto considerato.

Dimostriamo ora che è invece sempre possibile passare da un punto ad un altro — qualunque questi siano — attraverso linee del reticolo che passano per punti appartenenti ad un intorno finito, opportunamente scelto; basta prendere questo intorno in maniera che vi sia compreso almeno un punto isotropo. Siano infatti  $\underset{2r}{x^i}$  e  $\underset{2r}{y^i}$  le coordinate di due punti P e Q qualsivogliano dello spazio finziano e  $\underset{2r}{z^i} = \underset{2r}{k^i} \delta$  le coordinate di un punto isotropo I. È facile persuadersi che, in base alle ipotesi fondamentali indicate al § 1, le due quaterne di differenziali

$$\underset{2r}{d^* x^i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\underset{2r}{x^i} - \underset{2r}{k^i} \delta) \quad \text{e} \quad \underset{2r}{d^* y^i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\underset{2r}{y^i} - \underset{2r}{k^i} \delta)$$

possono considerarsi come le componenti di uno spostamento infinitesimo in tutti i punti le cui coordinate sono rispettivamente:

$$\underset{2r}{z^i} + \sum_{\underset{2r}{x^i}} \underset{2r}{d^* x^i}, \quad \text{o} \quad \underset{2r}{z^i} + \sum_{\underset{2r}{y^i}} \underset{2r}{d^* y^i}$$

(ed in particolare anche nei punti P e Q, per le cui coordinate si può

manifestamente scrivere:  $\underset{2r}{x^i} = \underset{2r}{z^i} + \int_{\underset{2r}{x^i}}^{\underset{2r}{x^i}} \underset{2r}{d^* x^i}$ ,  $\underset{2r}{y^i} = \underset{2r}{z^i} + \int_{\underset{2r}{y^i}}^{\underset{2r}{y^i}} \underset{2r}{d^* y^i}$ ). Pos-

siamo quindi immaginare di passare dal punto I al punto P e Q con un numero infinito di incrementi successivi  $\underset{2r}{d^* x^i}$ , rispettivamente  $\underset{2r}{d^* y^i}$ ; conseguentemente potremo allora anche passare, senza uscire dallo spazio finziano, da P a Q, e viceversa, passando per I.

Notiamo però che, come già nella geometria weyliana, non possiamo parlare di lunghezza di una linea. Ma i ragionamenti qui fatti non sono manifestamente basati sul concetto di lunghezza della linea, lungo la quale immaginiamo effettuare i successivi passaggi, ma si fondano esclusivamente sulla considerazione di punti immediatamente vicini, i quali sappiamo conservarsi tali attraverso ogni cambiamento di riferimento, conciliabile con le ipotesi fondamentali indicate al § 1.



3. *La relatività ed i fenomeni fisici del microcosmo.* — Al § 1 abbiamo osservato che nello spazio finziano solo i punti isotropi sono suscettibili di essere scelti a origine di un sistema di riferimento. Questo fatto si presta ad un'interessante interpretazione. Segue infatti da esso che le leggi dei fenomeni di irradiazione atomico risultano invarianti solo per un osservatore che si muova lungo delle « linee isotrope » <sup>(1)</sup> dello spazio finziano. Ma possiamo anche notare che noi, gli osservatori di questi fenomeni, ci troviamo *a fortiori* nel macrocosmo, ragion per cui i moti ai quali possiamo andare soggetti, devono evidentemente considerarsi descritti lungo linee isotrope — e ciò in dipendenza dal fatto che non sottoponiamo alla quantizzazione anche il moto *macrocosmico* dell'osservatore del microcosmo (cioè dell'osservatore dei fenomeni di irradiazione atomico).

Ricordiamo ora le condizioni di quantizzazione della meccanica di Heisenberg <sup>(2)</sup>:

$$(5) \quad q_2^i \cdot q_1^k - q_2^k \cdot q_1^i = 0 \quad ; \quad p_2^i \cdot p_1^k - p_2^k \cdot p_1^i = 0.$$

$$(6) \quad q_2^i \cdot p_1^k - p_2^k \cdot q_1^i = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}} \delta_{ik} \delta_2.$$

In esse le matrici  $q_2^i$  e  $p_2^i$  sono le estensioni delle coordinate libere (parametri lagrangiani) e dei rispettivi momenti coniugati,  $h$  è la costante di Planck e  $\delta_{ik}$  è diverso da zero solo quando  $i = k$ , nel qual caso è uguale all'unità;  $\delta_2$  invece rappresenta l'unità nell'algebra delle matrici. Se consideriamo un punto materiale nel microcosmo, abbiamo indicando con  $q_2^i = x_2^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) le sue coordinate (posizionali) cartesiane e con lo scalare  $m$  la sua massa <sup>(3)</sup>:  $p_2^i = d(m x_2^1) \cdot (d x_2^0)^{-1}$  <sup>(4)</sup>; segue allora dalle (6), tenendo presente che  $d x_2^0$  è sempre isotropo (essendosi posto per la coordinata temporale  $x_2^0 c \cdot t \delta_2$ ), che lungo la traiettoria del punto materiale sussistono le diseguaglianze:

$$(7) \quad x_2^i \cdot d x_2^i \neq d x_2^i \cdot x_2^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dalle (7) scende, ricordando l'ipotesi 2° del § 1, che la traiettoria del punto materiale nel microcosmo *non* coincide con una linea dello spazio finziano.

(1) Cioè linee luoghi di punti isotropi.

(2) HEISENBERG, BORN, JORDAN, loc. cit.

(3) Ammettendo, che anche nel microcosmo la massa sia rappresentabile mediante uno scalare.

(4) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte 1ª, p. 368.

Le considerazioni precedenti ci fanno concludere quanto segue: mentre nel macrocosmo il movimento della terna di riferimento si può sempre identificare col movimento di un corpo rigido, e, in particolare, un movimento traslatorio della terna di riferimento può identificarsi con il movimento di un punto materiale, nel microcosmo ciò non è sempre possibile: si pensi ad esempio che la traiettoria di un elettrone, riguardato come un punto materiale microcosmico ubbidiente alle (5) e (6), non coincide, in generale, con le linee dello spazio finziano, mentre il riferimento è sempre costituito da linee dello spazio stesso. Ciò può interpretarsi dicendo che, trasportando la relatività nel microcosmo, le leggi dei fenomeni fisici elementari sono invarianti per gli osservatori macrocosmici — che percorrono linee isotrope dello spazio finziano — senza che sia però lecito rappresentare questi osservatori con mobili microcosmici.

**Geologia.** — *Sulla presenza dell'Eocene nel Fezzan Orientale (Tripolitania).* Nota di A. DESIO, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. DAINELLI.

In occasione di una recente missione scientifica (1931) effettuata per incarico della Reale Accademia d'Italia, ho attraversato, ritornando da Cufra verso la costa mediterranea, tutto il Fezzan orientale, dall'oasi di Uau en-Namùs a quella di Zella passando per Uau el-Chebîr, Temissa ed el-Fogha <sup>(2)</sup>.

Lungo tale itinerario il suolo è in buona parte composto da terreni argilloso-calcarei gessiferi più o meno ampiamente ricoperti da lave basaltiche, ad eccezione di una vasta plaga fra Uau el-Chebîr e Temissa — zona che si va sempre più estendendo verso Murzùch — la quale risulta invece composta prevalentemente da arenarie quarzose di tipo nubiano, con qualche impronta di pianta del Carbonifero. Le argille verdastre gessifere e i calcari più o meno arenacei associati sono spesso riccamente fossiliferi. Durante la traversata, malgrado le difficoltà logistiche, ho potuto eseguire una buona raccolta di esemplari fossili, che in genere si trovano in perfetto stato di conservazione. Abbondano i molluschi e fra questi specialmente le Ostree, ma localmente s'incontrano anche banchi ricchissimi di echini e, per quanto più limitatamente, di foraminiferi. Il materiale paleontologico non è stato determinato, ma fin dal primo esame sommario è apparso formato in una certa parte da fossili, anche abbastanza caratteristici, di un

(1) Nella seduta del 15 maggio 1932.

(2) Per maggior dettagli sulle vicende della spedizione e sul percorso vedi DESIO A., *La spedizione della Reale Accademia d'Italia nel Deserto Libico (1931)*. « Nuova Antologia », Roma 1° aprile 1932.

orizzonte finora sconosciuto non soltanto nel Fezzan, ma in tutta la Tripolitania: l'*Eocene*.

Fra i molluschi ho potuto riconoscere subito, anche sul posto, l'*Ostrea elegans* Desh., specie assai diffusa nel Deserto Libico orientale, ove fu raccolta, per esempio, fra Siua e Farafra, nei pressi di Birket el-Qerûn, dell'oasi di Baharia ecc. e nel Deserto Arabico, come nell'Uadi Dugla, al Mokattam ecc. L'*O. elegans* Desh. appartiene al cosiddetto «orizzonte del Makattam», corrispondente all'Eocene medio e superiore, e compare con maggiore frequenza nei livelli superiori. Associate con le Ostree si rinven- gono spesso delle Carolie, affini alla *Carolia placunoides* Cantr. del medesimo orizzonte.

Fra gli echini prevalgono alcune forme di piccole dimensioni attribui- bili al genere *Echinolampas*. Più importante dai punti di vista stratigrafico e paleontologico è il reperto di *Dictyoconoides Cooki* Carter<sup>(1)</sup> contenuto in gran numero in un banco di calcari farinosi giallastri e associati con pic- cole forme di echini, fra i quali l'*Echinolampas Crameri* De Lor. e ad Ostree. Inferiormente v'è un banco dello stesso calcare con nuclei di grossi gastro- podi; superiormente dei calcari arenacei bianchi e gialli con *Ostrea elegans* Desh.

Il *Dictyoconoides Cooki* Carter conferma la presenza dell'Eocene nel territorio compreso fra Zella e Marada, dato che questa specie di forami- nifera è stata per ora ritrovata solo nell'Eocene medio (Luteziano).

Per quanto riguarda il suo *habitat* il nuovo reparto viene ad aumen- tarne grandemente l'estensione. Prima d'ora, infatti, il *D. Cooki* era noto solo nell'India, nell'Arabia meridionale e recentemente era stato scoperto nella Somalia settentrionale; ora invece è accertata la sua esistenza anche nel bacino mediterraneo e non è improbabile che in tale bacino il suo *habitat* abbia ad estendersi ancora con nuove e più accurate ricerche.

A oriente della zona eocenica sopra indicata si passa gradualmente a livelli più elevati sino ad incontrare gli affioramenti oligocenici ricchissimi di molluschi, di echini, di coralli e di foraminifere — fra cui la forma caratteristica *Nummulites intermedia-Fichteli* — che già ho avuto occasione di segnalare nei dintorni dell'oasi di Marada<sup>(2)</sup>.

(1) Di questa come delle altre foraminifere raccolte si sta occupando il profes- sore A. SILVESTRI, degli echini paleogenici il prof. C. AIRAGHI.

(2) DESIO A., *Sulla presenza dell'Oligocene in Sirtica (Libia)*. «Rend. R. Acc. Lincei», vol. XIII, serie 6ª, 1º sem., fasc. 3, Roma 1931, p. 208.

**Fisiologia** (Fisiologia Vegetale). — *Ricerche sul movimento degli stami in alcune berberidacee. — Azione di stimoli sottilimimali multipli a bassa frequenza.* Nota di SILVIA COLLA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio A. HERLITZKA.

In una Nota antecedente, ho dimostrato che la contrazione totale degli stami di *B. vulgaris* poteva avvenire per azione della sommazione di stimoli sottilimimali: generalmente l'intensità di questi era eguale a  $1/2$  o a  $1/3$  di quella di soglia.

Per stimoli ad intensità costante, l'aumento della frequenza determina una diminuzione dell'intervallo che intercede tra l'inizio della stimolazione e quello della contrazione.

Avevo già nel 1929 iniziato lo studio dell'azione di stimoli molto inferiori allo soglia, ripetuti a lunghi intervalli di tempo, ed avevo notato che in *Mahonia* questi determinavano una contrazione lenta, poi un rilassamento oltre la posizione di riposo, ed infine una successiva contrazione, che riportava lo stame alla posizione di riposo o anche più in là a contatto col pistillo.

Ho ripreso ora le ricerche precedenti, valendomi, a differenza di quanto avevo fatto prima, solo di stimoli di chiusura, cioè di intensità costante. Il circuito era eguale a quello descritto in un lavoro antecedente. Ho registrato l'ombra dello stame con il chimografo di Ohm a bassa velocità, e ne ho anche eseguite fotografie a regolari intervalli di tempo.

*Mahonia*. 4 stimoli per 1''. 50 U. Kr. 4 Volta, resist. circuito 2  $\Omega$ ; tempo in minuti; Altezza della contrazione in mm dallo zero (posizione dello stame a contatto del pistillo). Temp. ambiente 15°.

Preparazione	I		II	
	Tempo	Alt. contr.	Tempo	Alt. contr.
	0	1.6	0	0.5
	5	1.6	5	0.5
	10	1.0	10	0.4
	20	1.0	20	0.8
	30	0.8	30	1.0
	40	0.7	40	1.0

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

Preparazione	I		II	
	Tempo	Alt. contr.	Tempo	Alt. contr.
	60	0.7	60	1.8
	70	0.9	70	2.1
	80	1.3	80	2.9
	90	1.7	100	2.9
	110	2.7	110	2.6
	120	2.0	120	2.0
	130	1.6	130	1.5
	170	1.6	170	1.5

*Berberis Vulgaris*. 5 stimoli 1". 3 Volt. 500 U. Kr. Res. circa 17  $\Omega$ .  
Temp. amb. 17°. Annotazioni come nel protocollo precedente.

Preparazioni	I		II		III		IV	
	Tempo	Alt. c.	Tempo	Alt. c.	Tempo	Alt. c.	Tempo	Alt. c.
	0	2.00	0	1.5	0	1.3	0	0.7
	5	1.1	10	0.9	10	0.9	20	0.5
	10	0.7	20	0.3	20	0.0	30	0.3
	20	0.1	30	0.3	30	1.0	40	1.0
	30	0.1	40	1.0	40	1.9	50	1.4
	40	0.9	60	2.0	50	2.8	60	1.4
	50	1.8	70	2.1	60	2.9	70	1.4
	60	2.7	80	1.8	70	2.3	80	1.1
	80	2.4	90	1.7	80	2.0	90	1.0
	90	1.9	100	1.7	90	1.7	100	1.0
	120	1.9	120	1.7	120	1.7	—	—

Tanto i due protocolli come il grafico che si riferisce ad altri due esperimenti (fig. 1) ci dimostrano che lo stame di *Mahonia* e di *Berberis vul-*

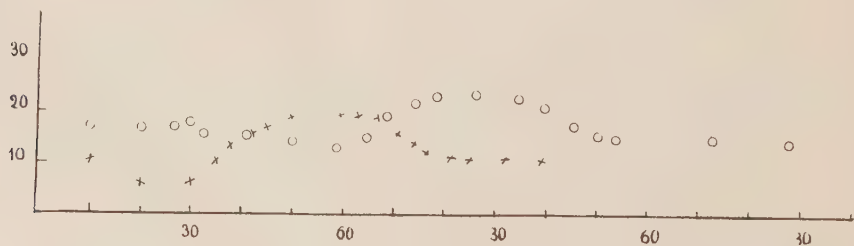


Fig. 1. — Curva del movimento degli stami sotto l'azione di stimoli multipli a bassa frequenza (intensità e frequenza come negli esperimenti precedenti). Circoli: Stame di *Mahonia*; croci: *B. vulgaris*. Ascisse ogni divisione 10', Ordinate 10 mm.



*garis* presenta un secondo tipo di contrazione, molto diverso da quello normale: infatti, mentre quest'ultimo si compie in 17/100 di secondo per l'azione di uno stimolo sopraliminale o per la sommazione di stimoli al di sotto della soglia, ma abbastanza vicini a questa, il primo si svolge in uno spazio di tempo che generalmente è di 2 h per *Mahonia* e di 1 h e 30 per *Berberis*.

Alla fine dell'esperimento difficilmente gli stami sono ancora eccitabili: dopo un lungo periodo di riposo in camera umida quelli di *B. vulgaris* alcune volte rispondono, poi ad un eccitamento elettrico con contrazioni totali o parziali: quelli di *Mahonia* si staccano dalla loro base e solo in qualche rarissimo caso si sono osservate contrazioni parziali dovute a stimoli meccanici.

Se invece si cessa di stimolare gli stami durante la loro fase di rilassamento od al primo inizio della successiva contrazione, si nota che sempre, dopo lungo soggiorno in camera umida, gli stami rispondono come normalmente allo stimolo elettrico o meccanico.

Devo notare che, durante la stimolazione, le scaglie nettarifere hanno prodotto grosse gocce di nettare che prima non esistevano.

**Fisiologia** (Fisiologia Vegetale). — *Ricerche sul contenuto gassoso di alcune alghe.* — *Sui gas contenuti in Enteromorpha compressa j Ag.* <sup>(1)</sup>. Nota di Z. DANIN, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio A. HERLITZKA.

In ricerche antecedenti fatte a proposito dei gas contenuti nelle cavità cenobiali delle Rivularie, si era notato che tanto nelle cavità gassose di queste, quanto in quelle di alcune alghe brune, si aveva un aumento della percentuale di O<sub>2</sub> più grande di quello trovato in vesciche normali quando, bucate previamente le cavità ed estrattine i gas, si determinava la quantità di ossigeno nel gas che si formava alcune ore dopo fatta l'operazione.

Si era pensato che tale diversità fosse dovuta in massima parte almeno, al fatto che nelle vesciche normali i gas, depauperati dell'O<sub>2</sub> durante la notte e rimasti in cavità, diluissero la quantità di O<sub>2</sub> che veniva secreta nelle diverse ore della giornata, mentre dopo l'operazione si raccoglieva soltanto il gas secreto.

Questa ipotesi era in parte provata dal fatto che le vesciche di *Fucus* bucate e svuotate dai gas e poi legate, davano gas con percentuali di O<sub>2</sub> più alte che non i ricettacoli normali.

Trovare un'alga che oltre alla secrezione di gas possedesse delle vie

(1) Dall'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino, Sezione Marina di Trieste.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.

di uscita naturali per questo stesso gas, avrebbe dato una prova all'ipotesi enunciata.

*Enteromorpha compressa*, trovata su una spiaggia pietrosa al fondo del porto di Capodistria, ci diede modo di controllare sperimentalmente l'ipotesi stessa.

Le *Enteromorphe* generalmente constano di un tubo, le pareti del quale sono unicellulari. Nel loro stadio giovanile la cavità non esiste: esse sono piene, formate da numerose cellule, le quali vengono poi allontanate: ciò dà origine ad una cavità tubulare che può essere o no chiusa all'estremità. Così, mentre in *E. intestinalis* (L) Link, la cavità è chiusa, in *E. compressa* i tubi sono chiusi solo nei primi periodi di sviluppo: quando la cavità è grande e l'alga è adulta la parte più distale si deteriora, e si ha così la formazione di un tubo aperto ad una estremità. La cavità in alcuni casi è semplicemente virtuale; e ciò quando si ha la formazione di poco gas oppure quando i ciuffi vengono sbattuti violentemente dalle ondate il gas fuoriesce e le pareti del tubo combaciano, essendo sempre queste ultime bagnate da una secrezione mucilaginosa.

È sufficiente però una giornata luminosa, perchè le enteromorfe si riempiano di gas, rimanendo galleggianti nell'acqua. Ogni tanto una bolla di gas esce all'esterno, mentre se ne formano altre all'estremità prossimale del tubo.

Su quest'alga furono compiute le ricerche seguenti:

1° Si eseguirono le analisi dei gas raccolti nei tubi ancora chiusi e giovani;

2° Vennero analizzate le bolle gassose che si svolgono dai tubi aperti col crescere della luminosità;

3° Mediante pressione sui tubi aperti se ne fecero uscire i gas a diverse ore del giorno, analizzando poi quelli che più tardi vi si svilupparono;

4° Si chiusero alcuni dei tubi adulti e susseguentemente si estrasse dopo alcuni giorni il gas formato, il quale venne poi analizzato.

I) Tre ciuffi contenenti degli esemplari con i tubi ancora chiusi e giovani e di un verde smeraldo vennero posti in una bacinella la sera prima dell'esperimento. L'acqua copriva le alghe. Il gas veniva prelevato ogni volta da un esemplare differente.

Cielo sereno; Temp. H<sub>2</sub>O 22°.

Ore	8	10	13	18
O <sub>2</sub> % I°	13	38	61	48
II°	15	42	67	48

II) Ciuffi con esemplari adulti ed aperti in condizioni sperimentali come le precedenti. Temp. 21°.

Ore	8	10	13	18	21
O <sub>2</sub> % I°	6.2	21.3	48.1	40.1	36.0
II°	12.3	24.7	50.2	43.1	31.7
III°	11.6	29.1	50.1	54.2	34.8

III) Ciuffi in condizioni sperimentali come le precedenti. Gli esemplari venivano svuotati e ogni due ore si analizzava il gas formatosi in questo spazio di tempo. Il gas venne estratto totalmente la sera prima dell'esperimento. Giornata serena.

Ore	6	8	10	12	16
O <sub>2</sub> % I°	5.1	24.2	40.1	59.3	50.1
II°	7.2	23.7	44.7	61.2	54.2
III°	4.0	25.9	43.1	69.3	53.7

IV) Esemplari aperti vennero chiusi mediante legatura; dopo tre giorni gli individui così trattati erano gonfi e venivano tenuti sott'acqua mediante sassi legati ai fili.

I gas prelevati dopo questo tempo diedero i seguenti risultati:

O <sub>2</sub> %	23	25	19	27
CO <sub>2</sub> %	3.5	2	7	4

Da questi dati noi possiamo concludere che le alghe giovani si comportano come tutte le altre specie osservate: in esse si ha una produzione % di O<sub>2</sub> più forte; ma non possiamo ancora dire se la quantità è dovuta ad una attività maggiore del cloroplasto oppure ad una permeabilità maggiore per gli altri gas, in modo che questi possano uscire più facilmente e lasciare così che la quantità di O<sub>2</sub> % venga aumentata.

Facendo il confronto tra le diverse percentuali di O<sub>2</sub> ottenute nelle alghe normali ed in quelle svuotate, vediamo che esiste realmente una % maggiore di ossigeno in quegli individui in cui il gas viene asportato ogni due ore, come d'altronde era già stato provato nei *Fucus*.

Ne viene che possiamo affermare che nelle condizioni naturali l'O<sub>2</sub> formatosi nella fotosintesi viene diluito in parte dai gas residui in cavità provenienti dalla respirazione ed in parte da quelli che diffondono dall'esterno.

L'aumentare dell'O<sub>2</sub> nelle bolle gassose che si staccano dal tubo e che vengono portate all'esterno, ci dà la contro prova di questo fatto: infatti noi vediamo che la bolla è tanto più povera di O<sub>2</sub> quanto più tempo mette a formarsi, (durante le ore di minore illuminazione) e ciò lo si osserva quando la luminosità è minore; i gas che diffondono han più tempo a mettersi in equilibrio con quelli secreti.

L'ultimo esperimento ci pone in evidenza che negli individui in cui si è impedita la fuoruscita del gas, aumenta il volume di questo, ma diminuisce la percentuale di  $O_2$ , mentre aumenta quella di  $CO_2$ .

Insomma il gas si impoverisce dell'ossigeno e si arricchisce di azoto.

Ne viene che in queste vesciche così gonfie sia alla superficie dell'acqua come sott'acqua, si mantengono tali, e nelle quali ci dev'essere una certa pressione, ci ricordano un unico caso trovato in un ricettacolo di *Fucus*, in cui la pressione parziale dell'azoto era superiore a quella atmosferica.

Se ciò fosse realmente, e sarebbero necessari molti dati analoghi per provarlo, si dovrebbe ammettere una secrezione di azoto da parte dell'alga, secrezione che per le piante a clorofilla non è mai stata dimostrata.

Ma anche in queste alghe non è dimostrato che la pressione di N sia superiore a quella atmosferica.

N. P.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 3 giugno 1932 (anno X)*

*Presidenza del prof. sen. A. GARBASSO*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Sui tensori doppi a divergenza unica.* Nota <sup>(1)</sup>  
del Corrisp. U. CISOTTI.

Sieno  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) le coordinate e

$$ds^2 = \sum_{i,k}^3 a_{ik} dx^i dx^k \quad \text{con} \quad a = \|a_{ik}\| > 0,$$

il quadrato dell'elemento lineare di una  $V_3$  riemanniana. Se  $T^{ik}$  designano le componenti contravarianti di un tensore doppio  $\mathbf{T}$ , le sue divergenze sono i vettori  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}'$  le cui componenti contravarianti sono definite rispettivamente dalle seguenti formule:

$$(1) \quad D^i = \sum_k^3 T^{ki}|_k, \quad D'^i = \sum_k^3 T^{ik}|_k.$$

Se il tensore  $\mathbf{T}$  è simmetrico, con che  $T^{ik} = T^{ki}$ , si ha manifestamente  $D^i = D'^i$  e quindi  $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$ . È questo l'unico caso in cui si verifica la coincidenza delle due divergenze oppure ve ne sono degli altri?

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1932.



Mi propongo di mettere in rilievo, nella presente Nota, che *condizione caratteristica affinché sia  $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$ , ossia il tensore  $\mathbf{T}$  abbia un'unica divergenza, è che si abbia*

$$(I) \quad T^{i+1\ i+2} - T^{i+2\ i+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

essendo  $\psi$  una funzione arbitraria delle coordinate  $x_i$ .

Naturalmente facendo nella precedente  $i = 1, 2, 3$  si devono considerare eguali gli indici che differiscono tra di loro di 3. In particolare, assumendo  $\psi$  costante si trova che il tensore simmetrico appartiene alla classe, più vasta, di quei tensori doppi che ammettono una divergenza unica. Questa classe dipende da sette elementi *a priori* arbitrari: le tre componenti  $T^{ii}$ , le tre componenti  $T^{i+1\ i+2}$  e la funzione  $\psi$ , le rimanenti tre componenti  $T^{i+2\ i+1}$  risultando definite da (I).

Se si interpreta  $\mathbf{T}$  come tensore degli sforzi di un sistema continuo è noto che, in virtù dell'ipotesi che gli elementi interni sieno sollecitati solamente da una forza, il tensore degli sforzi risulta simmetrico, ciò corrisponde al caso che, nella (I)  $\psi$  sia costante; rammentiamo inoltre che *la divergenza di tale tensore deve eguagliare, in condizioni statiche, la forza unitaria di volume*. Ferma restando questa circostanza la (I) mostra che una  $\psi$  non costante non lascia più sussistere la simmetria del tensore, considerato come tensore degli sforzi: si può allora pensare che ciascun elemento del sistema continuo sia soggetto oltre che ad una forza, anche ad un momento, come avviene per le azioni magnetiche, il cui effetto si manifesta nell'orientamento dell'elemento stesso<sup>(1)</sup>. Risulta dalla (I) che un tale momento sarebbe conservativo, con funzione potenziale  $\psi$ .

Può essere altresì interessante rilevare che se il tensore doppio  $\mathbf{T}$  appartiene a una  $V_2$ , condizione caratteristica perchè esso ammetta un'unica divergenza è che sia

$$(II) \quad T^{12} - T^{21} = \frac{c}{\sqrt{a}},$$

rappresentando  $c$  una costante arbitraria.

1. Allo scopo di giustificare le precedenti conclusioni determiniamo una particolare forma che può attribuirsi alle opposte divergenze di un

(1) Cfr. MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. II (seconda edizione), p. 257. Vedi anche: SOMIGLIANA, *Sul problema statico di Maxwell*. « Memorie della R. Accademia dei Lincei », Serie 5, vol. VII (1909).

tensore doppio emisimmetrico  $\mathbf{E}$ . Se  $E^{ik}$  designano le sue componenti contravarianti, risulta:

$$(2) \quad E^{ik} + E^{ki} = 0.$$

Posto:

$$Y^i = \sum_k E^{ik} = - \sum_k E^{ki},$$

si hanno le componenti contravarianti di un vettore  $\mathbf{Y}$  che col suo opposto  $-\mathbf{Y}$  dà le due divergenze del tensore  $\mathbf{E}$ . È noto che la suscritta espressione delle componenti della divergenza si può trasformare e attribuire a  $Y^i$  un'espressione, assai comoda per il calcolo effettivo, e che ricorda quella dell'ordinaria divergenza di un vettore; si ha cioè (1):

$$Y^i = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{a} E^{ik})}{\partial x_k}.$$

Sviluppando la sommatoria, tenendo presente che, per le (2),  $E^{ii} = 0$ , e ritenendo equivalenti gli indici che differiscono di 3, si ottiene:

$$(3) \quad Y^i = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial (\sqrt{a} E^{ii+1})}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial (\sqrt{a} E^{ii+2})}{\partial x_{i+2}} \right\}.$$

Introduciamo il tensore triplo  $\epsilon$  le cui componenti covarianti  $\epsilon_{ijk}$  sono nulle se gli indici non sono tutti distinti, ed è  $\epsilon_{ijk} = \sqrt{a}$  se  $i, j, k$  è una permutazione, degli indici 1, 2, 3, di classe pari rispetto alla permutazione 1, 2, 3, ed è  $\epsilon_{ijk} = -\sqrt{a}$  se  $i, j, k$  è una permutazione di classe dispari, e consideriamo il vettore  $\mathbf{v}$  le cui componenti covarianti sono così definite:

$$v_i = \frac{1}{2} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} E^{jk} = \frac{1}{2} (\epsilon_{ii+1i+2} E^{i+1i+2} + \epsilon_{ii+2i+1} E^{i+2i+1}),$$

da cui, notando che

$$\epsilon_{ii+1i+2} = -\epsilon_{ii+2i+1} = \sqrt{a}$$

e tenendo presenti le (2), si ottiene:

$$(4) \quad \boxed{v_i = \sqrt{a} E^{i+1i+2} = -\sqrt{a} E^{i+2i+1}}.$$

(1) LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Roma, Stock (1925), p. 177, (19').

Scambiando successivamente  $i$  in  $i + 1$  e in  $i + 2$  si ottengono le relazioni:

$$v_{i+1} = \sqrt{a} E^{i+2i} = -\sqrt{a} E^{ii+2},$$

$$v_{i+2} = \sqrt{a} E^{ii+1};$$

per queste la (2) può scriversi:

$$Y^i = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+2}} \right).$$

I secondi membri non sono altro che le componenti contravarianti del rot  $\boldsymbol{v}^{(1)}$ ; pertanto potremo scrivere:

$$(5) \quad \boxed{\mathbf{Y} = \text{rot } \boldsymbol{v}}$$

essendo le componenti covarianti di  $\boldsymbol{v}$  definite dalle (4) mediante le componenti contravarianti del tensore  $\mathbf{E}$ .

2. Sieno ora  $T^{ik}$  le componenti contravarianti di un tensore doppio  $\mathbf{T}$ . Ponendo:

$$(6) \quad S^{ik} = 1/2 (T^{ik} + T^{ki}), \quad E^{ik} = 1/2 (T^{ik} - T^{ki}),$$

si può scrivere

$$(7) \quad T^{ik} = S^{ik} + E^{ik}$$

cioè, compendiosamente:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{E};$$

essendo, per le (6),  $\mathbf{S}$  *simmetrico* e  $\mathbf{E}$  *emisimmetrico*.

Sieno le due divergenze  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}'$  del tensore  $\mathbf{T}$  definite, mediante le rispettive componenti contravarianti, dalle (1), ovvero, per le (6), nel modo seguente:

$$D^i = \sum_k S^{ki}|_k + \sum_k E^{ki}|_k,$$

$$D'^i = \sum_k S^{ik}|_k + \sum_k E^{ik}|_k.$$

(1) Cfr. loc. ultimo citato, p. 185.

Da queste, per sottrazione e tenendo conto delle (6), si ricava:

$$D'^i - D^i = 2 \sum_k^3 E^{ik}{}_{|k} = 2 Y^i,$$

pertanto, per la (5), si ha:

$$(8) \quad \boxed{\mathbf{D}' - \mathbf{D} = 2 \operatorname{rot} \mathbf{v}},$$

essendo le componenti covarianti del vettore  $\mathbf{v}$  definite dalle (4).

Dalla (8) discende che *condizione caratteristica affinché il tensore doppio abbia eguali le due divergenze  $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$  è che sia*

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

o, ciò che equivalente, *sia*

$$\mathbf{v} = 1/2 \operatorname{grad} \psi$$

essendo  $\psi$  uno scalare arbitrario.

Per la (4) si deve avere dunque per i tensori doppi a divergenza unica

$$E^{i+1i+2} = -E^{i+2i+1} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

cioè, per il secondo gruppo delle (6),

$$(9) \quad T^{i+1i+2} - T^{i+2i+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

che sono precisamente le (I).

3. Per  $i = 1, 2$  e un  $ds^2$  binario si ha una varietà  $V_2$ . La divergenza di un tensore doppio emisimmetrico  $\mathbf{E}$ , della varietà stessa, ha per componenti contravarianti:

$$Y^i = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial (\sqrt{a} E^{ii+1})}{\partial x_{i+1}}.$$

Ponendo

$$v = \sum_{ij}^2 \epsilon_{ij} E^{ij} = \epsilon_{12} E^{12} + \epsilon_{21} E^{21} = 2\sqrt{a} E^{12} = -2\sqrt{a} E^{21},$$

si ottiene:

$$Y^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial (\sqrt{a} E^{12})}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\partial v}{\partial x_2},$$

$$Y^2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial (\sqrt{a} E^{21})}{\partial x_1} = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Quindi  $Y^1 = Y^2 = 0$  soltanto per  $v$  costante; ne segue  $E^{12} = -E^{21} = \frac{v}{2\sqrt{a}}$ , con  $v$  costante e in definitiva la (II).

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Osservazione sui tensori quintupli emisotropi.*  
Nota di B. CALDONAZZO, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

In questa Nota faccio rilevare che il più generale tensore quintuplo emisotropo dipende da sole sei quantità scalari. Si può così semplificare l'espressione che di esso ha dato il Cisotti<sup>(2)</sup>.

1. Le componenti cartesiane assegnate dal Cisotti per tale tensore sono

$$(1) \quad Q_{ikjhl} = A\delta_{ik}\epsilon_{jhl} + B\delta_{ij}\epsilon_{khl} + C\delta_{ih}\epsilon_{kjl} + D\delta_{il}\epsilon_{kjh} + E\delta_{hj}\epsilon_{ihl} + \\ + F\delta_{kh}\epsilon_{ijl} + G\delta_{kl}\epsilon_{ijh} + H\delta_{jh}\epsilon_{ikl} + K\delta_{jl}\epsilon_{ikh} + L\delta_{hl}\epsilon_{ikj},$$

dove  $A, B, \dots, L$  sono dieci quantità scalari arbitrarie;  $\delta_{ik}$  sono le componenti cartesiane del tensore doppio fondamentale,  $\epsilon_{jhl}$  quelle del tensore triplo emisimmetrico ed emisotropo. Le 60 componenti non identicamente nulle del tensore si riducono a dieci distinte, come appare dalle relazioni seguenti, che riporto dal citato lavoro del Cisotti, con i simboli  $S_r$  indicando i valori che a meno del segno esprimono tutte le 60 componenti:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{23111} = T_{31222} = T_{12333} = -T_{32111} = -T_{13222} = -T_{21333} = S_1, \\ T_{21311} = T_{32122} = T_{13233} = -T_{31211} = -T_{12322} = -T_{23133} = S_2, \\ T_{21131} = T_{32212} = T_{13323} = -T_{31121} = -T_{12232} = -T_{23313} = S_3, \\ T_{21113} = T_{32221} = T_{13332} = -T_{31112} = -T_{12223} = -T_{23331} = S_4, \\ T_{12311} = T_{23122} = T_{31233} = -T_{13211} = -T_{21322} = -T_{32133} = S_5, \\ T_{12131} = T_{23212} = T_{31323} = -T_{13121} = -T_{21232} = -T_{32313} = S_6, \\ T_{12113} = T_{23221} = T_{31332} = -T_{13112} = -T_{21223} = -T_{32331} = S_7, \\ T_{11231} = T_{22312} = T_{33123} = -T_{11321} = -T_{22132} = -T_{33213} = S_8, \\ T_{11213} = T_{22321} = T_{33132} = -T_{11312} = -T_{22123} = -T_{33231} = S_9, \\ T_{11123} = T_{22231} = T_{33312} = -T_{11132} = -T_{22213} = -T_{33321} = S_{10}. \end{array} \right.$$

Con queste condizioni e con l'annullare le 183 componenti rimanenti si tien conto della emisotropia del tensore limitatamente a tutti i sistemi car-

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) U. CISOTTI, *Tensori quintupli emisotropi*, questi « Rendiconti », vol. XII, 2° sem. 1930, pp. 195-199.



tesiani che si possono scegliere con supporto una assegnata terna di rette ortogonali a due a due.

2. Vi sono però ulteriori relazioni che discendono dalla circostanza che l'emisotropia si deve verificare anche passando a sistemi cartesiani comunque orientati. In particolare si passi dalla terna  $y_1, y_2, y_3$  ad una terna congruente  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$  ottenuta dalla prima ruotandola di un angolo  $\varphi$  intorno all'asse  $y_3$ , cosicchè i coseni direttori  $\alpha_{rs} = \cos(y_r, \bar{y}_s)$  sono  $\alpha_{11} = \cos \varphi$ ,  $\alpha_{12} = -\sin \varphi$ ,  $\alpha_{13} = 0$ ;  $\alpha_{21} = \sin \varphi$ ,  $\alpha_{22} = \cos \varphi$ ,  $\alpha_{23} = 0$ ;  $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$ ,  $\alpha_{33} = 1$ . In virtù della isotropia del tensore, data la congruenza delle terne, dovrà valere la

$$T_{pqrst} = T_{ijkl} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \alpha_{ls}.$$

Basterà applicare questa alle componenti non nulle che hanno un solo indice eguale a 3; per le altre componenti si ottengono delle identità. Le componenti con un solo indice eguale a 3 sono disposte nella prima, seconda, quarta e quinta colonna della tabella costituita dalle dieci relazioni precedenti. Cominciamo col primo termine della prima colonna. Si trova la relazione

$$\begin{aligned} T_{23111} &= T_{23111} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \\ &+ 2 (T_{23122} + T_{23212} + T_{23221}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

che, dovendo essere soddisfatta qualunque sia  $\varphi$ , importa la relazione

$$T_{23111} = T_{23122} + T_{23212} + T_{23221}.$$

Operando analogamente sugli altri termini della prima colonna si ottengono altre nove relazioni delle quali le ultime sei sono funzioni delle altre tre e di quella scritta. Ci si limita quindi a scrivere le quattro relazioni indipendenti così ottenute introducendo per semplicità i simboli  $S_r$  delle (2):

$$(3) \quad \begin{cases} S_1 = S_5 + S_6 + S_7, \\ S_2 = -S_5 + S_8 + S_9, \\ S_3 = -S_6 - S_8 + S_{10}, \\ S_4 = -S_7 - S_9 - S_{10}. \end{cases}$$

Quanto agli altri termini delle colonne seconda, quarta e quinta essi forniscono relazioni coincidenti con quelle trovate o ad esse equivalenti. Se si osserva poi che con convenienti successive rotazioni del tipo ora considerato si può passare ad un sistema di riferimento comunque orientato, congruente a quello di partenza verificando l'isotropia e per le (2) l'emisotropia del tensore, si può concludere che le (3) sono tutte e sole le ul-

teriori relazioni tra le componenti del tensore. Le (3) sono automaticamente soddisfatte dal tensore (1), che è somma di tensori emisimmetrici. Si ottiene subito la verifica di ciò ricavando prima da (1) per le (2)

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = H + K + L, \quad S_2 = F + G - L, \quad S_3 = E - G - K, \\ S_4 = -E - F - H, \quad S_5 = C + D + L, \\ S_6 = B - D + K, \quad S_7 = -B - C + H, \quad S_8 = A + D + G, \\ S_9 = -A + C + F, \quad S_{10} = A + B + E, \end{array} \right.$$

sostituendo quindi nelle (3).

3. Le quattro relazioni (3) riducono a sei i parametri indipendenti che bastano a caratterizzare il tensore quintuplo emisimmetrico. Quindi nell'espressione (1) gli scalari indipendenti che vi compaiono si potranno ridurre a sei. Uno degli infiniti modi per conseguire lo scopo può essere quello di annullare quattro dei coefficienti  $A, B, \dots, L$  a condizione però che nessuna delle componenti (4) si annulli identicamente e che le relazioni tra esse rimangono le (3). Uno dei criteri che serve a ciò è quello di annullare i coefficienti dei quattro termini della (1) nei quali compare a fattore una componente  $\delta_{rs}$ , uno dei cui indici coincide con uno dei cinque indici  $i, k, j, h, l$  del tensore. Ad es. se si sceglie il primo indice  $i$  si vengono ad annullare i primi quattro coefficienti:  $A = B = C = D = 0$ .

Le ultime sei delle (4) divengono allora

$$S_5 = L, \quad S_6 = K, \quad S_7 = H, \quad S_8 = G, \quad S_9 = F, \quad S_{10} = E,$$

che risultano indipendenti e per mezzo delle quali le prime quattro risultano direttamente determinate dalle (3).

Corrispondentemente la (1) si riduce alla somma di sei termini:

$$(5) \quad \begin{aligned} Q_{ikjhl} = & S_5 \delta_{hl} \epsilon_{ikj} + S_6 \delta_{jl} \epsilon_{ikh} + S_7 \delta_{jh} \epsilon_{ikl} + S_8 \delta_{kl} \epsilon_{ijh} + \\ & + S_9 \delta_{kh} \epsilon_{ijl} + S_{10} \delta_{kj} \epsilon_{jhl}. \end{aligned}$$

4. Si capisce che se questa come la (1) è atta a rappresentare il più generale tensore quintuplo emisimmetrico, i dieci tensori che secondo la (1) intervengono ad esprimere il nostro tensore non possono essere indipendenti tra loro. Per trovare le relazioni che li legano, annulliamo in (1) i coefficienti dei termini i cui fattori  $\delta_{rs}$  contengono l'indice  $k$ :  $A = E = F = G = 0$ . Si ottiene allora dalle (4)

$$S_2 = -L, \quad S_3 = -K, \quad S_4 = -H, \quad S_8 = D, \quad S_9 = C, \quad S_{10} = B,$$

le rimanenti  $S_r$  risultando per le (4) definite mediante queste.

In luogo della (5) avremo ora per il nostro tensore

$$(5') \quad Q_{ikjhl} = -S_2 \delta_{hl} \varepsilon_{ijn} - S_3 \delta_{jl} \varepsilon_{ikh} - S_4 \delta_{jh} \varepsilon_{ikl} + S_8 \delta_{il} \varepsilon_{kjh} + \\ + S_9 \delta_{ih} \varepsilon_{kjl} + S_{10} \delta_{ij} \varepsilon_{khl} .$$

Questo termine deve essere identico con quello dato dalla (5).

Per le (3) nella (5') possiamo far comparire soltanto le ultime sei  $S_r$ ; identificando quindi colla (5) si trova la relazione

$$S_8 (\delta_{kl} \varepsilon_{ijh} + \delta_{hl} \varepsilon_{ikj} - \delta_{jl} \varepsilon_{ikh} - \delta_{il} \varepsilon_{kjh}) + \\ + S_9 (\delta_{kh} \varepsilon_{ijl} + \delta_{hl} \varepsilon_{ikj} - \delta_{jh} \varepsilon_{ikl} - \delta_{il} \varepsilon_{kjh}) + \\ + S_{10} (\delta_{kj} \varepsilon_{ihl} + \delta_{jl} \varepsilon_{ikh} - \delta_{jh} \varepsilon_{ikl} - \delta_{il} \varepsilon_{kjh}) = 0 .$$

Questa deve essere verificata comunque si scelgano gli scalari  $S_8, S_9, S_{10}$  ciò che importa le prime tre delle quattro relazioni seguenti:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{kl} \varepsilon_{ijh} + \delta_{hl} \varepsilon_{ikj} = \delta_{jl} \varepsilon_{ikh} + \delta_{il} \varepsilon_{kjh} , \\ \delta_{kh} \varepsilon_{ijl} + \delta_{hl} \varepsilon_{ikj} = \delta_{jh} \varepsilon_{ikl} + \delta_{il} \varepsilon_{kjh} , \\ \delta_{kj} \varepsilon_{ihl} + \delta_{jl} \varepsilon_{ikh} = \delta_{jh} \varepsilon_{ikl} + \delta_{il} \varepsilon_{kjh} , \\ \delta_{ki} \varepsilon_{jhl} + \delta_{hk} \varepsilon_{ijl} = \delta_{jk} \varepsilon_{ihl} + \delta_{kl} \varepsilon_{ijh} . \end{array} \right.$$

Con procedimento analogo annullando ad es.  $D, G, K, L$  si ottiene una nuova espressione del nostro tensore che identificata con le precedenti (5) e (5') conduce alla quarta delle (6) e a relazioni equivalenti alle (6) stesse.

Le quattro relazioni così trovate, indipendenti tra loro, e che si potrebbe dedurre direttamente, corrispondono in sostanza alle (3) e si può evidentemente per loro mezzo eliminare quattro termini nel secondo membro di (1) per avere il più generale tensore quintuplo emisotropo ridotto alla forma più semplice (5) o alle analoghe (5') ecc. in cui intervengono direttamente quali coefficienti scalari sei dei dieci valori che, col dovuto segno, danno le 60 componenti non nulle (2).

**Matematica** — *Sur les arcs frontières rendus impropres par les singularités des coefficients dans le problème de Dirichlet pour les équations du second ordre et du type elliptique à deux variables.* Nota di J. CAPOULADE, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Lorsqu'on pose le problème de Dirichlet harmonique, généralisé au sens de M. N. Wiener, pour un domaine borné, la présence dans la frontière d'arcs isolés de longueur bornée, pour le cas de l'espace à trois dimensions, de points isolés pour le cas du plan, ne modifie pas la solution. De telles portions de la frontière, ou *ensembles impropres*, continuent à jouer ce rôle, lorsqu'on substitue à l'équation de Laplace une équation de la forme:

$$\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \vec{\text{grad}} u + \beta u = 0$$

le champ vectoriel  $\vec{\alpha}$  de composantes douées de dérivées premières continues et le champ scalaire  $\beta$  continu satisfaisant à des conditions très larges. A cette propriété d'invariance des ensembles impropres dans un champ étendu s'offrant au choix de  $\vec{\alpha}, \beta$  M. Georges Bouligand a opposé les perturbations pouvant résulter du fait que  $\vec{\alpha}, \beta$  ne satisfont plus aux hypothèses précédentes, mais deviennent infinis sur certaines parties de la frontière. Il a d'abord noté que dans l'espace à trois dimensions une fonction harmonique invariante par rotation autour de  $Ox$  a pour empreinte dans un demi-plan méridien une solution de l'équation:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

tout segment  $\sigma$  de  $Ox$  qui jouait le rôle d'ensemble impropre dans l'espace jouera donc ce même rôle dans le plan, pour une solution de l'équation (1) répondant au problème de Dirichlet posé pour un domaine limité par exemple au moyen de  $\sigma$  et d'un arc simple de Jordan réunissant ses extrémités dans le demi-plan  $r > 0$ . Introduisant dans le dernier terme de (1) un facteur constant  $\lambda$ , M. G. Bouligand a montré de plus que les choses se passent de la même manière pour  $\lambda > 1$ , et qu'au contraire le segment  $\sigma$  redevient partie intégrante de la frontière réduite (ou: propre à l'efficacité des données) pour  $\lambda < 1$  <sup>(2)</sup>.

(1) Nella seduta del 15 maggio 1932.

(2) Voir les Notes de M. G. BOULIGAND sur ce sujet « Acad. Roy. Belg. », 5 série, t. 17, 1931, p. 40 et 379.

Pour prolonger ces résultats dans le sens se dégageant des articles de M. G. Bouligand, c'est-à-dire pour décider si l'équation aux dérivées partielles :

$$(2) \quad \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + A(r, \zeta) \frac{\partial u}{\partial r} + B(r, \zeta) u \right] + C(r, \zeta) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + D(r, \zeta) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$$

où les coefficients deviennent infinis sur un certain segment  $\sigma$  de l'axe des  $\zeta$  et où le coefficient de  $u$  sera supposé  $\leq 0$ , est telle que  $\sigma$  joue (dans le problème de Dirichlet correspondant posé pour un domaine du demiplan  $r \geq 0$ , à la frontière duquel appartient  $\sigma$ ) le rôle d'un ensemble propre ou impropre, il me fallait considérer, au premier membre de (2), le polynôme différentiel (relativement à l'unique variable  $r$ ) entre crochets et ramener la discrimination demandée dans le plan à une de même genre, pour l'extrémité  $r = 0$  du segment (0.1) dans un problème linéaire concernant l'équation différentielle

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + A(r, \zeta_0) \frac{du}{dr} + B(r, \zeta_0) u = \varphi(r)$$

en m'attachant de préférence au cas où cette extrémité était ou toujours propre, ou toujours impropre, pour chaque valeur du paramètre  $\zeta_0$  correspondant à un point du segment  $\sigma$  pour l'équation (2). La résolubilité formelle du problème de Dirichlet pour l'équation (3) au moyen de sa fonction de Green m'a permis de ramener le problème aux limites posé pour (2) à l'étude d'une équation intégro-différentielle solidaire <sup>(1)</sup>.

2. Pour mener à bien cette analyse dont j'ai résumé les premiers résultats dans une Note récente <sup>(2)</sup>, j'ai dû définir une classe particulière d'équations différentielles (3), dont la forme conditionne celle des équations (2) correspondantes. Cette classe ( $\alpha$ ) comprend les équations :

$$(E_\alpha) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{a_0 + \lambda(r)}{r} \frac{du}{dr} + \frac{b_0 + \mu(r)}{r^2} u = 0$$

dans lesquelles, pour  $0 \leq r \leq 1$  :

$$1^\circ b_0 + \mu(r) \leq 0 \quad ; \quad 2^\circ \lambda(r) \text{ et } \mu(r)$$

sont continues et tendent vers zéro avec  $r$  ; dans les cas un peu spéciaux :

$$1^\circ b_0 = 0 \text{ avec } \mu(r) \neq 0 \quad ; \quad 2^\circ b_0 = 0, \mu(r) \equiv 0, a_0 = 1$$

(1) M. G. BOULIGAND a utilisé le même principe au fascicule XI du « Mémorial des Sciences Math. » et dans son Mémoire d'avril-mai 1931 des « Annales de l'École Normale ».

(2) CAPOULADE, « Compte-rendus Ac. Sc. », 194, 1932, p. 426.



elles sont en outre supposées développables en séries de puissances de  $x$ . Pour ces équations et le segment  $(\varepsilon_n, 1)$  le problème de Dirichlet a au plus une solution.

L'étude au voisinage de l'origine des intégrales d'une  $E_\alpha$  permet de distinguer deux sous-classes  $\alpha'$  et  $\alpha''$ : 1° chaque  $E_{\alpha'}$  n'a que des solutions continues à l'origine, alors  $b_0 = 0$  et  $a_0 < 1$ ; 2° chaque  $E_{\alpha''}$  n'admet, à un facteur près<sup>(1)</sup> qu'une solution bornée continue à l'origine, les autres solutions étant infinies en ce point, ce dernier cas est le plus général.

Pour la sous-classe  $(\alpha'')$  on a les propriétés suivantes:

- 1° la solution bornée à l'origine n'est pas nulle pour  $r = 1$ ;
- 2° la solution nulle pour  $r = 1$  est infinie à l'origine;
- 3° la solution nulle pour  $r = \varepsilon_n$  tend vers la solution bornée à l'origine quand  $\varepsilon_n$  s'évanouit.

En posant le problème de Dirichlet généralisé à la Wiener pour le segment  $(0, 1)$  j'ai alors prouvé que l'origine est propre pour une équation de la classe  $(\alpha')$  impropre pour une équation de la classe  $(\alpha'')$ .

3. Soient  $u_{\varepsilon_n}(r)$  la solution d'une  $E_\alpha$  nulle pour  $r = \varepsilon_n$ ;  $u_1(r)$  sa solution nulle pour  $r = 1$ ; la fonction de Green  $G_n(r, \rho)$  du segment  $(\varepsilon_n, 1)$  est la fonction unique:

(4)  $\lambda u_{\varepsilon_n}(r)$  pour  $0 \leq r \leq \rho$ ,  $\mu u_1(r)$  pour  $\rho \leq r \leq 1$  telle que

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda u_{\varepsilon_n}(\rho) - \mu u_1(\rho) = 0 \\ \lambda u'_{\varepsilon_n}(\rho) - \mu u'_1(\rho) = 1. \end{cases}$$

Quand  $\varepsilon_n$  s'évanouit,  $G_n$  tend vers une fonction limite  $G$  définie en core par (4) et (5) mais où  $u_{\varepsilon_n}(r)$  est remplacée d'après la propriété 3° du n. 2 par la solution bornée à l'origine. La convergence est uniforme dans tout intervalle  $(\varepsilon, 1)$  si petit que soit  $\varepsilon$ ; mais elle ne l'est pas forcément à l'origine. La fonction  $G$  nulle en général pour  $r = 0$  ne l'est plus lorsque  $b_0 = 0$ .

Soit une équation  $E_\alpha$  avec un second membre  $\varphi(r) = r^{-p} \varphi_1(r)$ ;  $\varphi_1(r)$  continue dans l'intervalle  $0 \leq r \leq 1$ .

$$u_n(r) = - \int_{\varepsilon_n}^1 \varphi(\rho) G_n(r, \rho) d\rho$$

est la solution unique nulle aux extrémités du segment  $(\varepsilon_n, 1)$ . L'étude de l'allure de  $G$  pour  $\rho = 0$  et  $r = \rho = 0$  m'a permis d'enoncer le résultat suivant:

(1) Dans la suite nous sous-entendrons: « à un facteur près ».

La solution  $y_n$  tend quand  $\varepsilon_n$  s'évanouit vers une fonction limite

$$u(r) = - \int_0^1 \varphi(p) G(r, p) dp$$

$$1^\circ \text{ bornée pour } \begin{cases} p < 2, & \text{si } b_0 = 0 \\ p \leq 2, & \text{si } b_0 < 0 \end{cases}$$

2° finie pour chaque  $r$  de l'intervalle  $0 < r \leq 1$  et infinie à l'origine

$$\text{pour } \begin{cases} 2 \leq p < 1 + a_0 & \text{si } b_0 = 0 \\ 2 < p < 2 - \beta & \text{si } b_0 < 0. \end{cases}$$

Soit alors à résoudre le problème de Dirichlet pour le segment  $(0, 1)$ , l'équation  $E_\alpha$  avec second membre  $\varphi(r)$  (dans lequel  $p < 2$  si  $b_0 = 0$ ,  $p \leq 2$  si  $b_0 < 0$ ) et les valeurs  $k$  et zéro attachées aux extrémités, j'ai :

$$u(r) = v(r) - \int_0^1 \varphi(p) G(r, p) dp$$

avec  $v(r)$  solution de l'équation sans second membre prenant, les valeurs  $k$  et zéro, or : si pour cette équation, l'origine est propre,  $v(r) \neq 0$  ; si l'origine est impropre,  $v(r) = 0$ , d'où :

*La nature de l'origine est la même pour une équation  $E_\alpha$  sans second membre et une équation  $E_\alpha$  avec second membre  $\varphi(r)$  du type précédent, p vérifiant les conditions ci-dessus.*

4. Passant du cas d'une dimension à celui du plan, je suis conduit au théorème suivant :

*Etant donnée l'équation :*

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + A(r, \chi) \frac{\partial u}{\partial r} + B(r, \chi) u + C(r, \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + D(r, \chi) \frac{\partial u}{\partial \chi} = 0$$

*dans laquelle pour la région :  $0 \leq \chi \leq Z_1$ ,  $0 \leq r \leq 1$*

*1°  $C \geq m$  ( $m > 0$  fixe),  $B \leq 0$*

*2°  $C - \varphi_1(r)$ ,  $D - \varphi_2(r)$  sont des fonctions continues ;  $\varphi_1(r)$  et  $\varphi_2(r)$  continues pour  $0 \leq r \leq 1$  ayant pour  $r = 0$  un ordre d'infinitude inférieur à 2 <sup>(1)</sup>*

*3°  $A$  et  $B$  pour  $\chi_0$  quelconque sont telles que l'équation :*

$$(7) \quad \frac{d^2 u}{dr^2}(r, \chi_0) + A(r, \chi_0) \frac{du}{dr}(r, \chi_0) + B(r, \chi_0) u(r, \chi_0) = 0$$

*est une équation de la classe  $\alpha$  appartenant toujours à une même sous-classe.*

(1) Pouvant même être égal à 2 si dans  $B(r, \chi_0) = \frac{b_0 + \mu(r, \chi_0)}{r^2}$ ,  $b_0 < 0$ .

La nature du segment utile  $\sigma$  de l'axe  $z'z$  pour l'équation (6) est du même genre que la nature de l'origine pour l'équation (7).

En effet je prends pour domaine le rectangle OPBA tel que P sur Or a pour abscisse  $l$  et A sur  $Oz$  pour abscisse  $Z_1$  et je montre d'abord l'unicité de la solution pour ce domaine et l'équation (6). Je considère ensuite la solution  $u(r, z)$  correspondant à la valeur  $k$  sur le côté OA et à la valeur zéro sur les trois autres côtés, elle vérifie l'équation intégral-différentielle:

$$u(r, z) = v(r, z) + \int_0^1 \left[ C(\rho, z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\rho, z) + D(\rho, z) \frac{\partial u}{\partial z}(\rho, z) \right] G(r, \rho) d\rho.$$

Pour le segment de droite  $0 \leq r \leq 1$  d'ordonnée  $r$ ,  $v(r, z)$  est la solution de (7) prenant aux extrémités les valeurs  $k$  et zéro et  $G(r, \rho)$  la fonction de Green correspondante.

Si l'origine est propre pour (7),  $v(r, z)$  est différent de zéro, dont  $\sigma$  est propre; si l'origine est impropre pour (7),  $v(r, z) \equiv 0$  et  $\sigma$  est impropre;  $u(r, z)$  est alors identiquement nulle.

5. Etant donnée une équation elliptique  $\mathcal{E}$  du genre de l'équation (6) une transformation biunivoque transforme  $\mathcal{E}$  en  $\mathcal{E}_1$  elliptique et un segment de droite  $\sigma$  impropre pour  $\mathcal{E}$  en une portion de courbe  $\sigma_1$  impropre pour  $\mathcal{E}_1$ . Soit alors un domaine  $\delta$  simplement connexe admettant dans sa frontière un segment de droite  $\sigma$  impropre pour  $\mathcal{E}$  et soit  $\delta_1$  un autre domaine simplement connexe; la représentation conforme de  $\delta$  sur  $\delta_1$  fait correspondre à  $\sigma$  une partie  $\sigma_1$  de la frontière de  $\delta_1$  et à  $\mathcal{E}$  une équation  $\mathcal{E}_1$  pour laquelle  $\sigma_1$  est impropre: une portion de frontière d'un domaine plan est donc impropre pour une équation elliptique convenablement choisie.

6. J'ai résolu, dans un cas particulier étendu, le problème inverse: Etant donnée une équation elliptique présentant sur la frontière d'un domaine des singularités, déterminer les parties de cette frontière qui sont impropres.

Soit  $\delta$  un domaine dont la frontière est formée d'arcs de courbes admettant des développées et une équation de la forme:

$$(8) \quad \Delta u + \frac{\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \cdot u}{d} + \frac{\gamma}{d^2} u = 0$$

dans laquelle nous supposons remplies ces hypothèses:

1°  $\gamma \leq 0$  continue, 2°  $\vec{v}$  champ vectoriel continu; ( $d$  représente la plus courte distance du point d'évaluation de  $u$  à la frontière).

Soit  $\widetilde{AD}$  l'arc avec lequel se confond la frontière au voisinage d'un point M, supposons p. ex. que les points voisins appartenant au domaine

soient dans la concavité; substituons à  $\delta$  le domaine ABCD limité par deux normales et l'arc  $\widetilde{CD}$  parallèle à  $\widetilde{AB}$  et transportons les axes en M l'axe Mr prenant la direction de la normale intérieure. Soit  $u(r, z)$  la solution du problème de Dirichlet pour l'équation (8), le domaine ABCD est des valeurs données sur la frontière. Tout point P du domaine est déterminé par  $R = \overline{Mp}$  et  $Z = \widetilde{pP}$ , l'arc  $\widetilde{pP}$  étant parallèle à l'arc frontière et  $p$  étant son intersection avec l'axe Mr. La solution  $u(r, z)$  exprimée à l'aide de R et Z devient  $U(R, Z)$  solution de :

$$(9) \quad \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{A - \frac{R}{\rho}}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\Gamma}{R^2} U \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \frac{B}{R} \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

$A(R, Z)$ ,  $B(R, Z)$  expressions des composantes de  $\vec{v}$  suivant la normale et la tangente à l'arc  $\widetilde{pP}$  en P;  $\rho$  distance de P au centre de courbure.

Dans le plan ROZ on peut faire correspondre au domaine ABCD un domaine rectangulaire et chercher comment se comport l'arc  $\widetilde{AD}$  pour  $u(r, z)$  solution de (8) revient à la même question pour la portion correspondante de OZ, à l'égard de  $U(R, Z)$  solution de (9).

D'où ces résultats: soit  $a_0$  la composante de  $\vec{v}$  en un point de l'arc sur la normale en ce point (orientée vers la concavité) et  $b_0$  la valeur de  $\gamma$  en ce même point:

1<sup>er</sup> Cas:  $\gamma \neq 0$ ,  $b_0 < 0$  sur  $\widetilde{AD}$  l'arc est impropre;

2<sup>d</sup> Cas:  $\gamma = 0$  l'arc est propre pour  $a_0 < 1$ , impropre pour  $a_0 > 1$ .

**Matematica (Analisi).** — *Nuova dimostrazione della formula fondamentale per i funzionali analitici lineari.* Nota di L. FANTAPPIÈ, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. SEVERI.

I. In una mia Memoria dei Lincei <sup>(2)</sup> definisco un funzionale lineare  $F[y(t)]$ , analitico localmente, con le due condizioni

a) la funzione  $f(\alpha) = F_t[y(t, \alpha)]$  deve essere analitica, se la  $y(t, \alpha)$  è funzione analitica di  $\alpha$ , oltre che di  $t$ ; più precisamente  $f(\alpha)$  deve essere olomorfa in un campo  $\Omega$ , se per  $\alpha$  in  $\Omega$  la funzione  $y(t, \alpha)$  si mantiene entro un intorno  $(r)$  di una funzione  $y_0(t)$  ove il funzionale  $F$  è regolare (vedi F. A., cap. I, n. 10 e 11)

$$b) \quad F[y_1(t) + y_2(t)] = F[y_1(t)] + F[y_2(t)]$$

(proprietà distributiva rispetto alla somma), da cui, per la a), segue la proprietà più generale

$$b)' \quad F[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 F[y_1(t)] + \alpha_2 F[y_2(t)]$$

per  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  costanti complesse qualunque.

Da queste due proprietà caratteristiche si deducono le altre seguenti:

I) Nelle condizioni a) si ha anche

$$\frac{d}{d\alpha} F_t[y(t, \alpha)] = F_t \left[ \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]$$

e, più in generale,

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} F_t[y(t, \alpha)] = F_t \left[ \frac{\partial^n y(t, \alpha)}{\partial \alpha^n} \right].$$

II) Introdotta la cosiddetta *funzione indicatrice*  $v(\alpha)$  del funzionale lineare  $F$  mediante la formula

$$(I) \quad v(\alpha) = F_t \left[ \frac{1}{t - \alpha} \right]$$

e indicata con  $B$  la regione del piano-sfera complesso, ove questa funzione è definita, con  $A$  l'insieme (chiuso) di punti complementare di  $B$  (in  $A$  dunque

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) *I funzionali analitici*, « Mem. Lincei », serie 6<sup>a</sup>, vol. III, 1928-30; questa Memoria sarà indicata nel seguito con F. A.



la  $v(\alpha)$  non risulta definita), si ha che il campo di definizione  $H$  del funzionale lineare  $F$  è costituito da tutte e sole le funzioni analitiche  $y(t)$ , regolari nei punti dell'insieme chiuso  $A$ . Per la proprietà I) si ha poi in particolare, derivando la (1),

$$(2) \quad \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}v}{d\alpha^{n-1}} = F_t \left[ \frac{1}{(t-\alpha)^n} \right]$$

formula che ci dà il valore di  $F$  per le più semplici funzioni razionali.

III) Infine, il valore di  $F$  per una qualunque funzione  $y(t)$  del campo  $H$  è dato dalla formula integrale

$$(3) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t) dt$$

ove  $C$  è una curva chiusa del piano-sfera complesso (eventualmente composta di più curve chiuse parziali) che racchiude nell'interno tutti i punti non regolari della  $y(t)$ , ma lascia all'esterno tutti i punti dell'insieme chiuso  $A$ , ove la  $v$  non è definita (curva « separatrice »).

2. Data l'importanza di questa formula (3) per l'intera teoria dei funzionali analitici, anche non lineari, e l'interesse da essa suscitato in altri Autori<sup>(1)</sup>, intendo ora darne una dimostrazione estremamente più breve di quella esposta nella Memoria citata. In questa, infatti, la dimostrazione poggia su un teorema dato nel cap. I, n. 14 e si svolge nei primi numeri del cap. II, dal n. 20 al n. 33 inclusi.

Alla formula (3) si può invece pervenire molto più direttamente osservando che, per il fatto che una qualunque funzione  $y(t)$  del campo  $H$  di definizione di un funzionale lineare  $F$  ha tutti i suoi punti non regolari racchiusi entro un numero finito  $m$  di cerchi  $C_j$  della regione  $B$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) (vedi F. A., n. 27), essa può sempre considerarsi la somma di  $m$  funzioni  $y_j(t)$ , ciascuna regolare fuori di  $C_j$ <sup>(2)</sup>, quindi anche nei punti di  $A$  e perciò del campo  $H$ , cioè

$$(4) \quad y(t) = \sum_{j=1}^m y_j(t).$$

(1) CACCIOPPOLI, *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche*, « Rend. Lincei » serie 6<sup>a</sup>, vol. XIII, 1° sem. 1931. In questa Nota l'A. parte, per altro, da definizioni sostanzialmente diverse dalle mie, come ho mostrato in una mia Nota di risposta *Sull'espressione generale dei funzionali analitici lineari* (questi « Rend. », serie 6<sup>a</sup>, vol. XIV, 2° sem. 1931); P. NALLI, *Sui funzionali analitici*, « Boll. dell'U. M. I. », anno XI, n. 1 (febbraio 1932, X). A questa Nota fa riscontro una mia risposta in corso di pubblicazione nello stesso Bollettino.

(2) Questa asserzione si dimostra subito nel modo seguente. Indichiamo con  $C$  la curva (eventualmente composta di più curve chiuse) che limita la regione dei punti interni ai cerchi  $C_j$ , per i quali supponiamo inoltre che ciascuno non sia interamente

Ma per ognuna delle funzioni  $y_j(t)$  si può prendere come curva separatrice un circolo  $C'_j$ , entro  $B$ , che contenga  $C_j$ , o anche la curva  $C$  che limita complessivamente la regione dei punti interni ai circoli  $C'_j$ . Basterà allora dimostrare la formula (3) nel caso particolare di funzioni, *per cui si possa trovare un circolo come curva separatrice*, perchè, nel caso generale di una funzione  $y(t)$  qualunque si ha poi, dalla (4),

$$\begin{aligned} F[y(t)] &= \sum_j^m F[y_j(t)] = \sum_j^m \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_j} v(t) y_j(t) dt = \\ &= \sum_j^m \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y_j(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) \left\{ \sum_j^m y_j(t) \right\} dt \end{aligned}$$

ricoperto dai rimanenti (altrimenti potrebbe sopprimersi, restando la regione anzidetta sempre la stessa). Sul contorno  $\bar{C}_1$  di  $C_1$  consideriamo una funzione  $\varphi_1(t)$ , uguale a  $y(t)$  nei tratti che  $\bar{C}_1$  ha eventualmente comuni con  $C$ , arbitraria, ma integrabile, nei tratti rimanenti, e poniamo

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}_1} \frac{\varphi_1(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

funzione certo regolare fuori di  $C_1$ . Consideriamo ora il cerchio  $C_2$ , privato eventualmente della lunula che può avere in comune con  $C_1$ , e indichiamo con  $\bar{C}_2$  il contorno della regione rimanente (certo contenuta in  $C_2$ ). Su  $\bar{C}_2$  prendiamo una funzione  $\varphi_2(t)$ , uguale a  $y(t)$ , nei tratti che  $\bar{C}_2$  ha eventualmente in comune con  $C$ , uguale a  $\varphi_1(t)$ , nei tratti eventualmente comuni con  $\bar{C}_1$ , e arbitraria, ma integrabile, nei tratti rimanenti; anche la funzione

$$y_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}_2} \frac{\varphi_2(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

sarà regolare fuori di  $\bar{C}_2$ , e quindi certo fuori di  $C_2$ . Così seguitando potremo costruire  $m$  funzioni  $y_j(t)$ , ciascuna regolare fuori di  $C_j$ . Ma la loro somma, certo regolare fuori di  $C$ , sarà data, per ogni valore di  $t$  in questa regione, dalla espressione

$$\sum_j^m y_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j^m \int_{\bar{C}_j} \frac{\varphi_j(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

e poichè le integrazioni lungo i cammini che non appartengono a  $C$ , percorsi ognuno due volte in versi opposti, si eliminano reciprocamente, per il modo come abbiamo scelto le funzioni  $\varphi_j$ , resterà in definitiva

$$\sum_j^m y_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau = y(t)$$

come volevasi dimostrare. Se inoltre  $y(t)$  è monodroma in tutto il piano e le funzioni  $\varphi_j$ , nei tratti in cui sono arbitrarie, si prendono integrabili, ma *non analitiche*, si può esser sicuri che tutte le funzioni  $y_j(t)$  risultano pure monodrome in tutto il piano.

cioè

$$F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t) dt$$

che non è altro che la (3), racchiudendo  $C$ , che è entro  $B$ , tutti i cerchi  $C_j$  e quindi tutti i punti non regolari di  $y(t)$ .

La dimostrazione della formula generale (3) per una funzione qualunque  $y(t)$  di  $H$  è dunque ricondotta al caso particolare che la curva separatrice sia un circolo, caso che ora passiamo a trattare.

3. Sia perciò  $y(t)$  una funzione che abbia tutti i suoi punti non regolari interni a un circolo  $C$  della regione  $B$ . Possiamo sempre supporre, variando eventualmente di un poco il raggio sferico, che il circolo  $C$  non passi per il punto  $t = \infty$ , il quale sarà perciò o esterno o interno a  $C$ .

Indicando allora con  $\alpha_0$  il centro di  $C$  sulla sfera complessa  $t$  e con  $r$  il suo raggio sferico, possiamo osservare che tutte le funzioni dell'intorno ( $r$ ) di una funzione  $y_0(t)$ , singolare solo per  $t = \alpha_0$ , (tra cui la  $y(t)$ ), avranno pure i loro punti non regolari entro  $C$  e quindi in  $B$ , e saranno perciò regolari per il funzionale lineare  $F$ ; questo sarà dunque certo regolare in tutto l'intorno ( $r$ ) di  $y_0(t)$ .

Consideriamo ora il caso che  $C$  lasci all'esterno il punto  $t = \infty$ . Al circolo  $C$  della sfera complessa corrisponderà allora, come immagine sul piano complesso  $t$ , un altro circolo  $C_1$ , nel cui interno (regione finita del piano) cadranno pure tutti i punti non regolari della funzione  $y(t)$  e di tutte le funzioni dell'intorno ( $r$ ) di  $y_0(t)$ . Se indichiamo con  $\alpha_1$  il centro di  $C_1$  e con  $R$  il suo raggio (nel piano complesso), essendo  $y(t)$  regolare su  $C_1$  e all'esterno (in particolare, anche per  $t = \infty$ , quindi  $y(\infty) = 0$ ), potremo certo trovare nel piano complesso un altro cerchio concentrico  $C'_1$ , un poco più ristretto, di raggio  $R' < R$ , sul quale e all'esterno la  $y(t)$  sia ancora regolare, cioè regolare per

$$(5) \quad |t - \alpha_1| \geq R', \quad R' < R.$$

Poniamo allora

$$(6) \quad t' = \frac{t - \alpha_1}{\epsilon} + \alpha_1$$

e consideriamo la linea analitica

$$(7) \quad y(t, \epsilon) = y(t') = y\left(\frac{t - \alpha_1}{\epsilon} + \alpha_1\right)$$

da cui, per  $\epsilon = 1$ , si ha

$$(8) \quad y(t, 1) = y(t).$$

La funzione  $y(t')$  sarà certo regolare quando  $t'$  si mantiene su  $C_1$  o all'esterno, se cioè si ha  $|t' - \alpha_1| \geq R'$ , quindi, per la (6), la  $y(t, \varepsilon)$  sarà regolare per i valori di  $t$  che soddisfano alla disequaglianza

$$(9) \quad |t - \alpha_1| \geq \varepsilon |R'.$$

Se scegliamo  $\varepsilon$  in modo che sia  $|\varepsilon| R' < R$ , cioè

$$(10) \quad |\varepsilon| < \frac{R}{R'} \quad \left( \frac{R}{R'} > 1 \right)$$

possiamo dunque affermare che, per questi valori di  $\varepsilon$ , interni al cerchio (10) (contenente, in particolare il valore  $\varepsilon = 1$ ), la funzione corrispondente sulla linea analitica (7) è certo regolare su  $C_1$  (o  $C$ ) e all'esterno, e si mantiene quindi sempre entro l'intorno ( $r$ ) della funzione  $y_0(t)$ , in cui il funzionale lineare  $F$  è regolare.

Ma allora, essendo  $F$  analitico (proprietà  $a$ )), la funzione

$$(11) \quad f(\varepsilon) = F_t[y(t, \varepsilon)]$$

sarà certo olomorfa per  $\varepsilon$  entro il cerchio (10), ove è pure olomorfa la funzione

$$(12) \quad g(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t, \varepsilon) dt.$$

Facciamo ora vedere che queste due funzioni di  $\varepsilon$ , ambedue olomorfe entro il cerchio (10), coincidono; basterà perciò mostrare che esse e tutte le corrispondenti derivate coincidono nel centro  $\varepsilon = 0$  del cerchio. E infatti, essendo  $y(t)$  regolare sul cerchio  $C_1$  e all'esterno, essa sarà ivi rappresentabile con una serie di Laurent, totalmente convergente

$$(13) \quad y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(t - \alpha_1)^{n+1}}.$$

Ma allora anche le funzioni  $y(t, \varepsilon)$  della linea analitica (7) potranno rappresentarsi con la serie di Laurent,

$$(14) \quad y(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(t - \alpha_1)^{n+1}} \varepsilon^{n+1}$$

totalmente convergente nella stessa regione, per ogni valore di  $\varepsilon$  entro il cerchio (10); quindi avremo

$$\left( \frac{\partial^n y(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n} \right)_{\varepsilon=0} = \frac{n! a_{n-1}}{(t - \alpha_1)^n}.$$

Dunque, per la proprietà (I) e per la (2), si ha

$$\left(\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = F\left[\frac{n! a_{n-1}}{(t-\alpha_1)^n}\right] = na_{n-1} \left(\frac{d^{n-1} v}{d\alpha^{n-1}}\right)_{\alpha=\alpha_1}$$

e, per la formula di Cauchy,

$$\left(\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{n! a_{n-1}}{2\pi i} \int_C \frac{v(t)}{(t-\alpha_1)^n} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) \left(\frac{\partial^n y(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} dt = \left(\frac{d^n g}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) mentre, per  $\varepsilon = 0$ , è  $y(t, 0) = y(\infty) = 0$ , e quindi anche  $f(0) = g(0) = 0$ .

Poichè i valori di  $f(\varepsilon)$  e  $g(\varepsilon)$ , e quelli delle derivate dello stesso ordine, coincidono nel centro  $\varepsilon = 0$  del cerchio (10), le due funzioni coincideranno in tutto il cerchio; sarà cioè, per  $\varepsilon$  in (10),

$$(15) \quad F_t[y(t, \varepsilon)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t, \varepsilon) dt$$

da cui, per  $\varepsilon = 1$ , tenendo conto della (8), si ha finalmente

$$(16) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t) dt$$

che è appunto la formula (3), a cui volevamo arrivare.

Questo procedimento vale nel caso che C lasci all'esterno il punto  $t = \infty$ . Se invece C contiene nell'interno  $t = \infty$ , si può svolgere una trattazione perfettamente analoga, sostituendo alla linea analitica (7) l'altra linea analitica  $y(t, \varepsilon) = y\{\varepsilon(t-\alpha_1) + \alpha_1\}$  e serie di potenze ordinarie in  $t-\alpha_1$  alle serie di Laurent (13) e (14), dopo avere introdotto l'indicatrice simmetrica  $w(t)$  del funzionale F. Si arriva con ciò ancora allo stesso risultato (16).

La formula (3) risulta così dimostrata, quando per curva separatrice si possa scegliere un circolo, e quindi anche *assolutamente in generale*, per ciò che è stato detto alla fine del n. 2.



**Matematica.** — *Un'osservazione su di un Teorema di Carathéodory per le funzioni armoniche.* Nota di L. GEYMONAT, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. FUBINI.

In una importante Memoria <sup>(2)</sup>, nella quale, fra l'altro, si giunge ad una bella generalizzazione del Teorema di Landau, C. Carathéodory e L. Fejér hanno dimostrato il seguente teorema:

« Siano

$$a_0, a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n$$

$(2n+1)$  costanti reali, delle quali  $a_0 > 0$  e almeno una delle seguenti diversa da zero. Allora il raggio del massimo cerchio in cui una funzione armonica

$$U(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} r^v (a_v \cos v\vartheta + \bar{a}_v \sin v\vartheta)$$

il cui sviluppo comincia con i coefficienti dati, può essere insieme regolare e positiva, è eguale alla minima radice positiva dell'equazione in  $\beta$ :

$$D[2a_0, \beta(a_1 + i\bar{a}_1), \beta^2(a_2 + i\bar{a}_2), \dots, \beta^n(a_n + i\bar{a}_n)] = 0$$

ove si sia posto

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{-n} & \dots & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix} = D[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$$

essendo

$$\alpha_k = a_k + i\bar{a}_k, \quad \alpha_{-k} = a_k - i\bar{a}_k$$

ed  $\alpha_0$  un numero reale ».

Nella presente Nota generalizzeremo tale teorema, determinando il

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) *Ueber den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landau'schen Satz*, « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », XXXII, pp. 218-239.

raggio di un cerchio con le medesime proprietà del precedente, nel caso però che si siano determinati *a priori* soltanto i coefficienti

$$a_0, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_{2n}, \bar{a}_{2n}$$

e non i coefficienti

$$a_1, \bar{a}_1, a_3, \bar{a}_3, \dots, a_{2n-1}, \bar{a}_{2n-1}$$

Dimostreremo cioè il seguente teorema:

« Siano date le costanti reali:

$$(1) \quad a_0, a_2, \bar{a}_2, a_4, \dots, a_{2n}, \bar{a}_{2n}$$

delle quali  $a_0 > 0$ , ed almeno una delle seguenti diversa da zero. Consideriamo la classe di tutte le funzioni armoniche i cui coefficienti di posto  $1^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 8^\circ, 9^\circ$ , ecc., coincidono rispettivamente con  $a_0, a_2, \bar{a}_2, a_4, \dots$ ; i coefficienti di posto  $2^\circ, 3^\circ, 6^\circ, 7^\circ$ , ecc., restando affatto arbitrari. Allora il raggio  $R$  del massimo cerchio, avente per centro l'origine, in cui una funzione di tale classe può essere insieme regolare e positiva, è la minima radice positiva dell'equazione in  $\beta$ :

$$(2) \quad D[2a_0, 0, \beta^2(a_2 + i\bar{a}_2), 0, \dots, 0, \beta^{2n}(a_{2n} + i\bar{a}_{2n})] = 0 \text{ »}.$$

In altre parole: se in luogo degli zeri della (2) poniamo dei coefficienti  $a_1, \bar{a}_1, a_3, \bar{a}_3, \dots$  arbitrari, la minima radice positiva dell'analogha equazione non può risultare maggiore della minima radice positiva della (2).

Notiamo innanzi tutto che: se la curva d'ordine  $4n$  dell'iperspazio  $S_{4n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{2n})$ , data dalle equazioni parametriche:

$$\gamma \begin{cases} x_1 = \cos \vartheta, x_2 = \cos 2\vartheta, \dots, x_{2n} = \cos 2n\vartheta \\ \bar{x}_1 = \sin \vartheta, \bar{x}_2 = \sin 2\vartheta, \dots, \bar{x}_{2n} = \sin 2n\vartheta \end{cases}$$

contiene un punto  $P'$  di coordinate:

$$c'_1, c'_2, \dots, c'_{2n} \quad ; \quad \bar{c}'_1, \bar{c}'_2, \dots, \bar{c}'_{2n}$$

essa contiene anche il punto  $P''$  di coordinate:

$$c''_1 = -c'_1, c''_2 = +c'_2, c''_3 = -c'_3, \dots; \bar{c}''_1 = -\bar{c}'_1, \bar{c}''_2 = +\bar{c}'_2, \bar{c}''_3 = -\bar{c}'_3, \dots$$

Infatti, se la curva  $\gamma$  passa per il punto  $P'$  in corrispondenza al valore  $\vartheta'$  del parametro  $\vartheta$ , essa passerà per il punto  $P''$  in corrispondenza al valore  $\vartheta'' = \vartheta' + \pi$ . Ne segue che il minimo corpo convesso  $K_{4n}^{(1)}$  che contiene la curva  $\gamma$ , deve essere simmetrico rispetto allo spazio lineare:

$$(3) \quad x_1 = x_3 = x_5 = \dots = x_{2n-1} = \bar{x}_1 = \bar{x}_3 = \bar{x}_5 = \dots = \bar{x}_{2n-1} = 0.$$

(1) Un analogo corpo convesso  $K_{2n}$  fu considerato dal CARATHÉODORY nella Memoria: *Ueber den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, «Rendic. Circolo Matem. di Palermo», XXXII, pp. 193-218.

Consideriamo ora la curva dello  $S_{4n}$ , descritto, al variare del parametro  $\beta$ , dal punto:

$$(\sigma) \quad 0, 0, \frac{a_2}{2 a_0} \beta^2, \frac{\bar{a}_2}{2 a_0} \beta^2, 0, \dots, \frac{\bar{a}_{2n}}{2 a_0} \beta^{2n}$$

e ragioniamo su di essa con metodo analogo a quello seguito dal Carathéodory e dal Fejér [ved. Memoria citata nella nota <sup>(2)</sup> di pag. 856] per lo studio della curva descritta dal punto

$$\frac{a_1}{2 a_0} \beta, \frac{\bar{a}_1}{2 a_0} \beta, \frac{a_2}{2 a_0} \beta^2, \dots, \frac{\bar{a}_n}{2 a_0} \beta^n.$$

La curva  $(\sigma)$  passa per l'origine e giace nello spazio (3). Facilmente si vede che essa, per un valore di  $\beta$  abbastanza grande, passa per un punto esterno al corpo  $K_{4n}$ ; dunque essa ne taglierà per la prima volta la frontiera in corrispondenza ad un valore  $\bar{\beta}$  del parametro, valore che, per noti ragionamenti, è dato dalla minima radice positiva dell'equazione in  $\beta$  (2).

Ora in luogo dei coefficienti non prefissati, di posto  $2^\circ, 3^\circ, 6^\circ, 7^\circ$ , ecc., poniamo delle costanti qualsiasi  $a_1, \bar{a}_1, a_3, \bar{a}_3, \dots$ , e consideriamo la curva descritta, al variare del parametro positivo  $\beta$ , dal punto:

$$(\sigma') \quad \frac{a_1}{2 a_0}, \frac{\bar{a}_1}{2 a_0} \beta, \frac{a_2}{2 a_0} \beta^2, \dots, \frac{\bar{a}_{2n}}{2 a_0} \beta^{2n}.$$

In corrispondenza ad ogni punto  $P'$  della curva  $(\sigma')$  consideriamo il punto  $P$  della curva  $(\sigma)$ , determinato dal medesimo valore di  $\beta$ . È facile vedere che, se il punto  $P'$  giace dentro  $K_{4n}$  oppure sulla sua frontiera, anche  $P$  giace dentro  $K_{4n}$ . Infatti, se  $K_{4n}$  contiene  $P'$ , contiene anche  $P''$ , simmetrico di  $P'$  rispetto allo spazio lineare (3); dunque, essendo un corpo convesso, contiene anche il segmento  $P'P''$ , e perciò il punto  $P$  che giace su di esso.

Ne segue che, se  $\bar{\beta}$  è il primo valore in corrispondenza al quale la curva  $(\sigma)$  taglia la frontiera di  $K_{4n}$ , non vi potrà essere nessun valore  $\beta'$ , ove  $\beta' > \bar{\beta}$ , in corrispondenza al quale una delle  $(\sigma')$  tagli per la prima volta la frontiera in questione. Cioè, detta  $\beta'$  la minima radice positiva dell'equazione in  $\beta$

$$(4) \quad D[2 a_0, \beta(a_1 + i\bar{a}_1), \beta^2(a_2 + i\bar{a}_2), \dots, \beta^{2n}(a_{2n} + i\bar{a}_{2n})] = 0$$

essa dovrà essere minore o al più eguale alla minima radice positiva dell'equazione (2).

Ora, per quanto dimostrarono il Carathéodory ed il Fejér nella Memoria citata, ved. nota <sup>(2)</sup> di pag. 856, si sa che, fissate comunque le costanti  $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \dots$ , il raggio  $R'$  del massimo cerchio in cui esiste qualche

funzione, armonica, regolare, e positiva, il cui sviluppo comincia con i coefficienti

$$a_0, a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_{2n}, \bar{a}_{2n}$$

è  $R' = \beta'$ .

Ma, per quanto s'è detto poco fa, è  $\beta' \leq \bar{\beta}$ ; dunque  $R' \leq \bar{\beta}$ .

Se però scegliamo, in particolare,  $a_1 = \bar{a}_1 = a_3 = \dots = a_{2n-1} = \bar{a}_{2n-1} = 0$ , allora, s'è visto, la minima radice positiva dell'equazione corrispondente, è appunto  $\bar{\beta}$ . Quindi l'insieme dei raggi  $R'$ , ottenuti in corrispondenza alle infinite scelte possibili dei coefficienti per ipotesi lasciati arbitrari, ammette per massimo proprio il valore  $\bar{\beta}$ .

Cioè il raggio  $R$  cercato è proprio  $\bar{\beta}$ , funzione dei soli coefficienti  $a_0, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_{2n}, \bar{a}_{2n}$ , prefissati, dato nel modo sopra detto dall'equazione (2).

**Matematica.** — *Maggiorazione dell'errore d'approssimazione nel metodo d'integrazione Cauchy-Lipschitz dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.* Nota di M. PICONE, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

Come era prevedibile le questioni sottoposte, dalle Scienze sperimentali e dalla Tecnica, all'Istituto di Calcolo del Consiglio nazionale delle Ricerche, portano frequentemente alla preliminare integrazione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie e si sono perciò dovuti sperimentare nell'Istituto i vari metodi già escogitati per tale integrazione e studiarne di nuovi per ricercarne uno che maggiormente risponda alle esigenze della pratica, nei riguardi e della minore difficoltà di calcolo numerico e della rapidità di convergenza delle successive approssimazioni.

Tali ricerche hanno per ora indicato il classico metodo d'integrazione Cauchy-Lipschitz — col perfezionamento del quale qui dirò — come il meglio adatto agli scopi sopradetti.

Assegnate le  $p$  funzioni reali  $f_1, f_2, \dots, f_p$  delle  $p + 1$  variabili reali  $t, x_1, x_2, \dots, x_p$ , si abbia il sistema di equazioni differenziali e di condizioni iniziali:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_p), & (i = 1, 2, \dots, p). \\ x_i(t_0) = x_i^{(0)}, \end{cases}$$

Detto  $I$  l'intervallo  $(t_0 - a, t_0 + a)$  ove riesce definito il sistema di funzioni  $x_i = X_i(t)$ , soluzione delle (1), sia  $t$  un punto di  $I$ , per fissare

(1) Nella seduta del 1° maggio 1932.

le idee maggiore di  $t_0$ , ove si vogliono calcolare le dette funzioni. Diviso l'intervallo I in  $n$  parti eguali, mediante i punti

$$t_s = t_0 + s \frac{t - t_0}{n}, \quad (s = 1, 2, \dots, n-1),$$

secondo il metodo Cauchy-Lipschitz, propriamente detto, si pone:

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_i^{(1)} = x_i^{(0)} + f_i(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_p^{(0)})(t_1 - t_0), \\ \xi_i^{(2)} = \xi_i^{(1)} + f_i(t_1, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_p^{(1)})(t_2 - t_1), \\ \dots\dots\dots \\ \xi_i^{(n)} = \xi_i^{(n-1)} + f_i(t_{n-1}, \xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}, \dots, \xi_p^{(n-1)})(t_n - t_{n-1}), \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

e, sotto certe ben note condizioni, si ha:

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = X_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Se si suppongono le  $f_i$  dotate delle derivate parziali, finite e continue, rispetto alle variabili da cui esse dipendono, fino a quelle incluse d'ordine  $\nu$ , posto:

$$f_i^{(1)} = f_i, f_i^{(2)} = \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_j} f_j, \dots, f_i^{(\nu)} = \frac{\partial f_i^{(\nu-1)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i^{(\nu-1)}}{\partial x_j} f_j,$$

insieme alle (1) sussistono, in I, le equazioni

$$\frac{d^k x_i}{dt^k} = f_i^{(k)}(t, x_1, x_2, \dots, x_p), \quad (i = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, \nu),$$

ed il perfezionamento del metodo Cauchy-Lipschitz a cui ho alluso consiste appunto nel sostituire alla  $\xi_i^{(n)}$  definite dalle (2) quelle date dalle seguenti:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_i^{(1)} = x_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}) \frac{(t_1 - t_0)^k}{k!}, \\ \xi_i^{(2)} = \xi_i^{(1)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(t_1, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_p^{(1)}) \frac{(t_2 - t_1)^k}{k!}, \\ \dots\dots\dots \\ \xi_i^{(n)} = \xi_i^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(t_{n-1}, \xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}, \dots, \xi_p^{(n-1)}) \frac{(t_n - t_{n-1})^k}{k!}. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

Sussistono ancora le (3), ma, nell'ipotesi dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali d'ordine  $\nu + 1$  delle  $f_i$ , mentre con le (2) si può in generale assicurare che l'errore d'approssimazione

$$\xi_i^{(n)} - X_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$





laddove, se scriviamo  $C$  in luogo di  $A \frac{a^{v+1}}{(v+1)!}$ , riesce;

$$|R_i^{(s)}| \leq \frac{C}{n^{v+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, p; s = 1, 2, \dots, n).$$

Verificandosi in  $I$  le (5), esisterà un numero positivo  $\varepsilon$  tale da risultare in  $I$

$$b'_i + \varepsilon \leq X_i(t) \leq b''_i - \varepsilon,$$

e, designando  $T_n$  il secondo membro della (6), potremo supporre  $n$  talmente grande da risultare  $T_n < \varepsilon$ . Per le  $\xi_i^{(1)}$  si ha

$$|\xi_i^{(1)} - x_i^{(1)}| = |R_i^{(1)}| \leq \frac{C}{n^{v+1}} = \frac{a^v}{n^v} \frac{A e^{-\frac{a}{n}}}{pB \cdot (v+1)!} \left[ \left( 1 + pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \right)^1 - 1 \right] < T_n < \varepsilon,$$

e pertanto il punto  $(t_1, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_p^{(1)})$  riesce contenuto in  $\Delta$  ed hanno quindi senso le  $\xi_i^{(2)}$  e si ha:

$$\xi_i^{(2)} - x_i^{(2)} =$$

$$= \xi_i^{(1)} - x_i^{(1)} + \sum_{k=1}^v \left\{ f_i^{(k)}(t_1, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_p^{(1)}) - f_i^{(k)}(t_1, x_1^{(1)}, \dots, x_p^{(1)}) \right\} \frac{(t_2 - t_1)^k}{k!} - R_i^{(2)},$$

$$|f_i^{(k)}(t_1, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_p^{(1)}) - f_i^{(k)}(t_1, x_1^{(1)}, \dots, x_p^{(1)})| \leq B \sum_{j=1}^p |\xi_j^{(1)} - x_j^{(1)}| \leq pB \frac{C}{n^{v+1}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^v \left\{ f_i^{(k)}(t_1, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_p^{(1)}) - f_i^{(k)}(t_1, x_1^{(1)}, \dots, x_p^{(1)}) \right\} \frac{(t_2 - t_1)^k}{k!} \right| \leq$$

$$\leq pB \frac{C}{n^{v+1}} \sum_{k=1}^v \frac{a^k}{n^k k!} < pB \frac{C}{n^{v+1}} \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}},$$

donde

$$|\xi_i^{(2)} - x_i^{(2)}| < \frac{C}{n^{v+1}} \left( 2 + pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \right) = \frac{a^v}{n^v} \frac{A e^{-\frac{a}{n}}}{pB \cdot (v+1)!} \left[ \left( 1 + pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \right)^2 - 1 \right] < T_n < \varepsilon.$$

Anche il punto  $(t_2, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_p^{(2)})$  è quindi contenuto in  $\Delta$  ed hanno pertanto senso le  $\xi_i^{(3)}$  e poichè

$$\left| \sum_{k=1}^v \left\{ f_i^{(k)}(t_2, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_p^{(2)}) - f_i^{(k)}(t_2, x_1^{(2)}, \dots, x_p^{(2)}) \right\} \frac{(t_3 - t_2)^k}{k!} \right| \leq$$

$$\leq B \sum_{k=1}^v \sum_{j=1}^p |\xi_j^{(2)} - x_j^{(2)}| \frac{a^k}{n^k k!} < pB \frac{C}{n^{v+1}} \left( 2 + pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \right) \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}},$$

si ha:

$$\begin{aligned} |\xi_i^{(3)} - x_i^{(3)}| &< \frac{C}{n^{\nu+1}} \left[ 3 + 3pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} + \left( pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{a^\nu}{n^\nu} \frac{Ae^{-\frac{a}{n}}}{pB \cdot (\nu+1)!} \left[ \left( 1 + pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \right)^3 - 1 \right] < T_n < \varepsilon, \end{aligned}$$

onde anche il punto  $(t_3, \xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \dots, \xi_p^{(3)})$  è contenuto in  $\Delta$  ed hanno pertanto senso le  $\xi_i^{(4)}$ . Ecc.

Osserveremo che il secondo membro della (6), per i valori di  $n$  non inferiori ad  $a$ , si mantiene minore di

$$\frac{a^\nu}{n^\nu} \frac{Ae^{apBe} - 1}{pB \cdot (\nu+1)!}.$$

**2. Osservazioni.** — Dobbiamo però dire delle difficoltà preliminari che occorre superare per l'impiego in pratica della formola (6). In essa compaiono i numeri  $A$  e  $B$ , ai quali, ovviamente, conviene dare valori i più bassi possibili; questi, in generale, dipendono dai numeri  $b'_i, b''_i$  limitanti le soluzioni  $X_i(t)$ , ed ecco quindi un primo problema da risolvere:

*Problema della limitazione della soluzione.* — Essendo noto che nell'intervallo  $I \equiv (t_0 - a, t_0 + a)$  si può definire il sistema di funzioni  $x_i = X_i(t)$ , soluzione delle (1), calcolare dei numeri  $b'_i$  e  $b''_i$  per i quali risulti in  $I$

$$b'_i < X_i(t) < b''_i \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

e tali inoltre che il dominio  $\Delta$  definito dalle limitazioni

$$|t - t_0| \leq a, \quad b'_i \leq x_i \leq b''_i,$$

sia contenuto nel campo di definizione delle  $f_i$ .

Questo problema è, in generale, tutt'altro che privo di difficoltà e la sua soluzione richiede, caso per caso, analisi speciali e spesso grande forza inventiva.

Ovviamente, tale soluzione può essere evitata quando, per il prescelto valore di  $\nu$ , le  $f_i^{(\nu+1)}$  e le  $\partial f_i^{(k)} / \partial x_j$  riescono definite per qualsivoglia sistema di valori delle  $x_1, x_2, \dots, x_p$  e con modulo superiormente limitato, al variare di  $t$  nell'intervallo  $I$  e del punto  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  comunque nello spazio. Non rientra in tal caso il sistema lineare:

$$(7) \quad \frac{dx_i}{dt} = g_i(t) + \sum_{i=1}^p g_{ii}(t)x_i, \quad x_i(t_0) = x_i^{(0)}, \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

per il quale però, detti  $\alpha$  e  $\beta$  due numeri non negativi per cui riesce in I:

$$\left| x_i^{(0)} + \int_{t_0}^t g_i(\tau) d\tau \right| \leq \alpha, \quad |g_{il}(t)| \leq \beta,$$

si ha, per esempio,

$$|X_i(t)| < \alpha e^{\beta \beta a},$$

si può cioè sempre trovare un numero L maggiorante in I le soluzioni di (7). Posto:

$$g_i^{(1)} = g_i, \quad g_{il}^{(1)} = g_{il},$$

$$g_i^{(k+1)} = \frac{dg_i^{(k)}}{dt} + \sum_{l=1}^p g_{il}^{(k)} g_l, \quad g_{il}^{(k+1)} = \frac{dg_{il}^{(k)}}{dt} + \sum_{s=1}^p g_{is}^{(k)} g_{sl},$$

si ha

$$f_i^{(k)} = g_i^{(k)}(t) + \sum_{l=1}^p g_{il}^{(k)}(t) x_l,$$

e perciò, detto D un numero non negativo non superato in I dal modulo delle  $g_i^{(v+1)}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) e B un numero positivo non superato in I dal modulo delle  $g_{il}^{(k)}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ;  $i, l = 1, 2, \dots, p$ ), si può porre  $A = D + pBL$ , donde la formola di maggiorazione dell'errore

$$|\xi_i^{(n)} - X_i(t)| < \frac{a^v}{n^v} \frac{e^{-\frac{a}{n}}}{(v+1)!} \left( \frac{D}{pB} + L \right) \left[ \left( 1 + pB \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \right)^n - 1 \right].$$

Se il sistema è omogeneo si può porre  $D = 0$ .

**Matematica** (Geometria). — *Studio proiettivo dell'intorno di una superficie*. Nota di O. FRANCESCHI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. FUBINI.

A proposito di una Nota che porta il precedente titolo, pubblicata in questi « Rendiconti » (vol. VI, serie 6<sup>a</sup>, novembre 1927) dalla sig<sup>na</sup> Eula e da me, devo fare alcune osservazioni che del resto non infirmano il risultato essenziale ivi ottenuto.

Ivi si dimostra che una superficie rigata, nell'intorno di un suo punto generico, assunto come punto  $x = y = z = 0$ , in un opportuno sistema di coordinate proiettive non omogenee  $x, y, z$ , è definibile mediante uno sviluppo del tipo:

$$z = xy - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} (Ax^4 - 4Bx^3y - 6Cx^2y^2) + \\ + \frac{1}{120} (Ex^5 - 5Fx^4y - 10Gx^3y^2) + [6],$$

dove [6] denota un'espressione nulla almeno di 6° ordine per  $x = y = 0$ . I più generali cambiamenti di coordinate  $x, y, z$ , che mutano il precedente sviluppo in uno di tipo analogo, sono dati, oltrechè dalle (β) di quella Nota, dalle

$$(\alpha_1) \quad x' = cx \quad , \quad y' = c^2 y \quad , \quad z' = c^3 z,$$

e dai loro prodotti. Qui  $c$  indica una costante *arbitraria* (non nulla), che non è necessariamente uguale a  $\sqrt[3]{1}$ , come per inavvertenza è detto nella Nota citata. Alle  $(\alpha_1)$  corrispondono sulle  $A, B, C$ , etc. le trasformazioni:

$$(I_1) \quad A' = c^{-1} A \quad , \quad B' = c^{-2} B \quad , \quad C' = c^{-3} C \quad , \quad \text{etc.}$$

Dunque si può rendere  $A = B = C = 0$ , nel citato sviluppo, non soltanto in tre, ma in  $\infty^1$  modi, dipendenti dai valori del parametro complesso arbitrario  $c$ .

Il teorema successivo (quello fondamentale) rimane immutato; invece le terne di rette  $2x : (\lambda \varepsilon^{2i} - B) = 4y : (\mu \varepsilon^i - A) = z$ , per  $i = (0, 1, 2)$ ,  $\varepsilon =$

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.



$= \sqrt[3]{1}$ ,  $\lambda, \mu$  costanti numeriche, non sono intrinsecamente definite dall'intorno considerato.

Per quanto riguarda l'Osservazione che segue<sup>(1)</sup>, si avverta che la retta ivi considerata è definita intrinsecamente dall'intorno di 4° ordine del punto dato sulla superficie non rigata di cui si parla, soltanto se è  $\lambda = \mu$ . Se è  $\lambda \neq \mu$ , resta invece definita intrinsecamente la coppia formata dalla retta considerata e da quella ottenuta scambiando  $\lambda$  con  $\mu$ .

**Matematica** (Calcolo delle probabilità). — Ancora sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. Nota di A. KOLMOGOROFF, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. CASTELNUOVO.

La funzione  $F(x)$ <sup>(3)</sup> è completamente individuata dalla funzione di ripartizione  $\Phi_{\Delta}(x)$ . È infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF(x) = \log \psi_1(t) - im_1 t;$$

si può derivare due volte tale formula rispetto a  $t$ , e si ottiene, essendo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, t) = -e^{itx},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = -\frac{\partial}{\partial t^2} \log \psi_1(t) = \chi(t),$$

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \chi(t) dt;$$

l'ultima equazione permette di determinare  $F(x)$  a meno di una costante additiva, che rimane individuata per la condizione  $F(-\infty) = 0$ .

Abbiamo visto che da ogni successione  $F_{\Delta_n}(x)$  può sempre estrarsi, purché  $\Delta_n$  tenda a zero, una sottosuccessione  $F_{\Delta_{n_k}}(x)$  che converge verso  $F(x)$ . Ma da ciò si deduce ora che  $F_{\Delta}(x)$  tende, per  $\Delta \rightarrow 0$ , a  $F(x)$ :

$$(8) \quad F(x) = \lim F_{\Delta}(x) = \lim \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^x x^2 d\Phi_{\Delta}(x), \quad \Delta \rightarrow 0;$$

in generale, però, la (8) vale soltanto per i punti dove la  $F(x)$  è continua,

(1) Cfr. la Nota del FUBINI, *Sul fascio canonico*, inserita in questi « Rendiconti », vol. IX, fasc. 5, 1929.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1932.

(3) Cfr. la Nota precedente.

Dalla (3) segue, per  $x < 0$

$$\frac{\Phi_{\Delta}(x)}{\Delta} = \int_{-\infty}^x \frac{dF_{\Delta}(x)}{x^2};$$

per la (8) abbiamo in ogni punto di continuità  $x < 0$  di  $F(x)$

$$(9) \quad P_1(x) \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\Delta}(x)}{\Delta} = \int_{-\infty}^x \frac{dF(x)}{x^2}, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad x < 0.$$

Analogamente si ottiene, per  $x > 0$ ,

$$\frac{1 - \Phi_{\Delta}(x)}{\Delta} = \frac{\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)}{\Delta} = \int_x^{+\infty} \frac{dF(x)}{x^2},$$

$$(10) \quad P_2(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - \Phi_{\Delta}(x)}{\Delta} = \int_x^{+\infty} \frac{dF(x)}{x^2}, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad x > 0.$$

Si può quindi chiarire il reale significato delle funzioni  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  nel modo seguente. In generale non è necessario che la funzione  $X(\lambda)$  vari con continuità rispetto al tempo  $\lambda$ ; essa può anche fare dei salti.  $P_2(x) d\lambda$  è la probabilità che durante un tempuscolo  $d\lambda$  abbia luogo un salto positivo, maggiore di  $x$ .  $P_1(x) d\lambda$  è l'analogo probabilità di salti negativi, in valore assoluto maggiori di  $|x|$ .

Dalle (9) e (10) segue

$$(11) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x x^2 dP_1(x), \quad x < 0,$$

$$(12) \quad \sigma_1^2 - F(x) = F(+\infty) - F(x) = \int_x^{+\infty} x^2 dP_2(x), \quad x > 0.$$

Naturalmente la validità di tali formule, come pure di tutte queste considerazioni in cui intervengono  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$ , è ristretta ai punti di continuità di  $F(x)$ .

Tutto l'andamento di  $F(x)$  all'infuori del punto  $x = 0$  è così completamente individuato dalla distribuzione di probabilità dei salti della funzione  $X(\lambda)$ . La discontinuità di  $F(x)$  nell'origine è al contrario legata alla variazione continua di  $X(\lambda)$ . Per mettere in luce tale circostanza giova porre

$$\Omega(x) = F(x), \quad x \leq 0,$$

$$\Omega(x) = F(x) - \sigma_0^2, \quad x > 0,$$

dove con  $\sigma_0^2$  venga indicato il salto di  $F(x)$  per  $x = 0$ . All'infuori di un intorno dell'origine è manifestamente  $dF(x) = d\Omega(x)$ . Si possono quindi scrivere le formule (11) e (12) nel modo seguente:

$$(13) \quad \Omega(x) = \int_{-\infty}^x x^2 dP_1(x), \quad x < 0,$$

$$(14) \quad \sigma_2^2 - \Omega(x) = \int_x^{+\infty} x^2 dP_2(x), \quad x > 0,$$

ove si ponga  $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 - \sigma_0^2$ . Poichè  $\Omega(x)$  deve risultare continua nell'origine, è  $\sigma_2^2 = \Omega(+\infty)$ , e la funzione  $\Omega(x)$  rimane pienamente individuata da  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$ . Abbiamo ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF(x) = \sigma_0^2 p(0, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) d\Omega(x),$$

e, essendo  $p(0, t) = -\frac{t^2}{2}$ , si ricava la nostra

*Formula fondamentale*

$$(15) \quad \log \psi_1(x) = im_1 t - \frac{\sigma_0^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) d\Omega(x)$$

nella sua espressione definitiva.

Quando  $\Omega(x) = 0$ , e cioè quando  $X(\lambda)$  non può variare se non con continuità in funzione del tempo, si ha  $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$

$$\psi_\Delta(t) = e^{\Delta \left( im_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2} \right)}$$

$$\Phi_\Delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\sigma_1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\Delta m_1)^2}{2\Delta\sigma_1^2}} dx.$$

Mostriamo ancora che le formule (7), (6) e (2) comunque si scelga la funzione  $F(x)$  (non decrescente, continua a sinistra, con  $F(-\infty) = 0$  e  $F(+\infty) = \sigma_1^2 < +\infty$ ), danno luogo ad una soluzione del nostro problema.

Si tratta in altre parole di dimostrare che, sotto le condizioni accennate, la funzione  $\Phi_\Delta(x)$  data dalla (7) rappresenta sempre, per ogni  $\Delta > 0$ , una vera funzione di ripartizione.

Consideriamo dapprima, per tale scopo, una funzione a scalini  $T(x)$ , che solo in un numero finito di punti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ha i salti

$$\omega_k = T(x_k + 0) - T(x_k),$$

la cui somma indichiamo  $\sigma_1^2 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ , e che è costante in ogni intervallo non contenente alcuno dei punti  $x_k$ . Escludiamo inoltre che fra i punti  $x_k$  figuri l'origine  $x = 0$ . È allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dT(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{x_k} (e^{itx_k} - 1 - it),$$

$$\log \bar{\Psi}_1(t) = itP + \sum p_k \{ \chi_k(t) - 1 \}^{(1)}$$

$$P = m_1 - \sum \frac{\omega_k}{x_k^2}, \quad p_k = \frac{\omega_k}{x_k^2}, \quad \chi_k(t) = e^{itx_k},$$

$$\bar{\Psi}_\Delta(t) = \{ \bar{\Psi}_1(t) \}^\Delta = e^{it\Delta P + \sum \Delta_{x_k} \{ \chi_k(t) - 1 \}}.$$

$\chi_k(t) = e^{itx_k}$  e  $e^{it\Delta P}$  sono evidentemente funzioni caratteristiche (cioè significa: esse danno luogo, applicando la (7), a funzioni di ripartizione); dai risultati di de Finetti segue che anche  $e^{\Delta p_k \{ \chi_k(t) - 1 \}}$  è allora una funzione caratteristica, e finalmente  $\bar{\Psi}_\Delta(t)$  lo è anche essa, essendo un prodotto di funzioni caratteristiche.

Scelti comunque  $t_0$  ed  $\varepsilon > 0$ , si può sempre approssimare una qualsiasi funzione  $F(x)$  mediante una funzione a scalini  $T(x)$  tale che sia

$$(16) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dF(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dT(x) \right| < \varepsilon$$

per ogni  $|t| < t_0$ . Scelgasi allora una successione  $T_n(x)$  di funzioni  $T(x)$  in modo che la differenza (16) tenda a zero per ogni  $t$ , e in modo uniforme per ogni intervallo limitato. Le corrispondenti funzioni  $\bar{\Psi}_\Delta^{(n)}(t)$  convergono allora verso  $\bar{\Psi}_\Delta(t)$ , e ne consegue che  $\bar{\Psi}_\Delta(t)$  essendo limite di funzioni caratteristiche, è ancora una funzione caratteristica.

(1) Scrivo  $\bar{\Psi}^\Delta$  in luogo di  $\bar{\Psi}^\Delta$  quando  $F(x)$  è sostituito con  $T(x)$ .

**Matematica (Analisi).** — *Nuove formule di maggiorazione per le soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine.* Nota di P. CLEMENTE, pres. dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sur l'équation de Laplace.* Nota di M. GHERMANESCO, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — I. Remarques sur la théorie générale de la transformation de Ribaucour.* Nota di H. HAMBURGER, pres. dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — II. Application de la transformation de Ribaucour à la représentation sphérique et à quelques autres problèmes.* Nota di H. HAMBURGER, pres. dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine.* Nota di M. PICONE, pres. dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.



**Meccanica.** — *Sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a se stesso.* — I. *Formola fondamentale e proprietà che se ne deducono.* Nota di M. PASCAL, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio R. MARCOLONGO.

In un recente lavoro <sup>(2)</sup> N. Abramescu ha ripreso in esame lo studio cinematico di uno dei più semplici movimenti di un corpo deformabile, quello cioè di una figura che varia mantenendosi simile a se stessa. Egli si è limitato al caso di una figura piana, ed ha trovate proprietà cinematiche analoghe a quelle ben note del moto di una figura rigida piana che si muove nel proprio piano.

Crediamo che possa presentare qualche interesse l'estendere la ricerca al caso spaziale, tanto più che, come faremo vedere, la diversità fra il moto rigido e il moto in esame si manifesta in modo più profondo nello spazio che non nel piano: si proverà per es. fra l'altro che, a differenza di quanto accade nel corpo rigido libero, nel moto di un corpo deformabile che rimane simile a se stesso vi è in ogni istante un punto che ha velocità nulla.

Esporremo soltanto i più importanti risultati riducendo o sopprimendo, per ragioni di brevità, le dimostrazioni, che potranno trovar posto in un più esteso lavoro.

1. Consideriamo un corpo deformabile che si muove liberamente nello spazio conservando la similitudiné in un rapporto  $\rho$ , funzione del tempo; e siano  $O_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $O(x, y, z)$  due terne di riferimento rispettivamente connesse con lo spazio fisso e con il corpo mobile. Le equazioni del movimento assumono la forma

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + \rho(\alpha x + \beta y + \gamma z) \\ y_1 = y_0 + \rho(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) \\ z_1 = z_0 + \rho(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) \end{cases}$$

in cui  $\alpha, \beta, \dots$  sono i nove coseni direttori delle due terne, e, insieme a  $x_0, y_0, z_0, \rho$ , sono funzioni del tempo.

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) N. ABRAMESCU, *Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même*. « Ann. R. Scuola norm. Sup. di Pisa; Sc. fis. e mat. », (2), v. 1, 1932, pp. 155-164.

Le componenti del vettore velocità di un punto qualunque del corpo possono facilmente scriversi

$$(2) \quad \begin{cases} x'_1 = x'_0 + q_1 (z_1 - z_0) - r_1 (y_1 - y_0) + \frac{\rho'}{\rho} (x_1 - x_0) \\ y'_1 = y'_0 + r_1 (x_1 - x_0) - p_1 (z_1 - z_0) + \frac{\rho'}{\rho} (y_1 - y_0) \\ z'_1 = z'_0 + p_1 (y_1 - y_0) - q_1 (x_1 - x_0) + \frac{\rho'}{\rho} (z_1 - z_0) \end{cases}$$

dove  $p_1, q_1, r_1$  hanno il significato medesimo che hanno nella cinematica del corpo rigido e gli accenti indicano derivate rispetto al tempo. Le (2) possono riassumersi nell'unica formola vettoriale

$$(3) \quad P' = O' + \Omega \wedge (P - O) + k(P - O)$$

dove  $k = \frac{\rho'}{\rho}$  e gli altri simboli hanno un significato ben noto. La (3) per  $\rho = \text{cost.}$  si riduce ovviamente alla formola fondamentale della cinematica del corpo rigido e, come quella, può interpretarsi: *Per quel che riguarda la velocità il moto istantaneo di un corpo deformabile che si muove mantenendosi simile a se stesso può considerarsi come composto di un moto istantaneo di corpo rigido e di una deformazione pura.*

2. Si può trovare facilmente che il luogo di tutti i punti del corpo che in un determinato istante hanno la loro velocità parallela al vettore  $\Omega$  relativo a quell'istante è una retta, che per analogia potrà dirsi *asse di moto*. L'asse di moto è una retta parallela al vettore  $\Omega$  e la sua equazione vettoriale è

$$(4) \quad P - O = \frac{\Omega \wedge O'}{\omega^2 + k^2} - \frac{k}{\omega^2 + k^2} O' + t \Omega$$

in cui  $t$  è un parametro variabile, e  $\omega = \text{mod } \Omega$ .

È subito chiaro che se  $R$  e  $S$  sono due punti dell'asse di moto si ha

$$R' - S' = k(R - S)$$

cioè indicando con  $v_1$  e  $v_2$  le grandezze della velocità di  $R$  e di  $S$  e con  $l$  la distanza fra questi due punti

$$(5) \quad \left| \frac{v_1 - v_2}{l} \right| = k$$

è costante cioè il rapporto fra la differenza delle grandezze della velocità di due punti dell'asse di moto e la loro distanza.

È questo un caso particolare di una proprietà che è comune a tutte le rette del corpo deformabile in movimento. Si ha infatti, come conseguenza immediata della (3), che il rapporto fra la differenza delle proiezioni della velocità di due punti di una retta generica sulla retta stessa, e la distanza fra i due punti, è uguale alla derivata logaritmica del rapporto di similitudine qualunque sia la coppia di punti prescelta. Ed invero se diciamo  $\mathbf{u}$  il versore di una retta generica cui appartengono i punti P e O, si ha

$$(6) \quad \mathbf{P}' \times \mathbf{u} = \mathbf{O}' \times \mathbf{u} \pm k |\mathbf{P} - \mathbf{O}|.$$

Si deduce ancora che su ogni retta vi è in generale un solo punto la cui velocità è perpendicolare alla retta stessa, cioè una retta generica è perpendicolare alla traiettoria di uno solo dei suoi punti. Tale punto Q è definito da

$$(7) \quad \mathbf{Q} - \mathbf{O} = - \frac{\mathbf{O}' \times \mathbf{u}}{k} \mathbf{u}.$$

Nel caso del corpo rigido esso si allontana indefinitamente per la retta generica, mentre vi sono invece rette (costituenti un complesso lineare) che sono perpendicolari alle traiettorie di tutti i loro punti.

Il punto (7) è naturalmente, come subito si dimostra, indipendente dalla particolare scelta del punto O sulla retta di versore  $\mathbf{u}$ . Infatti se si sceglie sulla stessa retta un altro punto  $\mathbf{O}_1$  e si suppone che tale scelta conduca ad un punto  $\mathbf{Q}_1$  diverso da Q, si avrà

$$\mathbf{Q}_1 - \mathbf{O}_1 = - \frac{\mathbf{O}'_1 \times \mathbf{u}}{k} \mathbf{u},$$

sottraendo dalla quale la (7) si ha

$$(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{O}_1) - (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) = \frac{1}{k} \{ \mathbf{O}' \times \mathbf{u} - \mathbf{O}'_1 \times \mathbf{u} \} \mathbf{u}$$

cioè per la (6)

$$(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}) + (\mathbf{O} - \mathbf{O}_1) = |\mathbf{O} - \mathbf{O}_1| \cdot \mathbf{u} = \mathbf{O} - \mathbf{O}_1,$$

ovvero

$$\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q} = 0.$$

Con ciò la (6) potrà scriversi

$$(8) \quad \mathbf{P}' \times \mathbf{u} = \pm k |\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$$

cioè la proiezione della velocità di un punto P di una retta generica sulla retta stessa è uguale in valore assoluto al prodotto della distanza di P dal punto Q, la cui velocità è in quell'istante perpendicolare alla retta stessa, per la derivata logaritmica del rapporto di similitudine.

3. L'analogia proprietà riguardante i piani del corpo in movimento, si conserva invece uguale tanto nel caso del corpo rigido quanto in quello del corpo deformabile che studiamo. Si ha infatti che in ogni piano generico del corpo vi è in ogni istante un punto la cui velocità è perpendicolare al piano. Tale punto è definito da

$$(9) \quad Q - O = \frac{l}{k^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n})^2} \{ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \wedge O' + k(O' \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} \}$$

in cui  $\mathbf{n}$  è il versore della normale al piano ed O è un punto qualunque del corpo.

Vi è in ogni istante un solo piano eccezionale, come faremo vedere.

Si ha ancora che la proiezione della velocità di un punto qualunque di un piano sulla congiungente il punto col punto Q, di quel piano in quell'istante, è uguale al prodotto del quadrato della distanza fra i due punti per la derivata logaritmica del rapporto di similitudine.

4. Notiamo infine che se si ricerca quale è il luogo di tutti i punti la cui velocità in un certo istante è diretta verso un punto prefissato, si trova anche qui come nel caso del corpo rigido, una cubica gobba, la quale però risulta intersezione di un cilindro con un paraboloide iperbolico aventi in comune una retta.

**Astronomia.** — Metodo per il calcolo d'orbita di una binaria visuale.  
Nota di E. MARTIN, pres. dal Socio G. SILVA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Un metodo semplificato di misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali.* Nota di A. OCCHIALINI e di G. MELCHIORI RANGHIASCI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio A. GARBASSO.

Nell'analisi spettroscopica quantitativa si è cercato in diversi modi di rendere fotografica la misura della lunghezza delle righe. La fotografia oltre essere indispensabile nell'ultra violetto, può essere consigliabile per avere una documentazione.

Una soluzione pratica è stata pubblicata nei « Rendiconti » della Reale Accademia dei Lincei (13 gennaio 1931) e consiste nel far scorrere l'immagine della scintilla, disposta sempre normalmente alla fenditura, attraverso alla fenditura stessa, nello stesso tempo che lo chassis contenente la lastra è spostato nel senso delle righe. In tal modo ogni punto della riga è l'immagine data da un particolare punto della scintilla e lo spettro può essere molto allargato nel senso delle righe senza essere alterato in lunghezza.

In pratica non si può ricorrere ad un moto continuo dello chassis, che, se non è costruito in vista di questo scopo, presenta attriti variabili che si oppongono ad uno spostamento uniforme. Però tale scopo si raggiunge spostando a mano lo chassis ad intervalli regolari di tempo, mentre la lente è spostata da un movimento di orologeria od anche a mano come per lo chassis.

Se invece di spostare a poco a poco lente e chassis, in modo da avere una successione continua di immagini, si operassero spostamenti bruschi, che danno le immagini separate, l'apparenza degli spettrogrammi sarebbe quella della fotografia 1.

Ogni riga figura in un numero di fotografie tanto maggiore, quanto maggiore è la sua lunghezza. In tal modo la lunghezza di una riga si può misurare contando il numero delle pose in cui compare.

La fotografia riprodotta è quella di una lega di stagno e piombo con stagno al 5 %. In essa la riga 4585 Sn appare in 13 pose.

È da notare che tale fotografia è stata ottenuta con un nuovo dispositivo di scarica ideato da uno degli autori della presente Nota (la lega metallica in forma di piastrina è disposta verticalmente fra due elettrodi di carbone orizzontali); infatti si nota al centro uno spazio non impressionato dovuto al passaggio sulla fenditura dello spettroscopio dell'immagine della piastrina.

Con questo dispositivo si sono eseguite altre 4 fotografie della stessa lega con percentuali variabili e i risultati ottenuti sono riassunti nelle seguente tabella:

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.



Lega	Percentuale Sn	Riga osservata	Num. segmenti
Pb = Sn	5 %	4585 Sn	13
» »	4 %	» »	12
» »	3 %	» »	11
» »	2 %	» »	10
» »	1 %	» »	9

Altro risultato molto notevole, che dimostra la possibilità di estendere tale metodo anche alle analisi di leghe a più componenti, è il seguente, ottenuto con leghe ternarie:

Leghe	Perc. Bi	Perc. Sb	Perc. Pb	Riga 4561 Bi	Riga 4693 Sb	Riga 4265 Sb
Bi = Sb = Pb	1 %	1 %	98 %	8	7	9
» » »	1 %	3 %	96 %	8	9	11
» » »	1 %	5 %	94 %	8	11	12

I fotogrammi riguardano sezioni della scintilla che distano tra loro 2/5 di mm, dato che lo spostamento della lente è di 1/5 mm.

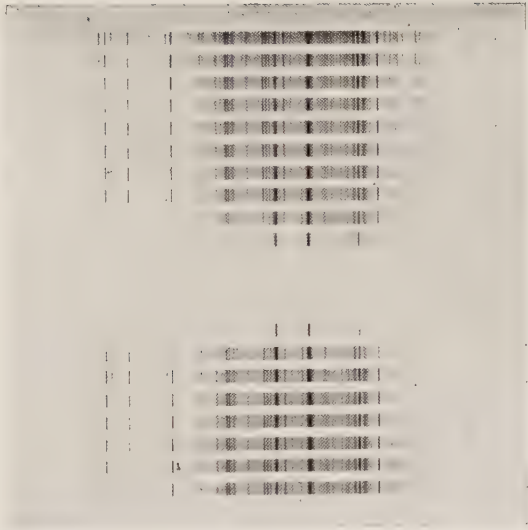
Si vede già la possibilità di ottenere risultati così precisi per le leghe con differenze di percentuale minori dell'1 %; basterà per questo spostare la lente ad esempio di 1/10 di mm.

**Geofisica (Sismologia).** — *La presenza di onde lente nella fase preliminare di taluni sismogrammi.* Nota di G. AGAMENNONE, pres. dal Socio L. PALAZZO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica (Spettroscopia).** — *La struttura della riga 6708 del Litio osservata in emissione.* Nota di L. ALLEGRETTI, pres. dal Corrisp. L. PUCCIANI.

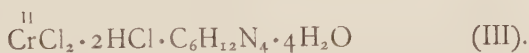
Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.





**Chimica.** — *Contributo alla conoscenza dei composti del cromo bivalente* <sup>(1)</sup>. Nota di G. A. BARBIERI e A. TETTAMANZI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. M. BETTI.

Ricerche dirette a porre in luce nuovi rapporti di analogia tra il cromo bivalente e i metalli bivalenti più comuni (Fe, Co, Ni, Mn, ecc.) ci hanno condotto alla preparazione dei seguenti composti cromosi con basi organiche che appartengono a tipi salini non ancora rappresentati nella chimica del cromo bivalente:



Il composto (I) appartiene alla categoria delle esammine perchè ogni molecola di  $\alpha\alpha$ -dipiridile  $\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2$  corrisponde, per valore di coordinazione, a due molecole di ammoniaca.

Mentre si conoscono parecchie croma-esammine, nessuna cromo-esamina era stata finora isolata.

Nel metodo classico di preparazione dei luteo-sali del cromo trivalente, si parte, com'è noto, da un sale cromoso, l'acetato, e lo si tratta con un eccesso di ammoniaca e di cloruro di ammonio; la soluzione azzurra così ottenuta viene poi ossidata dall'ossigeno dell'aria e fornisce la croma-ammina  $[\overset{\text{III}}{\text{Cr}}(\text{NH}_3)_6]\text{X}_3$ . È certo che la formazione del complesso  $\overset{\text{III}}{\text{Cr}}(\text{NH}_3)_6$  è preceduta dalla formazione del complesso  $\overset{\text{II}}{\text{Cr}}(\text{NH}_3)_6$ , ma i sali contenenti quest'ultimo non poterono venir isolati dalle loro soluzioni acquose.

Peters <sup>(3)</sup> facendo agire l'ammoniaca gassosa alla pressione di una atmosfera sul cloruro cromoso anidro ottenne un ammoniacato  $\text{CrCl}_2 \cdot 6\text{NH}_3$  di color verde-azzurro, che nel vuoto perde tre molecole di  $\text{NH}_3$  trasformandosi in  $\text{CrCl}_2 \cdot 3\text{NH}_3$  di color bleu cupo.

Per ottenere composti cromo-amminici meno instabili di quelli che si hanno con l'ammoniaca, noi abbiamo pensato di ricorrere all' $\alpha\alpha$ -dipiridile

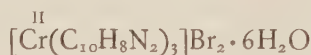
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

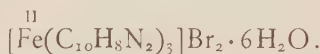
(3) « Ber. », 42, p. 4826 (1909); « Z. anorg. Chem. », 77, p. 137 (1912).

che, com'è noto dalle ricerche di F. Blau <sup>(1)</sup>, forma coi sali ferrosi dei composti metallamminici del tipo  $[\text{Fe}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3]^{II}\text{X}_2$  intensamente colorati in rosso. L'affinità del  $\alpha\alpha$ -dipiridile per l'ione ferroso (che ha molti punti di contatto con l'ione cromoso) supera quella che detta base ha per l'ione idrogeno, di modo che i composti ferro-amminici suddetti si possono anche ottenere aggiungendo ad un sale ferroso un sale di  $\alpha\alpha$ -dipiridile ad acido forte.

Noi abbiamo constatato che fenomeni analoghi si hanno anche coi sali cromosi. Aggiungendo ad una soluzione di bromidrato di  $\alpha\alpha$ -dipiridile dell'acetato cromoso e un eccesso di bromuro di sodio, si produce una colorazione bruna e poi si separa in cristalli neri lucenti il composto:



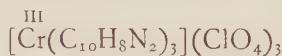
che è perfettamente analogo al bromuro di ferro-dipiridile:



Col metodo di Retgers <sup>(2)</sup>, cioè con la preparazione di cristalli di miscela, si poté constatare che i due composti sono anche isomorfi.

F. Blau trattando i sali di ferro-dipiridile, che sono stabili all'aria, con ossidanti energici, per esempio con cloro, riuscì ad ottenere i composti di ferro-dipiridile  $[\text{Fe}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3]^{III}\text{X}_3$  che sono colorati in bleu.

Il bromuro di cromo-dipiridile si ossida invece spontaneamente all'aria, specie in ambiente umido e in presenza di sostanze ossidabili, come l'alcool, trasformandosi in una sostanza giallo-aranciata. La trasformazione è abbastanza lenta ed è completa soltanto dopo molte ore. La sostanza giallo-aranciata che prende origine nell'ossidazione, sciolta in acqua ed acido perclorico, diede per aggiunta di perclorato di sodio in eccesso, un precipitato giallo cristallino avente la formula:



che ha tutti i caratteri dei luteo-sali del cromo trivalente.

Il composto (II) è un solfocianato doppio di cromo bivalente ed esametilentetrammina. Nella letteratura è ricordato un solo composto del cromo bivalente con l'acido solfocianico, il solfocianato doppio di cromo e sodio  $[\text{Cr}(\text{SCN})_2 \cdot 3\text{NaSCN} \cdot 11\text{H}_2\text{O}]^{II}$  che venne preparato da J. Koppel <sup>(3)</sup> sciogliendo l'acetato cromoso in una soluzione concentratissima di solfocianato di sodio.

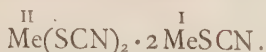
(1) « Monatsh. », 19, p. 647 (1898).

(2) « Z. phys. Chem. », 8, p. 6 (1891).

(3) « Z. anorg. Chem. », 45, 359 (1905).



Dapprima si ha una soluzione di un azzurro intenso; poi da essa si separano dei cristalli azzurri ossidabilissimi all'aria. Il Koppel stesso riconosce che la formula di questo composto è strana (« auffallend ») e confessa che egli si aspettava un solfocianato doppio del tipo più frequente:

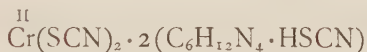


Noi abbiamo pensato di sostituire al solfocianato di sodio, il solfocianato di una base organica, e precisamente dell'esametilentetrammina che, coi solfocianati di cobalto e rame, forma i composti:



descritti da F. Calzolari <sup>(1)</sup>.

Il cromo bivalente ci ha fornito un composto dello stesso tipo:



in cristalli color lilla.

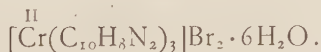
Composti analoghi abbiamo ottenuto pure col  $\overset{\text{II}}{\text{Fe}}$  e col  $\overset{\text{II}}{\text{Mn}}$ , e mediante il metodo di Retgers ne abbiamo riconosciuto l'isomorfismo col composto del cromo bivalente.

Il composto (III)  $\text{CrCl}_2 \cdot 2\text{HCl} \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  appartiene a un tipo salino nuovo: è ad un tempo un cloruro doppio e un cloruro acido, perchè l'esametilentetrammina è una base monoacida. Esso prende origine facendo reagire in soluzione di acido cloridrico concentrato il cloruro cromoso con il cloridrato di esametilentetrammina, e si presenta in squamette azzurro-verdi.

Composti perfettamente analoghi per composizione e forma cristallina vennero da noi ottenuti anche coi cloruri di  $\overset{\text{II}}{\text{Fe}}$ ,  $\overset{\text{II}}{\text{Ni}}$ ,  $\overset{\text{II}}{\text{Co}}$ ,  $\overset{\text{II}}{\text{Mn}}$ .

## PARTE SPERIMENTALE.

### I.



Gr. 5 di  $\alpha\alpha$ -dipiridile, preparato per distillazione secca del picolinato di rame, vengono sospesi in 25 cc. di acqua e addizionati con acido bromidrico fino a soluzione completa della base. Nella soluzione, protetta con uno strato di etere di petrolio, si introduce dell'acetato cromoso, in quantità corrispondente a circa gr. 0.5 di cromo. L'acetato si scioglie rapida-

(1) « Ber. », 43, p. 2217 (1910).

mente nella soluzione colorandola in bruno. Infine si aggiunge del bromuro di sodio in sostanza sino quasi a saturazione, e si agita fortemente il liquido. Si forma tosto un deposito cristallino costituito da squamette nere lucenti. Esso viene separato alla pompa dall'acqua madre e lavato con alcool in atmosfera di  $\text{CO}_2$ .

L'analisi del prodotto seccato nel vuoto diede i seguenti risultati:

		Cr	N	Br
	trovato %	6.40	10.52	20.55
per $\text{Cr}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3\text{Br}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	calcolato %	6.60	10.67	20.29.

I cristalli di questo composto esaminati al microscopio appaiono tavolette brune trasparenti. Se il prodotto viene preparato in presenza di un po' di solfato ferroso si ottiene in cristalli omogenei, colorati in rosso cupo.

Evidentemente il composto  $[\text{Fe}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3]\text{Br}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  che è di un color rosso vivo è solubile allo stato solido nel composto  $[\text{Cr}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3]\text{Br}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ .

Quest'ultimo esposto all'aria allo stato umido e in sottile strato, ingiallisce superficialmente e dopo circa 24 ore si è trasformato in una massa giallo-aranciata, che ripresa con una soluzione diluita di acido perclorico, e poi addizionata con un eccesso di perclorato di sodio in sostanza, fornisce una polvere gialla cristallina, che venne analizzata previa essiccazione in stufa.

		Cr	N	Cl
	trovato %	6.12	9.97	13.18
per $\text{Cr}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3(\text{ClO}_4)_3$	calcolato %	6.35	10.27	13.00.

Il perclorato scaldato fortemente esplode. La sua soluzione acquosa dà precipitati cristallini col ferricianuro potassico, col cloroplatinato sodico, coi picrati.

## II.



In una soluzione satura di  $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{HSCN}$  protetta dall'aria da uno strato di etere di petrolio si introduce dell'acetato cromoso preparato di recente e ancora umido.

La soluzione dapprima si colora in azzurro, poi deposita una sostanza cristallizzata in squamette lilla, che, spremuta alla pompa, viene lavata con alcool e seccata nel vuoto. Allo stato secco è abbastanza stabile all'aria. Nell'acqua è poco solubile, ma si altera rapidamente idrolizzandosi ed ossidandosi.

		Cr	N	S
	trovato %	9.02	29.55	22.48
per $\text{Cr}(\text{SCN})_2 \cdot 2(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{HSCN})$	calcolato %	9.18	29.70	22.66.

Se ad una soluzione satura a freddo di  $C_6H_{12}N_4 \cdot HSCN$  si aggiunge una soluzione concentrata di solfato ferroso o di solfato manganoso, si ottengono dei solfocianati doppi, in cristalli incolori, che hanno composizione perfettamente analoga al sale cromoso, come risulta dalle seguenti analisi:



trovato %	Fe	9.92	N	29.35	S	22.66
calcolato %	»	9.80	»	29.50	»	22.51.



trovato %	Mn	9.45	N	29.70	S	22.30
calcolato %	»	9.65	»	29.55	»	22.54.

Se nella preparazione di questi composti, alla soluzione di solfato ferroso o di solfato manganoso si aggiunge un po' di acetato cromoso sciolto in acido solforico diluito, si ottengono dei precipitati cristallini omogenei, colorati in lilla, e che sono evidentemente soluzioni solide del solfocianuro doppio cromoso nei sali corrispondenti di ferro e di manganese.

### III.



In un bicchiere, contenente dell'acetato cromoso preparato di recente e protetto dall'azione dell'aria con etere di petrolio, si versa acido cloridrico concentrato fino a soluzione completa dell'acetato. Se in conseguenza dell'eccesso di acido cloridrico si forma un precipitato bianco-azzurro di cloridrato di cloruro cromoso, che secondo Recoura<sup>(1)</sup> ha la formula  $3CrCl_2 \cdot 2HCl$ , si aggiunge un po' di acqua per portarlo in soluzione. Alla soluzione bleu così ottenuta si aggiunge una soluzione satura di  $C_6H_{12}N_4$  addizionata con egual volume di acido cloridrico concentrato e raffreddata con ghiaccio. Si forma tosto un precipitato cristallino bleu-verde, che viene spremuto rapidamente alla pompa, lavato con poco alcool e seccato nel vuoto. Nell'acqua il prodotto è molto solubile e la soluzione si ossida rapidamente all'aria diventando verde.

Trovato %	Cr	12.50	N	13.80	Cl	35.02
calcolato %	»	12.75	»	13.74	»	34.77.

I cloruri di manganese, ferro, nichel, e cobalto sciolti in acido cloridrico concentrato e addizionati con una soluzione di  $C_6H_{12}N_4$  fortemente

(1) « C. r. », 100<sub>1227</sub> (1885).

acidificata con acido cloridrico, danno i seguenti cloruri doppi cristallizzati, che sono del tutto analoghi per la composizione e per l'aspetto cristallino al composto cromoso.



Cristalli quasi incolori.

Trovato	%	Mn	13.35	N	13.98	Cl	34.70
calcolato	%	»	13.37	»	13.64	»	34.53.

Se nella preparazione del composto precedente si introduce nella soluzione cloridrica di cloruro di manganese, dell'acetato cromoso, si ottengono cristalli misti del composto di cromo col composto di manganese colorati uniformemente in azzurro.



Cristalli color verde-mela.

Trovato	%	Ni	13.98	N	13.80	Cl	34.50
calcolato	%	»	14.15	»	13.52	»	34.22.



Cristalli bianco-azzurrini.

Trovato	%	Fe	13.63	N	13.85	Cl	34.66
calcolato	%	»	13.56	»	13.61	»	34.45.



Il sale di cobalto si presenta in cristalli roseo-lilla, che trattati con alcool diventano turchini. Analisi del composto roseo:

Trovato	%	Co	14.10	N	13.76	Cl	34.40
calcolato	%	»	14.22	»	13.51	»	34.19.

Il composto turchino ha composizione diversa perchè l'alcool ha asportato dal composto roseo una molecola di acido cloridrico e l'acqua.

		Co	N	Cl
	Trovato %	18.97	18.60	34.90
per $\text{CoCl}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4 \cdot \text{HCl}$	calcolato %	19.25	18.30	34.73.

**Chimica** (Chimica agraria). — *Influenza dei cationi di scambio sulla ascesa capillare dell'acqua nel terreno* <sup>(1)</sup>. Nota di O. BOTTINI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

La funzione attribuita ai cationi di scambio ha reso indispensabile la loro conoscenza per la formulazione di un giudizio sulla natura e sulle proprietà di un terreno. Difatti la loro determinazione in questi ultimi anni è andata diffondendosi ed acquistando importanza sempre più grande, e numerosi e diversi sono i metodi che vengono continuamente elaborati per la loro separazione.

La loro composizione, nel mentre dà una buona idea dell'origine, della natura e del grado di degradazione di un terreno <sup>(3)</sup>, fornisce pure una nozione attendibile sulle riserve di sostanze nutritive facilmente assimilabili <sup>(4)</sup>, essendo i cationi di scambio facilmente influenzati dalla soluzione circolante e dall'attività delle radici. Ma soprattutto la loro natura e la loro quantità sono responsabili in gran parte dello stato fisico di un terreno in generale, ed in particolare di molte sue proprietà. È stato difatti, in seguito a ricerche accurate e numerose, brillantemente dimostrato che, per lo più, una micella del tipo della micella colloidale del terreno ha proprietà che dipendono dalla natura dei cationi dello strato esterno e che un terreno, tutte le altre caratteristiche rimanendo invariate, muta di proprietà col variare dei suoi cationi di scambio <sup>(5)</sup>.

Nella presente Nota si vuol dimostrare come in un terreno anche la velocità di ascesa capillare dell'acqua vari in funzione dei suoi cationi di scambio, o meglio, come, variando coi cationi di scambio le proprietà che influenzano il fenomeno dell'ascesa capillare dell'acqua, la velocità di ascesa ne rimanga influenzata.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Portici.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(3) A. STEBUTT, *Lehrbuch der allgemeinen Bodenkunde*; G. Borntraeger, Berlin 1930, p. 199 e sg.; K. K. GEDROIZ, « Kolloidchemische Beihefte », 29, p. 211 (1929).

(4) F. HONCAMP, *Handbuch der Pflanzenernährung und Düngerlehre*, I; J. Springer, Berlin 1931.

(5) I. N. ANTIPOV, KARATAJEV e A. I. RABINERSON, *I più recenti risultati della ricerca sui colloidi del terreno*. (Russo) Leningrado 1930, p. 87 e sg.



## PARTE SPERIMENTALE.

Il terreno usato nelle esperienze è un terreno alluvionale, eminentemente argilloso, assolutamente privo di calcare, della composizione chimica seguente:  $\text{SiO}_2$  57.940 %;  $\text{Al}_2\text{O}_3$  19.953 %;  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  4.749 %;  $\text{CaO}$  2.632 %;  $\text{MgO}$  1.723 %;  $\text{K}_2\text{O}$  2.841 %;  $\text{Na}_2\text{O}$  1.765 %;  $\text{P}_2\text{O}_5$  0.048 %; perdita a fuoco 7.480 %; e con le basi di scambio<sup>(1)</sup> seguenti:  $\text{Ca}$  0.230 %;  $\text{Mg}$  0.085 %;  $\text{K}$  0.071 %;  $\text{Na}$  0.011 %.

Tale terreno essiccato all'aria è stato leggermente triturato, quindi stacciato allo staccio con fori di mm. 0.25 di diametro. Nella parte passata attraverso lo staccio si è proceduto al rimpiazzamento delle basi di scambio, secondo il metodo descritto da Gedroiz<sup>(2)</sup>, volta a volta con uno dei cationi seguenti:  $\text{Na}$ ,  $\text{NH}_4$ ,  $\text{K}$ ,  $\text{Mg}$ ,  $\text{Ba}$ ,  $\text{Al}$ ,  $\text{H}$ .

I diversi campioni per tal maniera vengono a differire l'uno dall'altro solo per la natura del catione che satura il complesso di scambio.

Per le prove sono state adoperate canne di vetro lunghe circa m. 2, con diametro intorno a mm. 12, tutte eguali. Sono state riempite ognuna col terreno di uno dei campioni preparati. L'assestamento nelle canne è stato fatto battendo queste sul pavimento fino a che per cinque o sei colpi consecutivi il livello del terreno si è mantenuto costante.

Tutte queste canne contemporaneamente sono state immerse in acqua per una profondità di circa cinque centimetri. La lettura delle altezze è incominciata dal momento in cui l'acqua nell'interno di ciascuna canna ha raggiunto il livello dell'acqua all'esterno. Nella prima ora la lettura è stata fatta ogni 15 minuti; quindi dopo 2, 3, 6, 12 ore, dopo 1 giorno; in seguito ogni giorno. Dopo ogni lettura è stata aggiunta ogni volta nuova acqua fino a ripristinare nel recipiente d'immersione il livello iniziale.

Dato che quello che più interessa ai fini pratici non è tanto l'altezza massima raggiungibile, quanto la velocità di ascesa, la durata di quattro mesi è sembrata più che sufficiente per mettere in evidenza il fenomeno da questo punto di vista.

Delle molte letture fatte vengono riportate solo alcune, sufficienti del resto a rendere il fenomeno in tutta la sua evidenza.

(1) Determinate secondo GEDROIZ. K. K. GEDROIZ, *Chemische Bodenanalyse*, G. Borntraeger, Berlin 1926, p. 125.

(2) K. K. GEDROIZ, « Kolloid. Beihefte », 33, p. 422 (1931).

*Velocità di ascesa capillare dell'acqua  
in un terreno saturato con cationi differenti.*

DURATA DI ASCESA	Altezza in cm. raggiunta con i cationi.							
	Na	NH <sub>4</sub>	K	Mg	Ca	Ba	Al	H
15 minuti . . . . .	—	—	0.2	0.3	0.7	1.1	0.9	2.5
30 » . . . . .	—	—	0.4	0.9	1.9	2.2	2.0	4.2
45 » . . . . .	—	—	0.6	1.4	2.7	3.2	2.9	5.7
1 ora . . . . .	—	—	0.7	1.7	3.4	4.0	3.7	6.8
2 ore . . . . .	—	—	0.9	3.4	5.7	6.6	6.4	10.6
3 » . . . . .	—	—	1.1	4.7	7.5	8.7	8.4	13.0
6 » . . . . .	—	0.2	1.4	7.6	11.6	13.4	12.8	18.8
12 » . . . . .	—	0.4	1.7	11.4	17.0	19.5	18.1	26.0
1 giorno . . . . .	—	0.7	2.1	17.4	25.0	28.5	25.7	35.8
2 giorni . . . . .	—	1.2	2.6	25.5	34.9	39.5	34.0	47.3
3 » . . . . .	—	1.7	3.3	32.3	42.1	47.6	39.9	55.4
4 » . . . . .	—	2.0	3.4	37.2	47.5	54.2	44.2	62.0
5 » . . . . .	—	2.7	3.9	41.8	52.2	59.7	47.9	67.5
6 » . . . . .	—	3.2	4.2	45.7	56.2	64.3	51.3	72.3
8 » . . . . .	—	4.1	4.9	52.6	62.7	71.3	57.1	81.3
10 » . . . . .	0.1	4.9	5.6	58.1	67.8	76.7	62.3	88.3
15 » . . . . .	0.2	6.4	7.2	67.9	77.1	86.4	74.5	102.5
20 » . . . . .	0.4	7.8	8.7	75.1	83.4	93.6	84.4	114.5
1 mese . . . . .	0.5	9.5	11.0	84.7	93.2	103.9	101.2	132.2
2 mesi . . . . .	0.7	14.0	16.0	103.7	112.3	123.1	135.0	163.1
3 » . . . . .	0.9	16.5	21.5	116.0	125.1	136.9	157.8	180.9
4 » . . . . .	1.0	18.5	25.0	123.2	133.2	146.8	171.0	195.2

Come si vede chiaramente dai dati riportati, tutte le altre proprietà, caratteristiche e condizioni rimanendo uguali, la sola natura dei cationi di scambio ha grande influenza sull'ascesa capillare dell'acqua nel terreno. Pure evidente da essi appare il fatto che tali cationi, nell'esercitare la loro influenza, si ordinano i monovalenti secondo una progressione che non è difficile riconoscere per la serie liotropica di Hofmeister o per la serie di idratazione di Riesenfeld e Reinhold e di Bragg, e i bivalenti, scartando notevolmente rispetto ai monovalenti, secondo una progressione che è proprio la serie dei cationi bivalenti ordinati secondo i loro raggi atomici crescenti, o, per le ricerche di Jenny <sup>(1)</sup>, secondo la loro crescente capacità di penetrare nel complesso di scambio. L'ione idrogeno assume, anche questa volta, una posizione irregolare.

Sperimentando sui medesimi campioni di terreno l'ascesa capillare di altri liquidi, per es.: del benzolo, dell'alcool, dell'etere, si è notato che questi ascendono press'a poco ciascuno con la medesima velocità qualunque sia la natura del catione.

Questa influenza dei cationi di scambio, esercitandosi, almeno per i casi considerati, soltanto in presenza di acqua, dovrà aver sede particolarmente ed essenzialmente nei rapporti reciproci tra acqua e terreno: o, più particolarmente, i cationi di scambio dovranno esercitare la loro influenza attraverso le modificazioni che essi inducono, in presenza di acqua, in quelle proprietà che in un terreno determinano l'ascesa capillare dell'acqua medesima.

Molte sono le proprietà che, come tutta una schiera di sperimentatori <sup>(2)</sup> ha messo in evidenza, risentono in presenza di acqua della natura dei cationi di scambio: così il grado di dispersione, il rigonfiamento, l'umidità equivalente, l'assorbimento del vapor d'acqua, il pH, lo scambio dei cationi, la filtrazione, ecc.

Fra tutte, il grado di dispersione ed il rigonfiamento in particolar modo determinano il regime capillare di un terreno; sarà perciò attraverso esse che agirà la natura dei cationi di scambio. Tanto l'una come l'altra proprietà risentono l'influenza di tali cationi: tanto la prima come la seconda di queste proprietà vanno variando in grandezza nel senso del grado di idratazione dei cationi che saturano il complesso colloidale; perciò tutte e due insieme cospirano nel senso della serie liotropica alla diminuzione della capillarità, nel senso inverso della serie liotropica alla diminuzione della velocità di ascesa. Per tal modo trovano ampia ragione le forti variazioni nella velocità di ascesa e l'impermeabilità quasi assoluta del terreno saturato con sodio.

Ora, dispersione e rigonfiamento sono fenomeni che hanno una causa in comune; sono fenomeni interdipendenti o sono fenomeni indipendenti;

(1) H. JENNY, « Kolloidch. Beihefte », 23, p. 428 (1927).

(2) I. N. ANTIPOV, KARATAJEV e A. I. RABINERSON, loco citato.

hanno la loro ragione nell'idratazione degli ioni che circondano la micella o nella reazione che si genera nel mezzo in seguito alla scissione idrolitica dell'ultramicrone oppure, ciò che fa lo stesso, in seguito all'azione degli ioni idrogeno dell'acqua sullo strato ionico esterno dell'ultramicrone? A tali questioni non è stato ancora definitivamente risposto.

La spiegazione che danno dei fenomeni di dispersione e di rigonfiamento Wiegner<sup>(1)</sup> e la Sua Scuola<sup>(2)</sup>, fondata sull'idratazione degli ioni che costituiscono lo strato esterno della micella, è suggestiva ed in ogni caso ben si accorda con i risultati della esperienza. Ed anche nel presente caso la rappresentazione di Wiegner ha sull'altra, sulla rappresentazione che riporta il rigonfiamento e la dispersione alla reazione del mezzo, il grande vantaggio di riportare le forti variazioni trovate a forti differenze nel grado di idratazione degli ioni, piuttosto che a piccole variazioni nella reazione del mezzo<sup>(3)</sup>.

#### CONCLUSIONI.

In un medesimo terreno saturato con cationi differenti l'acqua ascende con velocità differenti.

Il fenomeno è dovuto in linea generale alla parte che hanno i cationi di scambio nel determinare e nel regolare i rapporti reciproci tra acqua e terreno; più in particolare all'influenza dei cationi di scambio sulla dispersione e sul rigonfiamento.

Nella loro influenza su tali proprietà i diversi cationi di scambio si ordinano secondo una progressione che non è difficile riconoscere per la serie liotropica o per la serie di idratazione; quindi nel determinare la velocità di ascesa capillare si ordinano secondo la serie inversa.

**Chimica.** — *Nuovi composti complessi del cianuro di argento col cianuro di sodio.* Nota di G. A. BARBIERI e A. TETTAMANZI, pres. dal Corrisp. M. BETTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Sulla stereoisomeria dei derivati 2.2'-disostituiti del difenile.* Nota di A. CORBELLINI e M. ANGELITTI, pres. dal Corrisp. L. CAMBI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) G. WIEGNER, « Mitt. aus d. Geb. der Lebensmitteluntersuchung und Hygiene », 22, p. 327 (1931).

(2) H. PALLMANN, « Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellsch. in Zürich », 76, p. 16 (1931).

(3) B. AARNIO, *Influence of absorbed ions on soil reaction.* Helsingfors (1927).

**Chimica.** — *La suscettibilità magnetica delle uree, delle isouree e della solfammide.* Nota di G. DEVOTO, pres. dal Corrisp. L. CAMBI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Paleontologia.** — *Su di una nuova specie di « Schizaster »* <sup>(1)</sup>.  
Nota di GISELDA SERRA, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio A. MARTELLI.

Lo *Schizaster*, che forma l'oggetto di questa breve Nota paleontologica, fa parte della collezione degli Echinidi dell'Istituto di Paleontologia della R. Università di Roma. Purtroppo esso non è accompagnato da nessuna etichetta e quindi la sua provenienza ci è del tutto sconosciuta. Il materiale che ricopriva ancora in qualche parte il guscio e quello che lo riempie, visibile da una frattura che interessa la parte abactinale dell'interambulacro impari, è un calcare organogeno, che ricorda molto, per il suo aspetto, il calcare pliocenico dei dintorni di Milazzo e di quelli di Reggio Calabria. Non essendo questo Echinide accompagnato da altri fossili e trattandosi di una specie, che a mio giudizio sembra nuova, nulla si può dire anche riguardo alla sua età.

Ciononostante ho creduto di un certo interesse descriverlo per il suo perfetto stato di conservazione ed anche perchè, il guscio, nonostante la sua sottigliezza e le sue forti dimensioni, non è per nulla deformato, per cui la forma è perfettamente conservata. E passo senz'altro alla descrizione dell'esemplare.

SCHIZASTER PORTISI n. sp.

*Dimensioni:*

Lunghezza (a) . . . . .	mm. 86
Larghezza (b) . . . . .	» 77
Altezza (c) . . . . .	» 52
$\frac{a}{b}$ . . . . .	89
$\frac{b}{c}$ . . . . .	60

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Paleontologia della Regia Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.



*Descrizione.* — Echinide di grandissime dimensioni, molto alto posteriormente, spesso anteriormente, con la maggiore larghezza circa verso la metà del diametro antero-posteriore, fortemente intaccato avanti, ristretto ed appuntito indietro, e dal contorno angoloso.

Faccia superiore declive, piuttosto rapidamente, in avanti e con altezza massima subito dietro l'apice (a circa mm. 6).

Faccia posteriore rostrata in alto e troncata obliquamente.

Faccia inferiore debolmente rigonfia nella regione marginale, sollevata sul plastron, che è acuto anteriormente e ricoperto di tubercoli disposti regolarmente a *chevron*, e gradatamente più piccoli verso il tallone.

Apice eccentrico indietro, ai  $\frac{3}{4}$  circa della lunghezza totale ( $\frac{56}{86}$ ).

Apparecchio apicale situato in una debole depressione sormontata dalle aree interambulacrali, esteso trasversalmente. Esso è formato di due sole placche genitali (2.3), che portano ognuna un poro circolare, largamente aperto; la placca madreporica è molto più sviluppata dell'altra e penetra sensibilmente nell'interambulacro posteriore, terminando a punta ottusa. Il contorno delle placche è frastagliato. Le cinque ocellari di forma subtriangolare, con foro ocellare allungato radialmente, sono incastrate nelle frastagliature delle due genitali; la III è addirittura situata in una profonda insenatura, sì che viene a trovarsi ad un livello inferiore a quello delle II e IV.

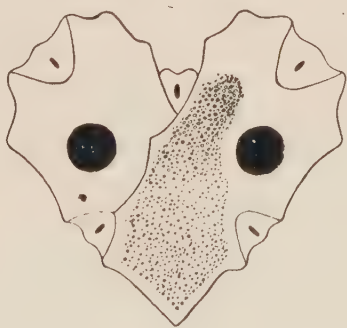


Fig. 1. *Apparecchio apicale*, notevolmente ingrandito.

Ambulacro impari situato in solco molto profondo, scavato, che si slarga prima lentamente, poi rapidamente, raggiungendo la massima larghezza (mm. 13) verso la metà della sua lunghezza, poi si restringe per raggiungere la massima profondità in corrispondenza della fasciola, al di là della quale, intaccando profondamente il bordo anteriore, continua a restringersi, mentre il fondo si solleva, e va a svanire verso il peristoma. Le pareti del solco sono scavate e sormontate dal bordo delle aree interambulacrali; alla base di queste escavazioni sono situate le zone porifere, molto strette. Le coppie di pori sono molto avvicinate e situate sempre circa alla

stessa distanza l'una dall'altra sino alla fasciola. Zona interporifera larghissima, concava, a suture apparenti; queste sono visibili anche al di là della zona porifera lungo le pareti laterali.

Ambulacri pari anteriori molto lunghi (mm. 36), profondi (circa mm. 4), caudati all'inizio, dritti in seguito e slargantisi lentamente fino all'estremità, che è arrotondata e rivolta insensibilmente indietro. Le pareti sono scavate: subverticali le interne, molto oblique le esterne,

Zone porifere larghissime, leggermente aperte, composte nella parte allargata di 35 coppie di pori allungati, di cui gli interni ellittici, gli esterni piriformi, congiunti da un solco profondo; in quella caudata se ne contano 10, quasi microscopici, ma ben visibili. Zona interporifera molto più stretta di una porifera.

Ambulacri posteriori scavati come gli anteriori, più lunghi della metà di questi (mm. 20); caudati verso l'apice, dopo una leggerissima flessione esterna, essi si slargano bruscamente e diventano profondi, conservando la stessa larghezza sino alla fasciola; le pareti dei solchi sono perfettamente simmetriche e questi assumono l'aspetto di un cucchiaino. Zone porifere larghissime composte di 28 coppie di pori, dei quali 17 nella parte slargata e 11 in quella caudata; per questi vale la descrizione fatta per i petali anteriori.

Aree interambulacrali anteriori strette nella regione apicale ed acutamente carenate, formanti un pendio dolce verso i petali pari, ripido verso l'impari; questa carena a circa 1 cm. dall'apice lentamente si sdoppia e le due carene così originatesi diventano sempre più divergenti (circa mm. 8, al passaggio della fasciola), raggiungendo la massima divergenza verso il bordo anteriore. Lungo il loro percorso esse sono marcate da nodosità che diventano più forti verso la parte anteriore del guscio.

Le aree interambulacrali posteriori sono molto larghe e formate di larghe placche irregolarmente esagonali, fortemente nodulose; queste nodosità scompaiono sulla faccia inferiore.

Interambulacro impari carenato, provvisto di due carene ottuse che si slargano verso il periprocto, al di sotto del quale circoscrivono un'area triangolare depressa; pure queste carene sono nodulose e le nodosità sono più marcate verso la faccia inferiore.

Fasciola peripetala angolosa, larga, con strozzature in corrispondenza delle nodosità, a reticolo visibile anche a debole ingrandimento; essa circonda molto da vicino i petali, dei quali rasenta le estremità, ed attraversa il solco anteriore a breve distanza dall'ambito.

Fasciola latero-subanale più stretta; essa s'inizia verso la metà dei petali anteriori, si spiega in giù quasi dritta e poi le due branche scendono bruscamente in basso circoscrivendo l'area subanale depressa e congiungendosi verso il tallone del plastron.

Peristoma grande, largo, reniforme debolmente depresso, con labbro posteriore poco sporgente; esso è distante 16 mm. circa dal bordo,

Periprocto piccolo, situato in alto della faccia posteriore sotto la sporgenza tectiforme del rostro; ellissoidale, longitudinale, appuntito in alto ed in basso e sovrastante l'area triangolare depressa.

Tubercoli piccoli su tutta la faccia superiore, man mano essi vanno ingrandendosi verso il contorno; sulla faccia inferiore, specialmente verso il peristoma; sono più radi. Tutti sono impiantati su zoccoli obliqui caratteristici. Sul plastron sono seriatì. Granulazione intermedia finissima.

*Rapporti e differenze.* — Non avendo alcun dato riguardo all'età dell'esemplare in esame, per poter giungere ad una determinazione, ho dovuto estendere il confronto non solo alle forme plioceniche, ma anche a quelle più antiche del bacino mediterraneo. Effettivamente questo esemplare ha forti rapporti con i vari *Schizaster* neogenici, specialmente, con le grandi specie dell'Algeria, descritte dal Pomel<sup>(1)</sup> e con quelle del Pliocene italiano descritte dal Checchia-Rispoli. Tuttavia, come dirò in seguito, esso non può essere identificato con alcuna di queste. Notevoli sono pure i rapporti con l'ancora vivente *Schizaster canaliferus*, quale risulta dalle descrizioni dell'Agassiz<sup>(2)</sup> del Koehler<sup>(3)</sup>, del Checchia-Rispoli ecc., per la forma generale del guscio, per la posizione e forma del periprocto, per la forma dell'ambulacro impari; nonostante queste rassomiglianze, lo *Schizaster canaliferus* resta nettamente distinto per le zone porifere dell'ambulacro impari a pori sdoppiati.

Fra gli *Schizaster* descritti dal Pomel rimangono più vicini all'esemplare in esame: lo *Schizaster speciosus* e lo *Schizaster sahariensis* ed in grado minore lo *Schizaster maurus* dello stesso autore. Si può *a priori* facilmente escludere lo *Schizaster maurus* per il suo contorno cordiforme e per il solco impari più stretto e meno profondo, trascurando altre differenze d'importanza secondaria.

Lo *Schizaster speciosus* ha rapporti più stretti, tuttavia notevoli sono pure le differenze: questo *Schizaster* algerino ha l'apice un po' più eccentrico indietro, le carene che limitano il solco impari parallele, il periprocto largamente ovale, quasi rotondo, il labbro del peristoma più sporgente. Gli ambulacri pari meno profondi e più stretti. Anche il numero dei pori è differente specialmente negli ambulacri posteriori. Osserviamo infine, riguardo alla forma, che lo *S. speciosus* ha la faccia posteriore più scavata ed il guscio meno alto. Del resto, lo *S. speciosus* come recentissimamente ha osservato il Lambert<sup>(4)</sup>, che ha studiato due esemplari del Capo Bon,

(1) POMEL A., *Paléontologie de l'Algérie. Échinodermes*. 1885.

(2) AGASSIZ A., *Revision of Echini* in «Mem. Mus. Comp. Zoology», Cambridge Mass., 1872-74.

(3) KOEHLER, *Échinodermes. Faune de France*. Parigi, 1921.

(4) LAMBERT, *Étude sur les Échinides fossiles du Nord de l'Afrique* in «Mem. Soc. Géol. de France», Paris, 1931.

provenienti l'uno da l'Oned Ramla e l'altro dalla regione di Sionville, è caratterizzato oltre che dalla sua forma acuminata e rostrata indietro, anche dal suo lungo solco canaliforme, non strangolato in avanti, caratteri che lo allontanano parecchio dall'esemplare in esame.

Alla forma da noi descritta si avvicina maggiormente lo *Schizaster saheliensis*. Questi due echinidi sono collegati da stretti rapporti, che consistono nella costituzione e profondità del solco impari, nell'eccentricità dell'apparato apicale, nella forma e percorso delle fasciole, nel labbro del peristoma in entrambi poco sporgenti. Per altro, l'esemplare in esame ha una forma molto più alta ed un contorno più arrotondato. Gli ambulacri pari anteriori hanno sì la medesima forma ed inclinazione, ma ne differiscono per una maggiore profondità e larghezza. Le differenze sono maggiori per quanto riguarda la forma degli ambulacri posteriori, molto caratteristica nel nostro esemplare e che somiglia a quella di un cucchiaino. Anche il numero dei pori sia per gli ambulacri anteriori che per i posteriori è differente. Infine un'altra differenza non trascurabile sta nella forma del periprocto, che nell'esemplare algerino è largamente ovale quasi rotondo, mentre nel nostro esemplare è ellittico, stretto ed appuntito verso le estremità superiore ed inferiore.

Recentemente il Lambert<sup>(1)</sup> ha dato una nuova descrizione dello *Schizaster saheliensis*, la quale differisce notevolmente da quella che danno gli illustratori degli Echinidi fossili dell'Algeria<sup>(2)</sup>, specialmente per i petali pari anteriori molto flessuosi. Questa nuova descrizione allontana ancora più il nostro esemplare dallo *Schizaster saheliensis*.

Riguardo agli *Schizaster* descritti dal Checchia-Rispoli<sup>(3)</sup>, osserviamo che lo *Schizaster Canavarii* del piano siciliano delle falde del Monte Pellegrino (Palermo)<sup>(4)</sup> pur avendo in comune con l'esemplare in esame la forma generale, l'eccentricità dell'apparecchio apicale, il percorso della fasciola, ha per altro i petali pari del tutto differenti: infatti gli anteriori nella specie siciliana sono molto più flessuosi e quelli posteriori più stretti ed il solco impari intaccante più profondamente l'ambito.

Lo *Schizaster Lamberti*, dello stesso autore, del pliocene di Enna (olim Castrogiovanni) differisce per i petali pari molto più stretti e molto più flessuosi, per il peristoma maggiormente spostato avanti e per l'apice più eccentrico indietro.

(1) LAMBERT, *Revision des Échinides fossiles de la Catalogne*, Barcellona, 1928.

(2) CORTEAU, PERON et GAUTIER., *Échinides fossiles de l'Algérie*, fascicolo 10°, p. 111, (1891).

(3) CHECCHIA-RISPOLI G., *Gli Echinidi viventi e fossili della Sicilia*, P. III. *Appendice alle parti prima e seconda*, in «Palaeontographia Italica», vol. XXII, p. 226, tav. VI, fig. 13. Pisa, 1916.

(4) CHECCHIA-RISPOLI G., *Gli Echinidi viventi e fossili della Sicilia*, P. IV. *Echinidi Pliocenici*, in «Palaeontographia Italica», vol. XXII, p. 241, tav. XXVIII, fig. 3. Pisa, 1916.



Infine lo *Schizaster Aichinoi*, proveniente dalla formazione pliocenica estesa lungo il litorale tra Anzio e Nettuno <sup>(1)</sup>, ha un guscio molto più acuminato indietro e fortemente rostrato, l'apice molto più eccentrico, i petali più flessuosi e più stretti ed il solco anteriore più lungo, canaliculiforme ed a bordi quasi paralleli.

**Geologia.** — *Il Miocene del M. Vallassa.* Nota di A. BONI, pres. dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geologia.** — *Sulla Geologia del M. Pisano.* Nota di R. REDINI, pres. dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Zoologia.** — *La autotomia dell'apparato digerente e la sua rigenerazione nelle Oloturie, come fenomeno spontaneo e normale* <sup>(2)</sup>. Nota di FAUSTA BERTOLINI, presentata <sup>(3)</sup> dal Socio G. DAL PIAZ.

In una Nota pubblicata in questi « Rendiconti » nel 1930 <sup>(4)</sup> ho descritto la rigenerazione dell'apparato digerente di una specie di Oloturoide, lo *Stichopus regalis*, dimostrando che esso si riforma da elementi mesodermici. Una più estesa pubblicazione sull'argomento, corredata di figure, è poi comparsa nelle « Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli » <sup>(5)</sup>.

Quelle ricerche furono eseguite mediante osservazione e raccolta di stadi rigenerativi di animali pescati dal mare durante l'anno 1928. In quella occasione constatai che non è indifferente pescarli in qualunque stagione, perchè mentre potei ottenere un grande numero di animali rigeneranti in alcuni mesi, in altri invece non potevo trovarne.

(1) CHECCHIA-RISPOLI G., *Gli Echinidi del Pliocene di Anzio*, in « Mem. d. Carta Geol. d'Italia », vol. IX, p. 20, tav. IV, figg. 2, 2a, 2b. Roma, 1923.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Padova, e nella Stazione Zoologica di Napoli.

(3) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(4) *Rigenerazione dell'apparato digerente nelle Oloturie*, in « Rendiconti Acc. Lincei », vol. XI (6), 1° sem., p. 600.

(5) *Rigenerazione dell'apparato digerente dello « Stichopus regalis »*, in « Pubblic. Staz. Zool. Napoli », vol. X, p. 439-447, tav. XVI; inoltre: *Rigenerazione dell'intestino nelle Oloturie*, in « Atti dell'XI Congr. intern. Zool. », Padova 1930, p. 421.



Questa constatazione mi ha indotto a fare una ricerca apposita per stabilire la relazione tra la stagione e la rigenerazione.

Riporto prima di tutto i dati che ho raccolto a questo proposito.

14 ottobre 1930. — 10 *Stichopus* vengono esaminati. Di questi, uno solo ha l'intestino di apparenza normale; 7 sono in vario stadio di rigenerazione, anche assai precoce, e 2 sono vuoti.

16-18 ottobre 1930. — Su 20 *Stichopus* si trovano 17 in varî stadi di rigenerazione; tre sono privi di visceri.

16 settembre 1931. — Benna Palumbo (160 metri) 6 esemplari.

Trovati tutti e 6 in varî stadi precoci di rigenerazione. Tubicino regolare diritto, trasparente, con abbozzo di polmoni.

28 settembre 1931. — Ammontatura (profondità 160 metri) 16 esemplari.

1° In corso di rigenerazione con accenno all'ansa ma senza reti mirabili. Trasparentissimo e leggero. Polmoni lunghi ma appena sviluppate le vescichette.

2° Visceri in rigenerazione più avanzata, si autotomizza durante l'operazione. Polmoni con poche vescichette.

3° Come il precedente.

4° Vuoto.

5° Intestino in rigenerazione appena iniziata, pallidissimo con anse appena accennate. Polmoni corti con poche vescichette.

6° Come il n. 1°. Polmoni corti. Esofago pigmentato.

7° Completo.

8° e 9° Intestino fine con il solo accenno dell'ansa.

10° Intestino fine, incolore con l'ansa e vaso congiungente. Non reti. Polmoni corti.

11° Rigenerazione un po' avanzata.

12° Quasi normale ma riconoscibile nella sua rigenerazione dai polmoni poco sviluppati nelle vescichette e reti non riconoscibili macroscopicamente.

13° Stadio giovanissimo. Tubo sottile diritto trasparente senza ansa. Qualche granello di sabbia nel contenuto. Polmoni appena abbozzati.

Pozzuoli (profondità m. 50) 5 esemplari.

1° Vuoto.

Gli altri in varî stadi precoci di rigenerazione.

1 ottobre 1931. — Ammontatura (profondità m. 160) 57 esemplari.

3 in rigenerazione avanzata;

15 in rigenerazione appena cominciata con tubicino sottile trasparente senza ansa e polmoni appena abbozzati;

12 in rigenerazione più avanzata con ansa senza reti e polmoni senza vescichette;

15 intestino rigenerato trasparente con ansa e polmoni più lunghi con accenno alle vescicole;

10 intestino in rigenerazione con ansa senza reti riconoscibili macroscopicamente. Polmoni corti con vescichette. Sabbia nel contenuto.

*Primavera 1931.* — Di fronte a questi risultati ottenuti colle pesche autunnali, quelle della primavera hanno dato risultato completamente diverso. Su più di 50 animali raccolti in questa stagione, nessuno presentava stadi di rigenerazione. Tutti avevano i loro visceri normali; due individui li rigettarono nella vasca poco dopo il loro arrivo in laboratorio.

Raccogliendo in un unico prospetto i dati su riferiti, risulta insomma quanto segue:

	Vuoti	In rigenerazione	Completi	Totale
14-18 ottobre 1930 . . . . .	5	24	1	30
16-28 sett. e 1° ott. 1931 . .	2	78	1	81
22 ottobre 1931 . . . . .	—	8	—	8
	7	110	2	119

Da questo prospetto risulta che nella stagione autunnale è normale trovare gli *Stychopus regalis* in stadi di rigenerazione dell'apparato digerente tanto che, anche quei due esemplari che ho trovato completi penso dovessero aver già rigenerato i visceri.

Nel gen. *Holothuria* invece questo fenomeno non si osserva, essendo molto raro il caso di trovare uno di questi animali con l'apparato digerente in via di rigenerazione.

Però avendo ripetuto in primavera il tentativo di ottenere l'eviscerazione mediante « corrente faradica », sono riuscita non solo a mantenere gli animali in ottime condizioni, ma anche ad avere in numerosi esemplari la completa rigenerazione dell'apparato digerente.

Ho potuto così seguire il fenomeno durante i vari stadi. Interessante fu il riscontrare che nelle due specie di animali che mi furono oggetto di studio, non risulta identico il processo, ed i reperti istologici non collimano.

In un lavoro che ho attualmente in corso darò in proposito più ampie notizie.

Insomma la possibilità di rigenerare i visceri esiste tanto nello *Stichopus* quanto nella *Holothuria*, ma le condizioni in cui il fenomeno si avvera sono molto diverse, perchè mentre nel primo esso appare spontaneo e normale, nella *Holothuria* si presenta invece solo accidentalmente in natura, forse come conseguenza di condizioni cattive o di traumi, come lo si può provocare in via sperimentale nel laboratorio.

S'intende che queste osservazioni, qui riferite, non escludono che si possa trovare anche in altre stagioni qualche *Stichopus* in corso di rigenerazione, mentre lo sono tutti durante l'autunno. Per il momento non posso dire se questa autotomia e spontanea rigenerazione sia in rapporto con qualche particolare circostanza della vita dello *Stichopus*.

**Zoologia (Embriologia).** — *Lo sviluppo della pinna degli urodeli, in base a ricerche morfologiche e sperimentali*<sup>(1)</sup>. Nota di T. TERNI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. LEVI.

Lo sviluppo della pinna dorsale e caudale degli Anfibi non è stato mai analizzato a fondo. Ancora oggi ci possiamo associare alla non recente affermazione di Spemann (1903) che non è conosciuto nè in quale stadio la striscia mediana dorsale dell'ectoderma acquista la sua determinazione, nè se quest'ultima abbia rapporto col sottostante canale midollare.

Goette (1875), Laguesse (1901), Braus (1906), Ruffini (1925) e Bijtel (1930 e 1931) hanno portato qualche contributo all'istogenesi della pinna. Bergel (1928) e Reverberi (1932) hanno studiato la formazione della pinna nelle gemme caudali ectopicamente trapiantate: il primo sostiene che la pinna si forma per materiale del datore, senza contribuzione del ricevitore, mentre invece il secondo A. ammette la possibile partecipazione del ricevitore. Spemann e alcuni suoi allievi e collaboratori (Hey 1911, Falkenberg e Spemann 1919, Ruud e Spemann 1923, Wessel 1926) dallo studio di alcuni casi di pinne soprannumerarie sperimentalmente ottenute con lo strozzamento mediano di germi precoci ecc., hanno supposto che la pinna sia determinata in due abbozzi pari dell'ectoderma ai lati della placca midollare. Politzer (1926) ritiene però che questo modo di vedere sia giustificato solo per la pinna del tronco e non per quella della coda.

Bytinski-Salz (1931), analizzando la costituzione di piccole code indotte da impianto di organizzatori, si è convinto che la pinna può essere formata

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Istologia-Embriologia della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

anche dall'epidermide ventrale del ricevitore. Bijtel e Woerdemann (1928), con la tecnica della marcatura, hanno dimostrato che il materiale formativo della pinna ventrale risiede nella zona esterna del labbro blastoporico laterale; Bijtel (1931), ha anche identificato nel cercine midollare una striscia di cellule che dà origine alle pinne caudali.

Le mie ricerche mi hanno dimostrato che in *Amblystoma mexicanum* la pinna dorsale è già determinata, in stadii abbastanza precoci, nel tegumento della regione medianadorsale del tronco. La cronologia e il meccanismo di tale determinazione sono regolati da molti fattori, dei quali io ho ricercato la natura con l'aiuto della tecnica dei trapianti secondo Spemann (tecnica che ho appreso sotto gli auspici della Fondazione Rockefeller, grazie all'ospitalità del prof. O. Mangold, del K. W. Istituto di Biologia in Berlino-Dahlem). Ho eseguito alcune centinaia di esperimenti di tipo differente su embrioni di *Amblystoma mexicanum* di vari stadi che sono compresi fra lo stadio di canale midollare appena chiuso e quello di bottone caudale lungo circa mm. 0.5 (= stadio 22 e stadio 31, indicati da Harrison per *Amblystoma punctatum* in tavole normali inedite). Gli embrioni di tali stadi furono usati ora come donatori ora come ricevitori e spesso i donatori erano colorati col solfato di bleu Nilo; in più ho utilizzato come donatori gastrule e neurule precoci di *Amblystoma mexicanum*, di *Triton toeniatus* e di *Triton alpestris*. Ecco i principali tipi di operazione eseguiti:

a) Ho sostituito rettangoli di epidermide presuntivo della pinna della regione mediana dorsale del tronco, con ectoderma presuntivo-ventrale di un altro germe, praticando trapianti auto-, omo-, o xenoplastici.

b) Ho asportato dal dorso, e quindi ho reimpiantato in sito, quadrati di ectoderma ruotati di 90° oppure di 180°, oppure spostati in direzione laterale.

c) Ho trapiantato rettangoli d'epidermide presuntivo della pinna dorsale del tronco, al posto di ectoderma presuntivo ventrale, con metodo autoplastico oppure omoplastico.

d) Ho asportato con microforbici (Mangold 1928) la sola cresta gangliare, previo sollevamento dell'ectoderma, che quindi ho ribattuto sul midollo.

e) Ho impiantato sotto l'ectoderma presuntivo del ventre la cresta gangliare, isolatamente asportata come indicato in d.

Riassumo qualcuna delle conclusioni principali, tratte da risultati concordi delle esperienze:

1° Negli stadi che immediatamente seguono la chiusura del canale neurale, la pinna non è ancora determinata completamente e nettamente nella striscia di ectoderma puro mediano del dorso. Infatti la precoce epidermide presuntiva della pinna, auto- od omotrapiantata nella regione ventrolaterale del tronco o sulla nuca, non è capace di produrre una pinna.



2° L'epidermide presuntiva laterale o ventrale del tronco di stadi molto giovani a partire dalla neurula, trapiantata al posto dell'ectoderma presuntivo della pinna dorsale, nella quasi totalità dei casi non forma una pinna, nella sua nuova posizione sovrastante agli organi assili del corpo. Gli organi profondi dorsali del tronco non posseggono cioè capacità induttrici; essi non agiscono neanche sull'ectoderma trapiantato dal confinante territorio nucale. Anche l'ectoderma ventrale della gastrula e l'epidermide della neurula precoce presentano una enorme difficoltà a formare una pinna, se sono trapiantati al posto dell'ectoderma della regione mediana del dorso.

3° Nei medesimi giovani stadi, se la striscia di ectoderma presuntivo della pinna è scollata e quindi di nuovo auto- o omotrapiantata nella regione stessa del dorso, dopo rotazione di 90° o dopo spostamento in senso laterale (vedi *b*), tale striscia dà origine ad una pinna perfetta e regolarmente orientata. Ciò dimostra che l'ectoderma in questione è già determinato rispetto al materiale pinnoformativo, ma che la determinazione è ancora labile rispetto all'asse e diffusa anzichè nettamente localizzata. L'induzione esercitata dagli organi profondi dorsali del tronco può farsi sentire dunque su ectoderma presuntivo della pinna, influenzando l'orientazione di quest'ultima.

4° In stadi un po' più inoltrati, poco prima o durante la comparsa della gemma caudale (st. 28-31 di Harrison), la striscia di ectoderma medianodorsale del tronco (alla quale si è andata saldando la cresta gangliare) se trapiantata al posto dell'epidermide di qualunque territorio ventrolaterale del tronco, produce una pinna normale. Cioè l'ectoderma, al quale si è accollata intimamente la cresta gangliare sottostante, acquista un perfetto grado di determinazione soltanto a partire dagli stadi 28-31 circa, per modo che, se trapiantato ectopicamente, ne è consentito lo sviluppo autonomo in pinna perfetta.

5° In assenza di sottostante cresta gangliare, asportata in stadi assai precoci, l'ectoderma pinno-presuntivo non forma pinna nella maggioranza dei casi; come pure non forma pinna l'ectoderma del ventre sotto al quale è stata impiantata cresta gangliare asportata da giovanissimi embrioni.

La conoscenza morfologica dello sviluppo della pinna è necessaria per ben interpretare i risultati dei miei esperimenti e a sua volta riceve luce da questi. Premettiamo che la pinna sorge dapprima sul bottone caudale e quindi si propaga a poco a poco sul tronco fino al livello del rilievo branchiale, dove nettamente si arresta. Nelle serie di sezioni dello stadio 22 di Harrison (doccia neurale appena chiusa), l'ectoderma mediano dorsale del tronco appare in forma di lamina assai spessa a due ordini di cellule cubiche. Si riesce a distaccare facilmente l'ectoderma di quella regione dai tessuti sottostanti, fino allo stadio 27 circa; a partire da tale stadio lo scollamento



diviene sempre più difficile fino a divenire affatto impossibile dopo lo stadio 31 circa.

Quale è la base istomeccanica di tali differenti possibilità operatorie? Nei giovani stadi (22-26) la cresta gangliare ha forma di cordone cellulare compatto, incuneato e fissato, come anche Raven (1931) ha descritto, nella parete dorsale del midollo; a questo la cresta rimane aderente allorché si scolla (facilmente in questi stadi) l'ectoderma. Come anche il controllo istologico dell'operazione effettuata dimostra, l'ectoderma distaccato in questi stadi è puro, cioè non soltanto privo di mesenchima (un derma cutaneo non è in questo momento ancora abbozzato nella regione dorsale mediana), ma anche libero dalla cresta.

A partire dallo stadio 27 circa l'ectoderma dorsomediano si fa via via più sottile e aderente ai sottostanti organi, finché dopo lo stadio 30 finisce col saldarsi tenacemente alla cresta gangliare, che a sua volta ha conservato la sua aderenza al midollo.

Di conseguenza, nei tentativi fatti per distaccare l'epidermide, questa o si lacera oppure porta con sé frammenti di cresta gangliare, di midollo e talvolta anche di segmenti mesodermici, come anche il controllo istologico dimostra; da alcune di tali impurità però si può sbarazzare l'epidermide presuntivo della pinna, prima di reimpiantarla.

Riprendiamo ora l'analisi dei risultati sperimentali. Abbiamo visto che, fino ad un certo periodo dello sviluppo e cioè fino a che epidermide e cresta gangliare non sono fra loro indissolubilmente saldati, né il solo ectoderma pinno-presuntivo né la sola cresta gangliare sono capaci separatamente di dare origine a una pinna; l'insorgenza della pinna è condizionata invece dalla contemporanea presenza dei due abbozzi; ectoderma « specifico » e cresta gangliare. A partire dallo stadio (27 circa), nel quale ha inizio il saldamento fra i due abbozzi, la formazione della pinna per sviluppo autonomo è assicurata.

Io penso che il saldamento stabilitosi fra epidermide e cresta gangliare costituisca il fenomeno per il quale si effettua una differenziazione dell'ectoderma nel senso del conseguimento di una determinazione localizzata, netta e orientata, che appunto si stabilisce nel periodo degli stadi 27-31. Ulteriormente, allo stadio 32-33 circa e oltre, l'ectoderma si libera dalla sua aderenza alla cresta, che comincia a rarefarsi; la pinna comincia a sollevarsi come una piega epidermica, dapprima sprovvista di mesenchima. È solamente in uno stadio più inoltrato che rare cellule mesenchimali si insinuano nello spazio chiaro evidentemente occupato da liquido interstiziale, sotto e dentro la piega ectodermica.

Anche Ruffini (1925), Laguesse (1901), Braus (1906) e Bijtel (1931), ammettono una penetrazione secondaria di cellule mesodermiche dentro la pinna che si sviluppa.

Gli organi dorsali del tronco, compresi la cresta gangliare e il mesoderma, non hanno dunque la potenza di indurre una pinna su di un precoce ectoderma presuntivo ventrale. Invece l'epidermide pinno-presuntiva, dal momento nel quale ha conseguito la sua determinazione, forma, ovunque trapiantata, una pinna perfetta.

Quello che io illustro non è il solo caso nel quale si deve attribuire all'ectoderma, solo o associato a un derivato ectodermico quale la cresta gangliare, una iniziativa morfogenetica quale più spesso si attribuisce al mesoderma, ad es. per la formazione degli arti o delle appendici branchiali, o del « balancer ». Harrison (1918 e 1925), Detwiler (1922), Swett (1923), Filatow (1928), Balinsky (1931), Rotmann (1931), hanno portato a questo proposito contributi sperimentali a sostegno della tesi favorevole all'ectoderma oppure favorevole al mesoderma. Di recente Chiarugi (1931), ha messo in luce in embrioni di Marsupiali interessanti trasformazioni dell'ectoderma come preludio all'abbozzo degli arti.

Secondo Ruffini (1925), la comparsa dell'abbozzo della pinna è negli Anfibi segnata da un sollevamento dell'ectoderma (assai sottile sul dorso) causato dalla tensione del liquido interstiziale sottostante. L'epidermide non presenta fenomeni sticotropici, ma piuttosto cede sulla linea mediana per un fenomeno nettamente localizzato di « non resistenza » specifica, per così dire.

Affatto di recente (dicembre 1931) Raven, studiando dal lato morfologico e sperimentale lo sviluppo della cresta gangliare di Urodeli, ha dimostrato fra l'altro che la cresta del tronco fornisce, come quella della testa, mesectoderma destinato a contribuire alla produzione del mesenchima della pinna. Secondo le mie ricerche però la partecipazione della cresta gangliare alla formazione della pinna deve essere considerata anche come una azione organizzatrice della cresta, esercitantesi sopra un ectoderma che già possiede un certo grado, sia pur labile e impreciso, di capacità pinnoformativa.

**Biologia** (Embriologia sperimentale). — *Osservazioni preliminari sui trapianti di abbozzi di cuore tra Anuri e Urodeli* <sup>(1)</sup>. Nota di GIULIO COTRONEI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. U. PIERANTONI.

Le esperienze che rapidamente riassumo, in un primo accenno, nella presente Nota, sono una necessaria estensione delle ricerche che da alcuni anni si vanno compiendo da me e dai miei allievi, sui trapianti tra Anfibi Anuri e Urodeli, e riguardano i trapianti di abbozzi cardiaci. Mi è sembrato opportuno, per i problemi così interessanti che involgono, indagare anche i vari aspetti del differenziamento e funzionamento cardiaco quando abbozzi di cuore di Anuri siano trapiantati in embrioni di Urodeli o inversamente quando abbozzi di cuore di Urodeli siano trapiantati in embrioni di varie specie di Anuri. In tal modo le proprietà biochimiche embrionali di Anfibi di ordini differenti hanno modo di far risaltare la loro influenza anche sui fenomeni riguardanti la contrazione cardiaca embrionale oltre che sui processi di sviluppo e differenziazione dell'organo.

Le ricerche di embriologia sperimentale del cuore, per la parte che ci riguarda, si possono considerare iniziate dal Born che nella *Rana esculenta* vide che si poteva ottenere la fusione di abbozzi cardiaci di due individui. Sanzo nel 1907 dimostrò con esperienze di innesti omoplastici, nel *Discoglossus*, che se due cuori sono saldati intimamente in maniera che i due ventricoli formano un'unica cavità, si può ottenere un perfetto sincronismo dei battiti cardiaci. Dal 1921 s'inizia una nuova fase in questo studio, che ha dato luogo ad una interessante contesa di ricerche sperimentali da parte di Ekmann (dal 1921 in poi) e di Stöhr (dal 1924 in poi). Ekman fin dal 1921, dopo una serie di esperienze sul *Bombinator*, di asportazioni di parti e di trapianti concluse che il cuore si può considerare come un sistema armonico equipotenziale con autodifferenziamento; ma Stöhr (1924) delimitò molto l'estensione di tali concetti in quanto che l'autodifferenziamento del cuore avrebbe un valore limitato.

È interessante il risultato di Ekman (1924), di aver ottenuto un cuore pulsante sviluppato in soluzione di Ringer: parrebbe così esclusa l'influenza di altri fattori morfogenetici, ma ciò nemmeno si può intendere in senso assoluto perchè Stöhr ha dimostrato, con trapianti eterotopici, che la circolazione sanguigna ha una notevole influenza non soltanto per la forma del cuore, ma anche per l'accrescimento e lo sviluppo dell'organo.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

Le ricerche di Copenhaver hanno indagato l'accrescimento dell'abbozzo cardiaco di *Amblystoma tigrinum* trapiantato in *Amblystoma punctatum*: le esperienze inverse ebbero esito migliore soltanto quando solo una parte dell'abbozzo cardiaco di *Amblystoma punctatum* si trapiantò nell'*Amblystoma tigrinum*. Nelle esperienze di Copenhaver tra le due differenti specie di *Amblystoma* si è ottenuto il risultato notevole che i due abbozzi di cuore, dell'ospite e del donatore, pulsano sincronicamente solo quando i due cuori vengono a contatto. Questi risultati confermano ciò che per il primo vide con altro metodo l'Olivo (contrariamente a Fischer); nelle colture *in vitro* combinate di due specie di Uccelli (pollo e piccione) si può ottenere isocronismo di contrazione negli espianati frammenti cardiaci.

Le mie ricerche, come ho sopra accennato, mirano a riportare entro limiti di distanze specifiche assai più ampie, la possibilità di studi sugli abbozzi cardiaci, ma è naturale che l'osservatore faccia gran conto dei risultati già noti per poter desumere il valore delle eventuali differenze.

Le osservazioni, iniziate nel 1931 e che tuttora continuano, sono state eseguite scegliendo, per la maggior parte, come donatori esemplari di *Rana esculenta* e come ospite il *Triton taeniatus*. Per la *Rana esculenta* sono stati adoperati embrioni nei quali cominciava appena ad accennarsi il bottone codale o anche a bottone codale tipico; per il *Triton* sono stati scelti embrioni a vescicola ottica primaria e inizio del bottone codale: spesso però fu adoperato anche materiale più avanzato di tritone. L'abbozzo del cuore di *Rana*, preso insieme con l'ectoderma soprastante, veniva trapiantato ventralmente nel *Triton*: per lo più caudalmente all'abbozzo cardiaco di quest'ultimo.

In queste operazioni ho ottenuto i risultati migliori. Infatti in numerose esperienze, dal trapiantato si è ottenuto lo sviluppo di un cuore pulsante. Il periodo di tempo in cui ho potuto distintamente seguire le pulsazioni è stato notevolmente vario ed è in rapporto a varie condizioni, una delle quali è la temperatura, in quanto ha influenza sulla rapidità di sviluppo. Anche il tempo d'inizio della contrazione dopo l'operazione di trapianto è in rapporto con questa condizione: in esperienze eseguite in maggio, poco più di due giorni dopo l'operazione distinguevo le prime contrazioni nel cuore di *Rana* trapiantato, in luglio ciò si è verificato più rapidamente.

L'esperienza in cui ho eseguito più a lungo le contrazioni del cuore di *Rana* trapiantato in *Triton* è quella del 6 maggio. Alla sera dell'8 distinguo le prime contrazioni, ma non le misuro: successivamente l'esperienza presenta il seguente comportamento, che viene riportato come indicativo.

9	maggio	ore	19	cuore di <i>Rana</i>	32	pulsazioni,	cuore di <i>Triton</i>	41
11	»	»	18.50	»	»	»	51	»
12	»	»	9.35	»	»	»	49	»



12	maggio	ore	17.30	cuore di	<i>Rana</i>	60	pulsazioni,	cuore di	<i>Triton</i>	75
13	»	»	11.30	»	»	»	55	»	»	73
13	»	»	18.40	»	»	»	72	»	»	83
14	»	»	17.45	»	»	»	73	»	»	93

(al m').

Già la sera del 13 maggio noto che le pulsazioni sono più numerose, ma meno forti, la sera del 14 sono percepibili solo ad un'osservazione assai attenta, per cui mi decido a fissare l'animale, edotto da molte altre esperienze in cui avevo finito per notare l'arresto del battito cardiaco nel cuore di *Rana* trapiantato in embrioni di *Triton*.

Il comportamento delle altre esperienze si presenta essenzialmente non dissimile; naturalmente variano i minimi e i massimi di pulsazione a seconda dell'inizio delle osservazioni e a seconda del termine dell'esperienza (senza escludere altre condizioni), ma sempre si nota un aumento progressivo di pulsazioni: le piccole variazioni in senso opposto sono evidentemente dovute a condizioni di temperatura.

In tutte le esperienze finora eseguite, in cui ho potuto notare due cuori distinti, non ho mai ottenuto un sincronismo di pulsazioni. In nuove esperienze tenterò di ottenere la fusione dei due cuori (di *Rana* e di *Tritone*) per vedere se in tali casi, ove si verificassero, è possibile ottenere il sincronismo dei battiti cardiaci. Successivamente riferirò sui controlli istologici attualmente in corso sull'esperienze già da me compiute.

Altre esperienze, per ora poco numerose, riguardano i trapianti di zone contenenti l'abbozzo di cuore di *Tritone* su embrioni di *Rana esculenta*: i trapianti andarono rapidamente distrutti: riferisco il risultato perchè coincide con quanto ho ottenuto per altri abbozzi embrionali di *Triton* sulla *Rana esculenta*, ma naturalmente per l'abbozzo del cuore intendendo ripetere ancora le esperienze.



**Biologia.** — *Ricerche sulle sostanze grasse intracellulari in vari tessuti coltivati in vitro* <sup>(1)</sup>. Nota di Z. SZANTROCH, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio G. LEVI.

L'esistenza di una certa quantità di grasso è quasi costante nelle cellule coltivate in vitro; così risulta almeno dalla comune esperienza. Però il significato di tale fatto, nè la natura del grasso contenuto, nè la sua origine furono fino ad oggi analizzate profondamente. Le mie ricerche furono rivolte allo studio di questi problemi. Ho coltivato vari tessuti di embrione di pollo in vari mezzi: plasma puro, oppure diluito con succo d'organi, o con liquido Ringer; oppure anche liquido Ringer puro. Le colture furono studiate viventi a luce trasmessa, inoltre col condensatore parabolico ed a luce polarizzata. Infine fu seguita la comune tecnica per i grassi e lipoidi; Sudan III, dopo fissazione in formalina; metodo Ciaccio; metodo Smith-Dietrich; acido osmico prolungando l'azione di questo fissatore per molti giorni.

Furono eseguite inoltre ricerche di controllo sovra embrioni tagliati col microtomo.

Indagini preliminari d'ordine tecnico mi hanno convinto che col metodo comunemente usato di colorare con soluzioni alcoliche di Sudan III il materiale fissato in formalina 10 %, la forma e la distribuzione originaria delle goccioline di grasso, quali si vedono nelle cellule viventi, viene sensibilmente modificata per effetto della fissazione; le goccioline si rigonfiano molto e col perdurare della diffusione del colore nell'interno di esse, scoppiano; oppure varie goccioline confluiscono; in una fase successiva prevale l'azione solvente dell'alcool; molte goccioline si appiattiscono, oppure se il grasso viene disciolto completamente al posto delle goccioline si vedono vacuoli.

Sono riuscito a diminuire la solubilità delle goccioline di grasso coll'aggiunta di formalina alla soluzione alcolica di Sudan III; trattando le colture viventi con una miscela di 4 parti di soluzione satura (a temperatura ambiente) di Sudan III in alcool a 95 % ed una parte di formalina pura per 2-5 minuti, la coltura viene fissata e colorata simultaneamente: si lava in acqua corrente; colorazione nucleare in ematossilina e si monta in gomma sciropo.

Lo stesso metodo fu adoperato da me con successo per la fissazione e colorazione in toto degli embrioni.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Umana della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

L'embrione veniva incluso in gelatina col metodo Heringa-Ten Berge e tagliato col microtomo congelatore.

Dal confronto fra le colture viventi e quelle colorate col metodo suddetto si nota che le immagini coincidono molto di più di quelle visibili nei preparati colla tecnica comune. Con questo metodo si apprezza nelle cellule una quantità di grasso molto più grande che nelle colture fissate in formalina e colorite colla tecnica di Romeis (colorazioni con soluzioni di Sudan III in alcool a 40 %), la quale pure, secondo l'esperienza dell'Autore e di vari altri, ha il vantaggio, di fronte alla tecnica più comune, di conservare un maggior numero di goccioline di grasso. Ed è specialmente importante che col metodo da me seguito si vedono colorati col Sudan III granuli polverulenti, quasi al limite della visibilità microscopica distinta. L'esistenza di questi granuli era sfuggita agli altri Autori, perchè coi metodi fin qui seguiti i medesimi sono disciolti.

Seguendo le cellule nella loro migrazione dall'espianto nel plasma ho dimostrato che esse contengono una certa quantità di grasso sin dal primo momento in cui emigrano nel plasma, vale a dire entro le prime 24 ore, talora anche a poche ore dopo il frammento fu espantato.

Da tempo era stato riconosciuto che, contrariamente a quanto si riteneva durante i primi tentativi di coltivazione, la presenza di grasso non è sempre l'espressione di un fenomeno regressivo.

Già i primi Autori che approfondirono l'analisi dei tessuti coltivati in vitro (Burrows, Lambert, G. Levi, lo avevano constatato ed io l'ho confermato) che cellule contenenti anche molto grasso si riproducono vivacemente per mitosi.

Ciò però non vale a risolvere l'antica questione se il grasso endocellulare derivi dal mezzo in cui le cellule sono contenute oppure derivi da trasformazioni del citoplasma.

Le cellule emigrate da espienti coltivati in un mezzo senza traccia di grasso, cioè in liquido di Ringer puro, contenevano egualmente granuli colorati; ma neppure questo fatto ha valore decisivo, perchè nelle colture le quali si trovano nelle suddette condizioni i prodotti di disintegrazione dell'espianto sono riversati nel mezzo e possono essere assunti dalle cellule.

Per risolvere l'importante questione dell'origine del grasso nelle cellule emigrate, ho voluto ricercare se questo appare soltanto nel momento in cui le cellule emigrano nel plasma, oppure preesiste negli elementi dell'espianto. Perciò ho studiato con gran cura la distribuzione di questa sostanza nei vari organi di embrione di pollo agli stadi corrispondenti a quelli da cui furono preparati gli espienti. Ebbene ho dimostrato che il grasso preesisteva nei vari organi nell'embrione, e, fatto particolarmente importante, presso a poco nella stessa forma nella quale appare nelle cellule della zona di migrazione, forma che è specifica per le colture dei vari organi.

Con altre parole vi è una netta specificità nella distribuzione del grasso

per ciascun tipo di cellula; e questa specificità si conserva quando la cellula emigra nel plasma, nonostante i mutamenti di forma ai quali le cellule vanno soggette nel nuovo mezzo. Ciò ha importanza da un duplice punto di vista, pratico e teorico. La quantità di grasso che le cellule contengono, la forma sotto cui è distribuito, se a gocce minutissime, di media grandezza, o voluminose, il numero di queste e la loro sede sono tutti caratteri specifici per ciascun tipo cellulare e che restano invariati, almeno durante i primi due giorni di vita della coltura. Ora noi sappiamo che le cellule nel migrare nel plasma spesso modificano a tal punto i propri caratteri, che sovente riesce praticamente impossibile di riconoscerle. Sappiamo ad esempio, quanto sia discussa la reale natura delle cellule emigrate da espianti di cuore; se fibroblasti, come è stato ammesso per molto tempo, o mioblasti (G. Levi, Olivo) oppure cellule degli endoteli dei vasi. Certamente in molte colture di cuore coesistono tutti e tre questi tipi cellulari. Ebbene la distribuzione del grasso, se questo fu conservato nella sua integrità, (il che soltanto col metodo da me seguito è possibile) è un eccellente criterio per distinguere questi tre tipi cellulari; infatti nei fibroblasti il grasso è a forma di scarse e grosse gocce, nei mioblasti in forma di gocce piccole e numerose; di ciò ho potuto convincermi esaminando colture nelle quali i mioblasti erano ben riconoscibili per altri caratteri.

Nelle cellule epiteliali le gocce di grasso sono in genere molto piccole e numerose, ma il numero, il volume e la distribuzione delle gocce varia nei singoli tipi di epitelio: nell'epitelio intestinale, nei canalicoli del mesonefro, nelle cellule epatiche. In queste ultime il grasso è più abbondante che in altri epiteli.

Nei neuroblasti il grasso è scarso ed è in forma di pochi granuli minutissimi, pulverulenti.

Questi caratteri specifici per i singoli tipi cellulari sono importanti anche da un altro punto di vista: perchè essi sono verisimilmente l'espressione della costituzione fisica di ciascun tipo cellulare, costituzione che i mezzi d'indagine istologica attuale non sono in grado di svelare.

In accordo con tutte le osservazioni precedenti, il grasso, già alla fine del 2° giorno di vita della coltura aumenta nell'interno delle cellule, e la sua quantità diviene sempre più considerevole nei giorni successivi. I granuli e le gocce di grasso preesistenti aumentano di volume; inoltre appaiono nuove gocce. Però in massima le modalità nella sua distribuzione, che, come ho detto, sono caratteristiche per ciascun tipo cellulare, sino ad un certo punto si mantengono.

Un aumento considerevole di questa sostanza, quale si ha di solito a partire dal 4° giorno di vita della coltura, è l'espressione di fenomeni regressivi; ed infatti la migrazione delle cellule diviene meno attiva, esse più non si moltiplicano.

Il problema più essenziale che da decenni si discute, quale sia la costi-

tuzione chimica delle sostanze grasse all'atto in cui entrano nella cellula e per quale processo fisico esse vi penetrino, non fu risolta da me, ed invero ritengo tale problema inaccessibile agli attuali metodi d'indagine istologica.

Certamente, fondandomi sui risultati di ricerche eseguite col metodo della colorazione vitale delle goccioline di grasso emulsionate nel plasma, escludo che queste penetrino nelle cellule per fagocitosi, o per lo meno per fagocitosi di particelle visibili al microscopio.

Non era nel programma delle mie ricerche di ricercare se eventualmente, come qualche Autore ritiene, vi sia una continuità materiale fra componenti morfologici della cellula ed il grasso.

È noto che Dubreuil, Lambert, Maximow ritengono che le goccioline di grasso derivino dai condriosomi; W. Lewis ed M. Lewis e G. Levi non hanno confermato questi reperti; e G. Levi ritiene che le goccioline di grasso si formino per condensazione di materiali disciolti nella parte fondamentale anista del citoplasma.

Per le mie osservazioni credo di poter negare che sussista continuità materiale fra i condriosomi e le goccioline di grasso.

Ho voluto ancora stabilire con metodo microchimico la natura delle goccioline intracellulari colorabili con Sudan III, se esteri di glicerina, esteri di lecitina o colesterina.

I risultati da me ottenuti sulle colture confermano quelli di Kaufmann e Lehmann che nè il metodo Ciaccio, nè quello di Smith-Drietrich valgono a distinguere con sicurezza il gruppo di sostanze comprese comunemente sotto la denominazione di lipoidi dagli esteri di glicerina.

E noto infatti che, secondo Kaufmann e Lehmann, dopo cromizzazione protratta per 5 giorni tutte le sostanze grasse, ad eccezione dei trigliceridi saturi, reagiscono positivamente col metodo Ciaccio. Per la riescita positiva della colorazione ha specialmente importanza il carattere non saturo dei grassi; sono resi insolubili dalla cromizzazione, acido oleico, trioleina ed esteri di lecitina e colesterina, in genere acido oleico e sue combinazioni. Rimangono solubili anche dopo cromizzazione acido stearico e palmitico e gli esteri di questi acidi e colesterina. Inoltre i solventi estraggono, secondo quegli A., molti dei cosiddetti lipoidi.

Certamente le colture si prestano per molte ragioni ad un controllo del valore dei metodi per i lipoidi.

Le mie ricerche su quest'argomento non sono complete; ma da quel che ho visto finora ritengo, ripeto, di potermi associare alle conclusioni di Kaufmann e Lehmann riguardo l'impossibilità di distinguere con metodo istologico i grassi dai lipoidi.



**Biologia** (Batteriologia). — *La coagulazione del latte per opera del B. typhi e di altri batteri ritenuti inattivi sul latte.* Nota di C. GORINI, pres. dal Socio P. R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisiologia** (Istofisiologia). — *La fibra muscolare striata varia di volume durante la contrazione?* <sup>(1)</sup> Nota di U. D'ANCONA, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio F. SILVESTRI.

Non mi consta che il quesito proposto nel titolo della presente Nota sia stato da alcuno affrontato. In ricerche di data recente Ernst (1925) e Versfelt (1928) si sono preoccupati di vedere se è giustificata la comune credenza che il muscolo contraendosi varia di forma, ma non di volume, e sono ambedue giunti alla conclusione che diminuzioni di volume ci sono, ma minime. Nessun autore si è invece, come ho detto, interessato di vedere se ci sono variazioni di volume nelle singole fibre.

Ricerche di tal genere non avrebbero potuto essere eseguite su fibre fissate, sulle quali i processi della contrazione sono stati finora generalmente seguiti. L'unico mezzo che a mio giudizio si presta a tale scopo è quello di studiare mediante la microcinematografia le contrazioni delle fibre viventi o sopravvivenenti. I due soli autori che di esso si sono valse, Hürthle (1909) e Lutembacher (1928), non si sono però occupati di tale problema. Perciò mi è sembrato molto interessante di vedere se in una fibra striata che si contrae si notano variazioni di volume nel suo complesso o nei singoli tratti della fibra sottoposti a diversi gradi di contrazione.

Ho potuto fare queste ricerche mediante le microcinematografie della contrazione muscolare, che l'Istituto « Luce » gentilmente mi ha concesso di far eseguire <sup>(3)</sup>.

Per le cinematografie stesse mi sono servito delle onde di contrazione spontanea che si osservano sulle fibre sopravvivenenti degli insetti. Ho usato fibre bianche dei muscoli delle zampe di idrofilo, montate, come in precedenti ricerche, in preparati volanti con solo piccole quantità di liquidi organici dell'insetto stesso, senza aggiunta di liquidi conservatori. In tali condizioni la fibra, che allo stato libero è più o meno cilindrica, viene a essere leggermente compressa tra i due vetrini. Perciò durante la contra-

(1) Dall'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata della R. Università di Siena.

(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(3) D'ANCONA U., *La contrazione della fibra muscolare striata studiata per mezzo della microcinematografia.* « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », vol. VI, 1931.



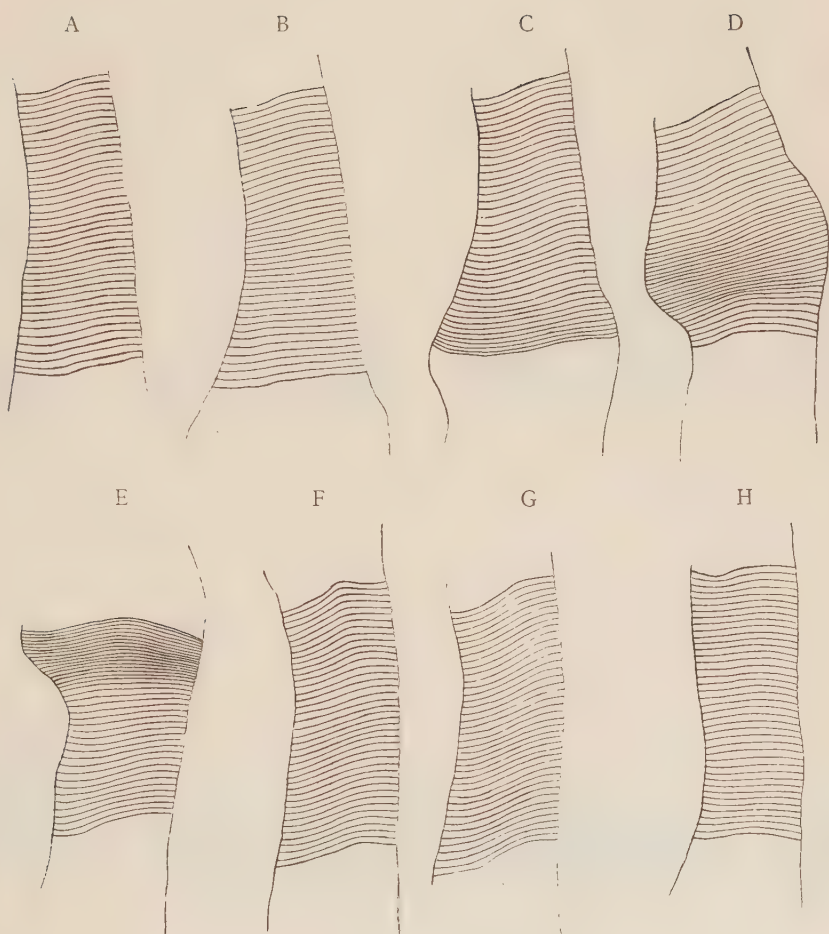
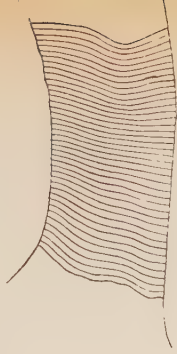
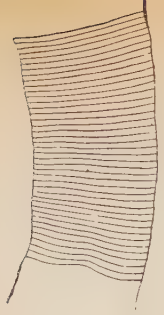


Fig. 1.



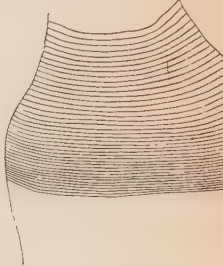
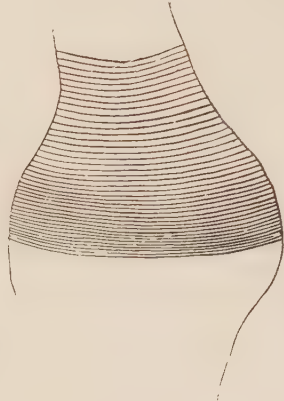
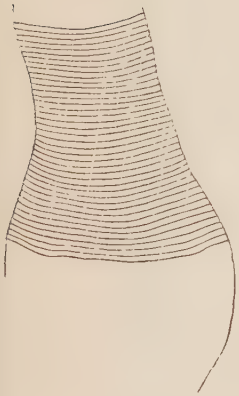


E

F

G

H

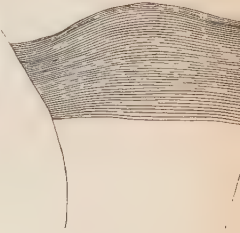
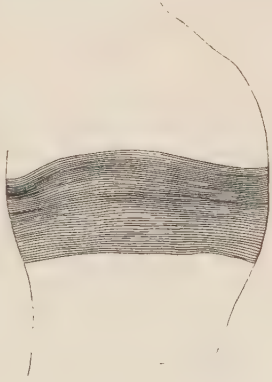
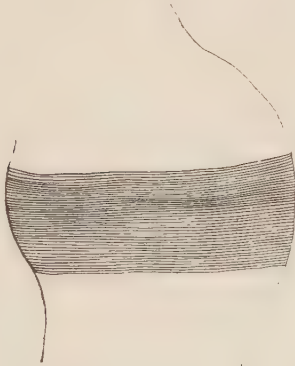


I

L

M

N

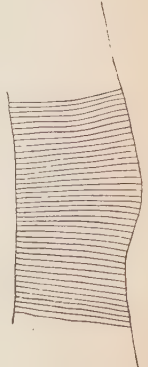
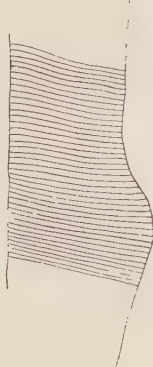
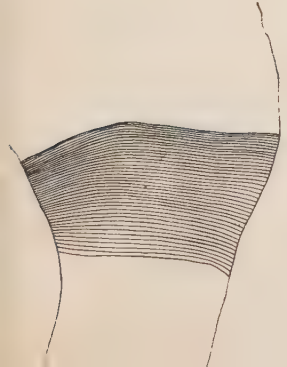


O

P

Q

R





zione l'onda non determina, come allo stato libero, un allargamento della fibra nella direzione di tutti i raggi della sezione trasversale, ma in una direzione sola, quella del piano del preparato, cioè del piano focale del microscopio; la fibra non si allarga invece nella direzione normale ai vetrini, come lo dimostra il fatto che durante la contrazione, anche se esaminata a forte ingrandimento, essa rimane sempre a fuoco. In queste condizioni l'allargamento nel solo piano del preparato è notevolmente maggiore che quando la fibra può allargarsi in tutte le direzioni.

Perciò nelle mie condizioni di osservazione, essendo lo spessore del preparato invariato, le aree delle fibre e delle loro singole porzioni erano proporzionali ai volumi delle relative porzioni di fibra. Nei fotogrammi della pellicola le variazioni di area che la fibra presenta sono cioè proporzionali alle variazioni di volume.

Per conseguenza, proiettando dalle pellicole con un notevole ingrandimento delle porzioni equivalenti di fibra, si possono, misurando le aree delle porzioni stesse, rilevare le variazioni di volume delle fibre. È questo il procedimento da me seguito. L'ingrandimento usato nella proiezione dei fotogrammi era sempre uguale, di circa 450-500 volte la grandezza naturale.

Per avere porzioni equivalenti di fibra ho preso, tanto nelle parti distese, quanto in quelle contratte, dei tratti comprendenti numeri uguali di incommi. Già in precedenti pubblicazioni ho affermato e dimostrato che le linee Z sono punti fissi della fibra, che rispetto al sarcolemma e alle fibrille non cambiano di posizione nella contrazione. L'incommo, il tratto di fibra compreso tra due linee Z, è perciò una porzione di fibra che potrà accorciarsi e allargarsi, ma che non subisce scorrimenti o altri spostamenti nella contrazione. Gli incommi sono quindi porzioni equivalenti nelle fibre distese o contratte.

Al mio scopo dunque ho utilizzato, per avere tratti di fibre confrontabili, dei tratti comprendenti numeri uguali di incommi. I risultati delle osservazioni possono essere alterati da errori dovuti a incertezza dei limiti degli incommi, al fatto che le superfici laterali della fibra non sono talvolta normali ai vetrini, ma oblique rispetto ad essi, alla circostanza che le linee Z non sono la proiezione di membrane trasversali, ma di una unica membrana elicoidale. Tutte queste cause di errore, se le osservazioni sono ripetute un sufficiente numero di volte, possono però essere controllate e mantenute in limiti tali da non alterare notevolmente i risultati.

Sulle figure ottenute proiettando le superfici dei tratti equivalenti di fibra (le figg. 1 e 2 ne offrono alcuni esempi) ho poi misurato mediante un planimetro le aree. Di ciascuna superficie ho preso tre misure ricavandone la media. Questi dati, che non hanno nessun significato come valori assoluti, hanno importanza come valori relativi, perchè sono proporzionali ai volumi dei tratti equivalenti di fibra.



Con questa metodica ho affrontato il problema delle modificazioni di volume della fibra.

Un primo punto da vedere era quello delle modificazioni di volume della fibra nel suo complesso. A tal fine ho preso dei tratti di fibra comprendenti una completa onda di contrazione e li ho confrontati con tratti di fibra di ugual numero di incommi, in completa distensione. Il risultato è stato tale da dover ammettere che la fibra nel suo complesso non subisce modificazioni di volume oppure che se le subisce esse non sono sicuramente rilevabili.

Un secondo punto importante consisteva nel vedere se i tratti comprendenti porzioni di onda in diverso grado di contrazione subivano modificazioni di volume.

A tal fine ho misurato le aree corrispondenti a tratti di 40 incommi appartenenti a diversi fotogrammi della stessa fibra percorsi dalla stessa onda e contratti in diverso grado. Altre misurazioni sono state fatte sui successivi gruppi di 20 incommi proiettati da uno stesso fotogramma comprendente un'onda di contrazione.

Da tali determinazioni è risultato che le porzioni di fibra appartenenti alle diverse parti dell'onda di contrazione subiscono sicure modificazioni di volume, di andamento sempre uguale. Dapprima il tratto di fibra si allarga, poi si inizia l'accorciamento. Per conseguenza in un primo tempo si ha aumento di volume, poi diminuzione al disotto del volume della fibra in riposo, per ritornare infine al volume primitivo col riallungamento della fibra. La decontrazione avviene molto più lentamente che la contrazione. Il diagramma allegato (fig. 3), costruito mediante una serie di misure, dimostra chiaramente queste modificazioni di volume.

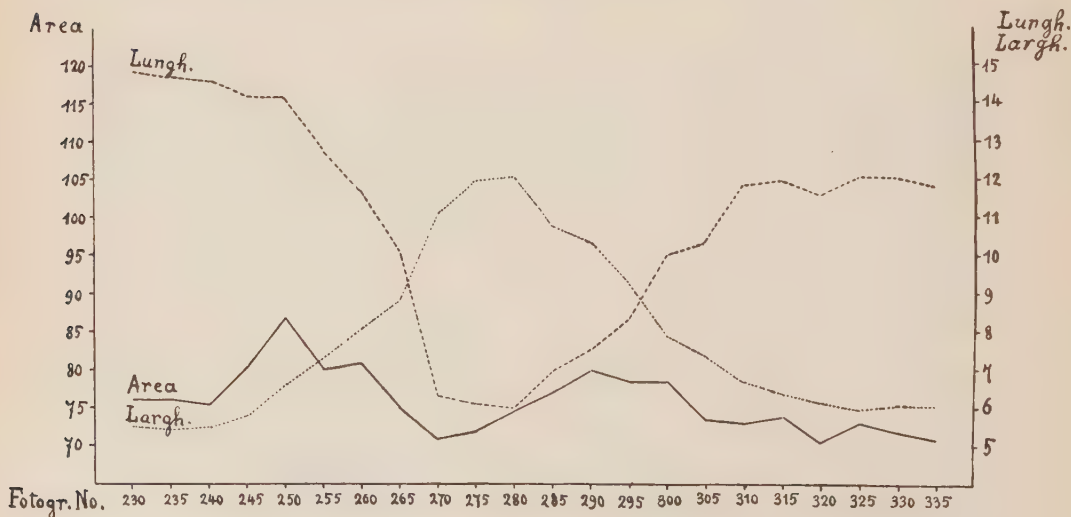


Fig. 3.

Da ciò risulta che l'allargamento non è conseguenza dell'accorciamento, ma che questi due movimenti avvengono indipendentemente.

A spiegare questi cambiamenti di volume di singoli tratti della fibra si deve ammettere che cambiano di volume i singoli incommi. Poichè i cambiamenti di volume stessi sono molto più rilevanti di quelli che si potrebbero attribuire a compressibilità delle sostanze costitutive della fibra o a fenomeni fisico-chimici (disimbibizione di colloidi, cambiamento di grandezza e di numero delle molecole) e poichè la rapidità degli stessi non può giustificare passaggi di liquidi tra la fibra e l'esterno, l'unica possibile interpretazione è quella che attribuisce le modificazioni di volume a spostamenti di liquido tra parti vicine della fibra, tra diversi incommi. In un primo tempo questi aumentano di volume per affluenza di liquido dalle parti di fibra già in completa contrazione, poi essi stessi si contraggono spingendo del liquido nelle parti vicine.

Questi spostamenti di liquido non devono però essere interpretati come estesi scorrimenti longitudinali, ma soltanto come brevi spostamenti tra parti vicine.

Per ragioni che qui non posso esporre, ma che saranno trattate nel lavoro in esteso, ammetto pure che ci siano spostamenti di liquido tra le fibrille e gli spazi interfibrillari; le fibrille nella contrazione spremono per così dire del liquido di imbibizione negli spazi interfibrillari.

Riassumendo quanto ho detto nella presente Nota, risulta che non ci sono motivi per ammettere variazioni di volume nella fibra contratta nel suo complesso; invece appare sicuramente dimostrato che i singoli tratti di fibra all'inizio della contrazione si allargano e aumentano di volume, successivamente si accorciano (riducendosi circa al 40% della lunghezza primitiva) e diminuiscono di volume per ritornare infine alla lunghezza e al volume primitivi. La decontrazione avviene molto più lentamente che la contrazione. Durante il passaggio dell'onda di contrazione gli spazi interfibrillari si allargano sia per gli spostamenti longitudinali di liquido, sia per disimbibizione delle fibrille.

Questi fatti, che mi pare siano interessanti al fine della conoscenza del fenomeno della contrazione muscolare, saranno più dettagliatamente esposti e documentati in una Memoria di prossima pubblicazione.



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente presenta due plichi suggellati inviati rispettivamente dai sigg. Gaspare (Rino) Curatulo e Luigi Passerini perchè vengano conservati negli archivi dell'Accademia.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio SACCO presenta un suo studio dal titolo: « Origine abissale di gran parte dei terreni arcaici » e ne parla.

Il Corrisp. BORDONI presenta un suo volume con le seguenti parole: Ho l'onore di presentare all'Accademia il I volume del « Trattato di Fisica Tecnica », che si ispira, nelle sue linee generali, al corso che si tiene nella R. Scuola d'Ingegneria di Roma.

Mi sia consentito di aggiungere, a giustificazione delle differenze che si rileveranno confrontando questa pubblicazione con le analoghe sullo stesso argomento, che due sono i criterî principali che hanno guidato la sua elaborazione. Il primo, è stato quello di includervi la trattazione di tutte quelle applicazioni, senza eccezione, della Fisica, che già non abbiano assunto tale sviluppo da essere oggetto di speciali insegnamenti nelle Scuole d'Ingegneria; e questo ha costretto ad ampliare notevolmente il quadro classico di ciò che veniva inteso come « Fisica Tecnica ».

Il secondo criterio ha dato luogo a differenze che sono forse meno visibili a prima vista. La forma praticamente obbligata nella quale si presentano nella Fisica Tecnica i problemi da studiare, le difficoltà che presenta sovente la loro trattazione rigorosa e la necessità imperiosa di giungere, malgrado questo, a qualche conclusione concreta, giustifica certi tipi di trattazione, più o meno approssimati ed empirici, che debbono talvolta venire adoperati: procedimento, del resto, che non è sconosciuto nemmeno nelle speculazioni scientifiche più astratte. Ma si deve riconoscere che la relativa facilità di giungere così a qualche risultato, ha spinto ad adoperare questi tipi di trattazione anche in alcuni casi in cui non erano strettamente necessari. In questa pubblicazione, si è fatto e si farà ogni sforzo per ridurre ragionevolmente al minimo l'abbandono delle vie maestre; nella persuasione non soltanto di giovare alla solidità delle conclusioni ed alla estensione del loro campo di validità, ma di contribuire altresì alla formazione, nei futuri ingegneri, di una mentalità, empirica il meno possibile, che sia intonata alle migliori tradizioni delle scienze applicate, che tanti maestri ebbero nel nostro Paese.

Il Corrisp. ABETTI presenta il fasc. 49 delle Osservazioni e Memorie del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia il " Fascicolo 49 delle Osservazioni e Memorie del R. Osservatorio di Arcetri ". Contiene fra l'altro i risultati di una ricerca sul periodo di rotazione della cromosfera solare, che ho potuto compiere per liberalità della Fondazione Rockefeller all'Osservatorio di Monte Wilson in California due anni or sono. In condizioni di ottima trasparenza e tranquillità dell'atmosfera, e con uno spettrografo a forte dispersione, si possono fotografare, nella regione verde dello spettro, le righe della cromosfera in emissione puntando la fessura tangente al bordo del Sole. Queste righe sono importanti, perchè paragonate con quelle di assorbimento al centro, danno un valore della rotazione solare, a quel determinato livello spettroscopico, in cui vengono emesse. Ne risulta all'equatore del Sole, la velocità di 2.06 Km./sec., in accordo con quella che spetta all'alta cromosfera di idrogeno e calcio. Gli elementi, che danno origine a queste righe, sono tutti ionizzati e si trovano distribuiti in strati della cromosfera e fotosfera relativamente profondi, ciò che può spiegare il loro comportamento per quanto riguarda l'inversione e gli spostamenti al lembo, diversi da quelli dati delle righe dovute ad atomi neutri.

« In collaborazione col dott. Righini ho anche determinato da queste lastre i profili della riga  $H\beta$  e di quelle del tripletto verde del magnesio, osservate in emissione nello spettro della cromosfera solare ».

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

I Soci MATTIROLO e GOLA presentano, per l'inserzione nelle « Memorie », i due studi « Idnoracee africane » di R. Vaccaneo e « Disegno per una analisi biogeografica delle Alghe di Giarabub » di A. Forti, e vengono nominati relatori dei due lavori.

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci G. LEVI, LEVI-CIVITA, MARCOLONGO, SCORZA, SILVA.



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 3 giugno 1932*

- ABETTI GIORGIO. — Righe di emissione nello spettro del bordo solare ecc. Osservazioni e memorie del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri. (Pubblicazioni della R. Università degli studi di Firenze. N. 49). Pavia, 1931. 8°, pp. 1-68.
- ALLIEVI L. — Il colpo d'ariete e la regolazione delle turbine con prefazione del Prof. G. Belluzzo. (Estr. da l'«Elettrotecnica». Vol. XIX. N. 6). Milano, 1932. 8°, pp. 1-46.
- BANCHETTI AUGUSTO. — Considerazioni e ricerche sull'origine dei giacimenti cinabri-feri in special modo del Monte Amiata. (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali». Memorie. Vol. XLII). Pisa, 1931. 8°, pp. 1-16.
- BONATTI S. e BANCHETTI A. — Ricerche cristallografiche sul Cromato e sul Molibdato di magnesio pentaidrati. (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali». Memorie. Vol. XLII). Pisa, 1931. 8°, pp. 1-11.
- BONATTI STEFANO. — Sopra un minerale di Serrazzano (Pisa) (Parasepiolite?) (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali». Memorie. Vol. XLII). Pisa, 1932. 8°, pp. 1-15.
- BONATTI STEFANO. — Sopra un nuovo saggio microchimico distintivo del potassio e del sodio. (Estr. dai «Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali». Vol. XLI). Pisa, 1932. 8°, pp. 1-6.
- BORDONI UGO. — Fondamenti di fisica tecnica. Vol. I, Roma, Casa Editr. Alberto Stock, 1931. 8°, pp. 1-702.
- BARELLI LUIGI. — Nuove ricerche sulla temperatura propria dei tessuti neoplastici. (Estr. da «Lo sperimentale». Archivio di Biologia normale e patologica. Anno. LXXXV. N. II; pp. 75-98). Siena, 1931. 8°.
- BORGHI BRUNO. — L'azione dei leucociti omologhi ed eterologhi iniettati agli animali. (Estr. dal «Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese». Fasc. I. 1931). Milano, 1931. 8°, pp. 1-23.
- BORGHI B. — Bestehen bei Trypanosoma Lewisi Unterschiede zwischen den Formen aus dem Blute und solchen aus dem Überträger? (Sonderabdruck aus der «Zeitschrift für Hygiene u. Infektionskrankheiten». Band. 113, Heft 2/3, pp. 490-492). Berlin, 1932. 8°.
- BORGHI BRUNO. — Ricerche sopra alcune proprietà biologiche del Trypanosoma Lewisi. (Estr. dal «Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese». Fasc. XII. 1931). Milano, 1931. 8°, pp. 1-8.
- BORGHI BRUNO. — Il decorso dell'infezione da Trypanosoma Lewisi nel ratto giovane e nel ratto adulto. (Estr. dal «Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese». Fasc. I. 1932). Milano, 1932. 8°, pp. 1-7.
- CASSINIS GINO. — Untersuchungen über das luftphotogrammetrische Verfahren Nistri und über seine Anwendung bei Katasteraufnahmen. (Sonderdruck aus «Bildmessung und Luftbildwesen» N. 1, Jahrgang 1932). Liebenwerda, 1932. 8°, pp. 1-4.
- CESÀRO G. — Sur les ellipses circonscrites à un triangle et ayant un point donné pour centre. Quatrième point d'intersection de deux de ces courbes. (Extr. des «Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique». Classe des Sciences, t. XI). Bruxelles, 1932. 8°, pp. 1-99.

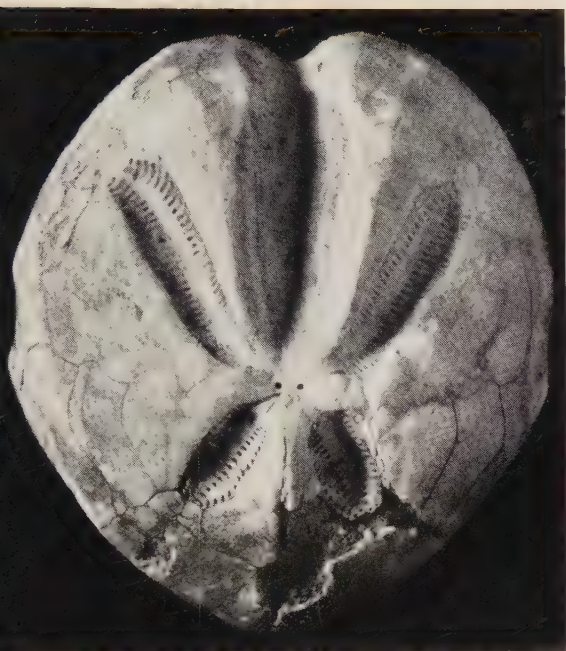
- CESÀRO G. — Stibine de Anzat-le-Luguet présentant (146) combinée à une forme voisine de (123). (Extr. du « Bulletin de la Société Française de Minéralogie ». T. 54, pp. 103-106). Paris, 1931. 8°.
- CESÀRO G. — Orientation et grandeur des axes de l'ellipse  $\Omega$ . Son quatrième point commun avec la circonférence circonscrite. Groupe de triangles ayant leur ellipse  $\Omega$  commune. (Extr. des « Bulletins de l'Académie Royale de Belgique ». Classe des Sciences, série 5, t. XVII, pp. 11261-1130). Bruxelles, 1931. 8°.
- CESÀRO G. — Surface qui remplace l'ellipsoïde inverse lorsqu'à la formule de Fresnel on substitue la formule approximative des biréfringences. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences, série 5, t. XVII, pp. 8-25). Bruxelles, 1932. 8°.
- COLLINS HENRY B. — Excavations at a prehistoric Indian village site in Mississippi. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1832. 8°, pp. 1-22.
- Comptes Rendus du Congrès National des Sciences de Bruxelles, 29 Juin-2 Juillet 1930. Bruxelles, s. d. 8°, pp. 1-1295.
- CHIARUGI G. — Trattato di embriologia con particolare riguardo alla storia dello sviluppo dei mammiferi e dell'uomo. Parte II. La formazione dell'embrione. Milano, Soc. Editr. Libreria, 1932. 8°, pp. I-VIII, 1-509.
- CUSHMAN JOSEPH A. and JARVIS P. W. — Upper Cretaceous foraminifera from Trinidad. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 80). Washington, 1932. 8°, pp. 1-60.
- D'ACHIARDI G. — Venturino Sabatini (Estr. dal « Bollettino del R. Ufficio geologico d'Italia ». Vol. LVII). Roma, 1932. 8°, pp. 1-9.
- D'ACHIARDI G. — Cause di alterazione del verde antico di Piasco. (Saluzzo). (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XLI). Pisa, 1932. 8°, pp. 1-7.
- D'ACHIARDI GIOVANNI. — Considerazioni e ricerche sulla larderellite, ammonio-barite (?) e bechilite (?) di Larderello (Pisa). (Estr. dal « Periodico di Mineralogia ». Anno III, n. 1). Roma, 1932. 8°, pp. 1-9.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Una sezione geologica del Colle Capitolino. (Estr. dagli « Atti della Pont. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXV, pp. 327-335). Roma, 1932. 4°.
- FRANK CASIMIRO. — Il processo fine della coscienza. Principi di biopsicologia, biopsicopatologia e biopsicoterapia (con 5 tavole e 7 figure fuori testo). Roma, Tipografia « La Precisa », 1931. 8°, pp. 1-XI, 1-384.
- FANTOLI GAUDENZIO. — La rinuncia alla Dalmazia e il patto di Roma. La prima battaglia contro i sovversivi e il decisivo intervento degli Universitari. (In « Libro e Moschetto ». Anno VI. N. 24-25) Milano, 1932. foll.
- FANTOLI GAUDENZIO. — La duplice funzione dei serbatoi del Talaro e la divisata loro utilizzazione agricola nella bonifica della media Valle del Tirso. Relazione. Milano, 1932. 8°, pp. 1-18.
- FANTOLI GAUDENZIO. — Il 15 aprile 1919. Commemorazione tenuta nel Regio Politecnico di Milano il 15 aprile 1932. Milano, 1932. 8°, pp. 1-15.
- FANTOLI GAUDENZIO. — L'esercizio intermittente degli impianti idraulici e la tutela del demanio fluviale nelle sue utilizzazioni agricole ed industriali. (Estr. « L'energia Elettrica ». Vol. IX, fasc. IV). Milano, 1932. 4°, pp. 1-8.
- FRIEDMANN HERBERT. — The parasitic habit in the ducks, a theoretical consideration. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 80). Washington, 1932. 8°, pp. 1-7.
- FRIEDMANN HERBERT. — The birds of St. Lawrence Island, Bering sea. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 80). Washington, 1932. 8°, pp. 1-31.
- Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar. Band. I, 1931. Lund, 1932. 8°, pp. 1-102.
- LEVI GIUSEPPE. — Institute of Anatomy, Histology, and Embryology, University

- of Turin. (Reprinted from « Methods and Problems of Medical Education ». Serie XVII, the Rockefeller Foundation. 1930). New York, 1930. 8°, pp. 1-8.
- LEVI G. — Origine e destino del deutoplasma delle uova di anfibii. (Estr. dal « Bollettino della Società Italiana di Biologia sperimentale ». Vol. VI, fasc. 7). Torino, 1931. 8°, pp. 1-3.
- LEVI GIUSEPPE. — Esiste un substrato istologico della senescenza? (Estr. dagli « Atti della Società Italiana di Anatomia ». III convegno in Palermo. 1931, e pubblicati nel « Monitore Zoologico Italiano » suppl. al vol. XLII, pp. 116-128). Firenze, 1932. 8°.
- LONGOBARDI CESARE. — Pax Cereris. A study on the organization and working of the International Institute of Agriculture in the light of the experience accumulated during its first 25 years of life. (Estr. de « L'Egypte Contemporaine. Revue de la Société Royale d'économie Politique, de Statistique et de Legislation », t. XXIII). Le Caire, 1932. 8°, pp. 1-34.
- MANFREDI SILIO. — I collaboratori italiani di Ferdinando Lesseps. Sondrio, 1932. 8°, pp. 1-12.
- MATTIROLO ORESTE. — La sala delle piante officinali presso l'Orto Botanico della R. Università di Torino. (Estr. da « L'Industria Chimica = Il Notiziario Chimico - Industriale ». N. 4, 1932). Torino, 1932. 4°, pp. 1-8.
- MUGGIA GIULIO. — Variazione nella forma del tectum posterius del condrocranio in un feto umano. (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano ». Anno XLII. N. 12, pp. 345-348). Firenze, 1932. 8°.
- MUGGIA GIULIO. — Evoluzione dei segmenti mesodermici occipitali negli embrioni umani. (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano ». Anno XLII. N. 9-10, pp. 275-284). Firenze, 1931. 8°.
- OLESIEWICZ TIMOTHÉE. — Tableaux statistiques de la population ukrainienne de L'U. R. S. S. d'après le recensement du 17 décembre 1926. (Travaux de l'Institut Scientifique Ukrainien. T. II). Warszawa, 1930. 4°, pp. 1-128.
- POZZI LUISA e PRETO EDOARDO. — Ricerche sul contenuto minerale delle ossa del ratto in svariate condizioni sperimentali. (Estr. da « Biochimica e Terapia Sperimentale » Annata XVIII, fasc. X). Milano, 1931. 8°, pp. 1-11.
- Relazione sull'attività del Comitato Nazionale Italiano Geodetico e Geofisico durante l'anno 1931. (Estr. dal « Bollettino del Com. Naz. Italiano per la Geodesia e la Geofisica ». Serie II. Anno II. N. 2). s. l. 1932. 8°, pp. 1-3.
- RYBNER JÖRGEN. — Investigations on the Theory of the Galitzin Seismograph. (Reprinted from « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Vol. XXXI, pp. 259-281). Leipzig, 1931. 8°.
- RONDONI PIETRO. — La patogenesi dell'uremia. (Estr. da « La Medicina Italiana » 1931. N. 5). s. d. t., 8°, pp. 1-10.
- RONDONI PIETRO. — L'influenza delle acque cloruro-sodiche sull'equilibrio acido-basi espresso dai caratteri urinari. (Estr. da « Minerva Medica ». Anno XXII. Vol. II. N. 46). Torino, 1931. 8°, pp. 1-31.
- RONDONI PIETRO. — La fisiopatologia delle articolazioni. (Estr. dalla « Rassegna Clinico-Scientifica ». N. 3-4. 1932). Milano, 1932. 8°, pp. 1-24.
- RONDONI P. — La spécificité de la cellule du cancer. (Estr. de « Scientia » 1932, pp. 110-121). Milano, 1932. 8°.
- RONDONI P. — Über den Einfluss der Phosphatide auf proteolytische Fermente. (Sonderabdruck aus « Hoppe-Seyler's Zeitschrift für physiologische Chemie » Band. 207, Heft 1, u. 2, pp. 103-110). Berlin, 1932. 8°.
- RONDONI P. — Über Harnsäurewirkungen und experimentelle Gelenkspathologie. (Sonderdruck « Medizinische Klinik ». Jahrgang. 1932. N. 9). Wien, 1932. 8°, pp. 1-4.
- RONDONI P. — MEZZADROLI G. — Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sull'adenocarcinoma trapiantabile del topo. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VI. Vol. XIV, pp. 169-173). Roma, 1931. 8°.

- SACCO FEDERICO. — Origine abissale di gran parte dei terreni arcuici. (Estr. dalle « Memorie della Società Geologica Italiana ». Vol. I). Roma, 1931. 4°, pp. 1-20.
- SCHILLING C. e BORGHI B. — Osservazioni sperimentali sull'immunità da Tripanosoma Lewisi. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese », Fasc. II. 1932). Milano, 1932. 8°, pp. 1-8.
- SCHILLING CLAUS und BORGHI BRUNO. — Die Bedeutung der Schleimhaut als Eintrittspforte bei Trypanosomeninfektionen I. Mitteilung. (Sonderabdruck aus « Zeitschrift für Hygiene und Infektionskrankheiten ». Band 113. Heft. 2 u. 3, pp. 586-589). Berlin, 1932. 8°.
- SILVESTRI F. — Descrizione di un nuovo genere ecitofilo di Lepismidae (Insecta, Thysanura) (Estr. da « Rev. de Entomologia », vol. II, fasc. 2, pp. 132-138). S. Paulo, 1932. 8°.
- USAI GIUSEPPE. — Matematica e poesia. Discorso inaugurale tenuto il 12-11-1931 al R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Catania. Catania, 1932. 8°, pp. 1-19.
- WICKLIFFE ROSE. — 1862-1931. Addresses delivered at a memorial meeting held on the twenty-fifth of February, 1932, at the Rockefeller Institute for Medical Research. New York, 1931. 8°, pp. 1-31.

N. P.





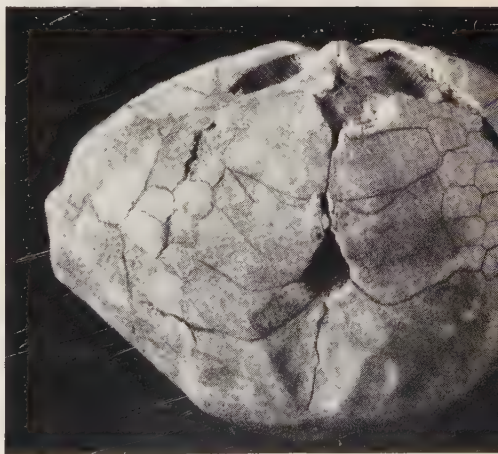
*Schizaster Portisi*, visto dall'alto, a gr. nat.



*Schizaster Portisi*, profilo antero-poster



*Schizaster Portisi*, visto di sotto.



*Schizaster Portisi*, visto di dietro.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Fascicolo del 19 giugno 1932 (Anno X)*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Biologia.** — *Di un metodo fotoelettrico per mettere in evidenza le radiazioni mitogenetiche del Gurwitsch.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp.  
L. PETRI.

Come è noto, i metodi impiegati per mettere in evidenza le radiazioni mitogenetiche del Gurwitsch sono in gran parte dei metodi biologici, cioè sono basati sull'uso, come detettori, di organi o di microrganismi viventi, i quali, sotto l'influenza delle radiazioni suddette, mostrano una più attiva formazione di nuove cellule. L'apprezzamento di un simile effetto, non essendo nella maggior parte dei casi esente da cause di errore, non ha permesso un generale e indiscusso riconoscimento del valore probatorio dei metodi puramente biologici. L'applicazione di metodi fisici che permettano una determinazione quantitativa dell'effetto biologico, attribuibile alle radiazioni del Gurwitsch, rappresenta certamente un notevole perfezionamento dei metodi usati in un primo tempo.

Ad opera del Frank <sup>(2)</sup> infatti è stato applicato recentemente il metodo nefelometrico per rendere evidente e misurabile la più attiva moltiplicazione di cellule che nelle colture di batteri o di saccaromiceti viene stimolata dalle radiazioni mitogenetiche. Anche il cosiddetto *Myzetokritmethode* del Brainess permette assai facilmente di porre in evidenza il maggior numero di cellule che si formano per gemmazione nelle colture di saccaromiceti sottoposte all'induzione mitogenetica in confronto alle colture di controllo.

(1) Presentata nella seduta del 19 giugno 1932.

(2) Molta della letteratura sopra le radiazioni mitogenetiche è citata dal GURWITSCH nella sua recentissima pubblicazione: *Die mitogenetische Strahlung*. Berlin, Y. Springer, 1932.

Ma questi metodi possono dare soltanto una dimostrazione indiretta dell'effetto delle radiazioni mitogenetiche, essi non ci offrono alcuna prova o, solo imperfettamente, delle proprietà fisiche di queste radiazioni. Anche le esperienze di Stempell sull'azione perturbatrice che queste ultime hanno sopra la formazione degli anelli di Liesegang<sup>(1)</sup> se possono costituire un mezzo puramente fisico per dimostrare l'esistenza delle radiazioni stesse, non costituiscono un metodo per stabilirne qualitativamente e quantitativamente le proprietà. Solo il metodo fotografico potrebbe a questo riguardo esser considerato come il più corrispondente allo scopo. Ma il lungo tempo di esposizione della lastra sensibile occorrente in simili esperienze può dare origine a diverse cause di errore per cui la dimostrazione che se ne può ottenere non è sempre sufficientemente convincente, tanto più quando si adopera, come fonte di radiazioni, la poltiglia di bulbi di cipolla, materiale ricco di prodotti volatili, facilmente diffusibili attraverso la superficie di contatto della lamina di quarzo o di vetro *uvio* con le pareti del recipiente contenente la poltiglia.

Del valore probatorio delle esperienze eseguite col metodo fotografico da Reiter e Gabor, da Protti e da Maxia e Brunetti dubita assai lo stesso Gurwitsch<sup>(2)</sup>. D'altra parte metodi fisici di selezione delle radiazioni mitogenetiche, come quello adoperato da Frank e da Reiter e Gabor, usando uno spettrografo con prismi e lenti di quarzo, se permettono di ritenere come probabile l'identità delle radiazioni stesse con quelle ultraviolette di breve lunghezza d'onda, non danno di ciò una dimostrazione sicura, giacchè la presenza della radiazione uscente dallo spettrografo in corrispondenza di una data lunghezza d'onda è rivelata mediante il metodo biologico, cioè mediante la presunta azione mitogenetica sopra radici o colture di saccaromiceti. Cosicchè il risultato di questo metodo di ricerca (spettro biologico) è sempre subordinato all'apprezzamento approssimativo e suggestionabile dell'osservatore.

Nell'*Institut für Grundlagen der Medizin* di Francoforte sul Meno, di-

(1) STEMPELL W. und v. ROMBERG G., *Ueber Organismenstrahlung und Organismengasung*, «*Protoplasma*», Bd. XIII, 1931, p. 28.

(2) Opera cit., pp. 28 e 29. Un'interessante ed istruttiva esposizione teorica delle ragioni, per le quali gravi obiezioni aprioristiche si possono fare contro un risultato positivo applicando il metodo fotografico per rivelare l'esistenza delle radiazioni mitogenetiche, potrà leggersi nel lavoro di B. RAJEWSKY, *Zur Frage des physikalischen Nachweises der Gurwitsch-Strahlung*, «*Zehn Jahre Forschung auf dem physikalisch-medizinischen Grenzgebiet*» herausgegeben von prof. dott. Fr. Dessauer, 1931. Il limite di quantità di luce ordinaria che può produrre un effetto visibile sopra le lastre fotografiche speciali Agfa corrisponde al valore  $9 \cdot 10^{-3}$  Erg/cm<sup>2</sup>, che è circa 1600 volte più grande di quello assegnato da Chariton, Frank e Kanngiesser alle radiazioni mitogenetiche. Occorrerebbero più di 90 giorni di esposizione per ottenere un effetto visibile sulla lastra fotografica. E si noti che il valore dell'energia delle radiazioni mitogenetiche trovato recentemente da Rajewsky è assai minore di quello anzidetto.

retto dal prof. Fr. Dessauer, è stata data nel 1931 la prova, forse più convincente, della reale esistenza delle radiazioni del Gurwitsch, impiegando mezzi puramente fisici, che hanno permesso la determinazione qualitativa e quantitativa delle radiazioni stesse (1).

Il metodo adoperato dal dott. Rajewsky (2) si basa sulla combinazione di due principi già noti nella fisica. Uno è quello del tubo contatore di Geiger e l'altro è il principio su cui sono fondate le celle fotoelettriche. Rajewsky, usufruendo del fatto che il cadmio, sotto l'eccitazione delle radiazioni ultraviolette di lunghezza d'onda di 330 m $\mu$  e di quelle anche più brevi, diventa elettropositivo, ha adoperato un tubo di Geiger in cui l'elettrodo cilindrico, costituito da uno strato di cadmio e provvisto di un'apertura chiusa da una lamella di quarzo, è unito a una batteria di pile. L'altro elettrodo può essere unito a un elettrometro o anche a un sistema amplificatore che fa funzionare un altoparlante, oppure, mediante un trasformatore, a un contatore automatico.

La presenza di radiazioni luminose o di raggi Röntgen, o di raggi emanati da sostanze radioattive, o di radiazioni cosmiche ultrapenetranti nel tubo suddetto di Rajewsky determina un passaggio di corrente fra i due elettrodi, scarica che è rivelata dall'altoparlante, dall'elettrometro e registrata dal contatore automatico. L'apparecchio è così sensibile che l'accensione di un fiammifero alla distanza di 3-5 metri produce un suono continuo da parte dell'altoparlante. Naturalmente un simile dispositivo, a causa della sua stessa estrema sensibilità è stato adoperato in ambiente appositamente riparato contro l'azione delle radiazioni ultrapenetranti.

Le esperienze compiute con radici di cipolla hanno dimostrato una scarica nel tubo contatore al cadmio maggiore del 21 % di quella constatata nella prova di controllo (in assenza di radici). Un risultato quasi simile (21-24 % di aumento) è stato ottenuto sperimentando con la poltiglia del bulbo di cipolla. Il carcinoma del topo, ridotto in poltiglia ha provocato una scarica superiore del 29 % di quella ottenuta nella prova di controllo (in assenza di carcinoma). Le esperienze avevano la durata di 5-10 minuti primi.

L'intensità delle radiazioni mitogenetiche è stata calcolata dal Rajewsky da  $10^{-10}$  a  $10^{-9}$  Erg/cm<sup>2</sup>. sec.

È interessante il fatto che le radici hanno determinato un aumento di scarica nel tubo contatore solo quando erano unite al bulbo; immediatamente dopo il taglio cessa ogni segnalazione attribuibile alle radiazioni del Gurwitsch.

(1) DESSAUER Fr., *Bemerkung über den physikalischen Nachweis der mitogenetischen Strahlung von Gurwitsch*. « Archiv f. exper. Zellforschung besonders Gewebezüchtung », Bd. XI, 1931.

(2) Loc. cit.

Questo risultato è un po' in contraddizione con la constatazione dell'emanazione di radiazioni dalla poltiglia del bulbo, in cui viene a cessare ogni attività vitale in modo assai più completo di quello che può avvenire nelle radici semplicemente separate dal bulbo mediante un taglio. Il fatto è in rapporto al modo di origine delle radiazioni e sarebbe spiegabile ammettendo col Gurwitsch che questa particolare forma di bioluminescenza sia l'effetto di un'azione enzimatica. Ma di ciò io mi riservo di discutere dopo di aver compiuto una serie di ricerche ora iniziate.

Contrariamente all'affermazione di Reiter e Gabor che l'emanazione di radiazioni mitogenetiche dalla poltiglia del bulbo di cipolla avverrebbe solo in presenza della luce visibile, Rajewsky ha ottenuto risultati positivi anche nella più completa oscurità. Una lamina di vetro dello spessore di mm. 0,6 intercetta del tutto le radiazioni in questione.

Questi risultati dimostrano dunque in modo definitivo l'esistenza delle radiazioni scoperte dal Gurwitsch e che queste corrispondono all'ultravioletto di breve lunghezza d'onda.

Può ora sembrare superflua l'indicazione di un altro metodo per porre in evidenza il fenomeno dopo il dispositivo escogitato dal Rajewsky, ma quando si pensi che nella maggior parte dei nostri laboratori di biologia è molto difficile di disporre di un'attrezzatura così completa e così perfezionata come quella adoperata nell'Istituto di Francoforte, è forse giustificata l'indicazione di un metodo molto più semplice, per quanto meno sensibile, che permette tuttavia di dimostrare con un mezzo puramente fisico l'emanazione delle radiazioni del Gurwitsch da parte di organi viventi.

Il dispositivo da me adoperato consiste essenzialmente in una cella fotoelettrica costituita da un microelettroscopio per l'esame di sostanze radioattive, nel quale il corpo di dispersione, contenuto nella camera di ionizzazione, è formato da un disco di una sottile lamina di cadmio, unito all'asta che porta la foglia di alluminio.

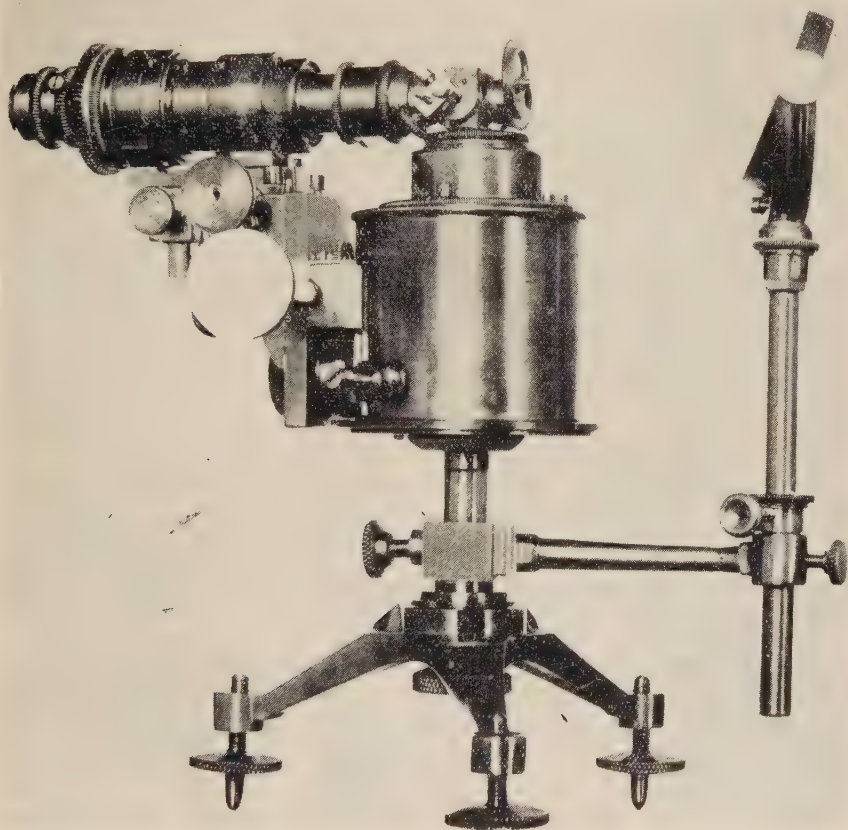
Il cadmio sotto l'azione di radiazioni ultraviolette emette elettroni, ed avendo già ricevuto l'armatura del condensatore di misura, di cui esso fa parte, una carica negativa, l'azione delle radiazioni di breve lunghezza d'onda determina una più rapida dispersione della carica stessa. La velocità di dispersione viene posta in evidenza mediante un microscopio di un potere d'ingrandimento relativamente elevato e munito di un micrometro oculare, oppure mediante la proiezione dell'immagine della foglia di alluminio sopra uno schermo bianco su cui trovasi una scala.

Devo far notare che un simile apparecchio, per essere adoperato come rivelatore delle radiazioni del Gurwitsch, deve possedere una tale sensibilità, come strumento per misure di radioattività, da poter facilmente porre in evidenza la corrente di saturazione che nella camera di ionizzazione producono gr. 15 di solfato potassico <sup>(1)</sup> distribuiti in uno strato di una superficie

(1) Uno strato di  $K_2SO_4$  puro (Kahlbaum) (gr. 0,5) determina una corrente di satu-



di 20 cm<sup>2</sup>. Naturalmente la rapidità di scarica, provocata da sostanze radioattive non può servire come elemento di confronto per la rapidità di scarica determinata dalle radiazioni del Gurwitsch, dovuta a un fenomeno fotoelettrico. Se al dispersore di cadmio si sostituisce un disco di ottone, la sensibilità dell'apparecchio per le radiazioni mitogenetiche scompare.



Il microelettroscopio con dispersore al cadmio (circa 1/2 del vero).

È pure necessario che l'elettroscopio presenti una fuga spontanea minima, ciò che rende assai più facilmente apprezzabile anche il più leggero aumento della velocità ordinaria della scarica spontanea nell'aria secca. Il sistema mobile dell'elettroscopio deve avere però una minima capacità elet-

razione di  $2,74 \cdot 10^{-16}$  Amp. per cm<sup>2</sup>. (Cfr. HENRIOT E. in « Ann. de Chimie et Physique » 1912).

Gr. 0.02 di ossido di uranio (U<sub>3</sub> O<sub>8</sub>) distribuiti sopra una superficie di 1 cm<sup>2</sup>, determinano una corrente di saturazione di  $5,78 \cdot 10^{-13}$  Amp.

La scarica dell'elettroscopio da me adoperato sotto l'influenza della radiazione della suddetta quantità di ossido di uranio è di circa 1000 volte maggiore della scarica spontanea.

trostatica. La foglia è lunga 5 mm. e larga, al punto di attacco con l'asta, mm. 0,1.

Con questo apparecchio è possibile utilizzare, per le misure, un piccolissimo angolo di deviazione della foglia, evitando le cause di errore dovute alla variazione della sensibilità ai volt. Del resto i limiti nei quali la variazione del potenziale è proporzionale alla variazione dell'angolo di deviazione sono notevolmente ampi, per cui, senza ricaricare il sistema mobile, possono essere eseguiti più saggi successivamente l'uno all'altro anche nello spazio di tempo di tre ore.

Per evitare ogni errore dipendente dall'assorbimento parziale della carica da parte dell'isolante (ambra) e dalla più rapida caduta della foglia nella posizione più alta di questa è necessario attendere 3 o 4 ore dalla carica prima d'iniziare ogni misura.

Una causa di perturbazione nel funzionamento dell'apparecchio può essere costituita dalla carica elettrostatica che assume la capsula di quarzo racchiudente il materiale da sperimentare. Le operazioni indispensabili al riempimento e alla chiusura della capsula determinano generalmente una carica elettrica del quarzo, che, data la sensibilità dell'apparecchio, può disturbare fortemente e per lungo tempo, anche per un'ora, il movimento di discesa della foglia.

Come materiale emittente ho adoperato delle cariossidi di grano germinanti. Tutte le esperienze sono state compiute facendo prima un saggio con cariossidi germinanti uccise col calore e chiuse in una scatola Petri di quarzo. Allo scopo di evitare qualsiasi emissione di vapor d'acqua la scatola veniva chiusa ermeticamente con paraffina.

Per eliminare anche ogni causa di errore derivante da variazioni del grado di umidità, nella camera di ionizzazione dell'elettroscopio era contenuto del cloruro di calcio secco. Oltre alle cariossidi germinanti vive è stata anche sperimentata la poltiglia di queste ultime. Riporto qui alcuni risultati ottenuti:

10-4-32	-	Cariossidi di grano germin.	uccise col calore (100° C.)	-	velocità di scar. div.	1.00 in 1 ora			
»	»	»	viventi	. . . . .	-	»	»	»	1.90 » »
20-4-32	-	»	uccise col calore (100° C.)	-	»	»	»	»	1.00 » »
»	»	»	viventi	. . . . .	-	»	»	»	2.00 » »
6-5-32	-	»	uccise col calore (100° C.)	-	»	»	»	»	1.00 » »
»	»	»	viventi	. . . . .	-	»	»	»	1.80 » »
15-5-32	-	»	uccise col calore (100° C.)	-	»	»	»	»	0.90 » »
»	»	»	viventi	. . . . .	-	»	»	»	1.80 » »
9-6-32	-	»	uccise col calore (100° C.)	-	»	»	»	»	1.00 » »
»	»	»	viventi	. . . . .	-	»	»	»	2.00 » »
11-6-32	-	»	ridotte in poltiglia (100° C.)	-	»	»	»	»	1.10 » »
»	»	»	»	»	»	. . . . .	-	»	1.60 » »

La prova di controllo, in alcune esperienze, è stata eseguita prima e dopo la prova col materiale vivente, senza ricaricare l'elettroscopio. L'inter-

posizione di una lastra di vetro fra la capsula di quarzo e il dispersore di cadmio dell'elettroscopio fa cessare ogni differenza fra la prova fatta con cariossidi vive e morte.

Questi risultati sono nettamente dimostrativi e non potrebbero essere altrimenti spiegati che ammettendo l'emissione, da parte delle cariossidi germinanti, di una forma di energia radiante, capace di attraversare il quarzo, di cui è costituita la scatola dove i semi sono racchiusi, e di provocare una più rapida scarica della foglia dell'elettroscopio. Resta anche confermato quanto già era stato trovato da Rajewsky, che le radiazioni scoperte dal Gurwitsch sono emanate anche nella più completa oscurità, giacchè nella camera di ionizzazione dell'elettroscopio era impedita la penetrazione di ogni raggio luminoso visibile. È pure risultato che la poltiglia di cariossidi germinanti è assai meno attiva delle cariossidi integre e che si trovano nelle condizioni di esplicare la loro attività vitale. Esperienze supplementari hanno anche permesso di stabilire che, mentre l'emissione di radiazioni del Gurwitsch da parte di cariossidi germinanti viventi continua per diverse ore, nel caso della poltiglia delle cariossidi germinanti tale emissione si esaurisce dopo circa 30 minuti dalla preparazione della poltiglia stessa.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica** (Analisi). — *Nuove formole di maggiorazione per le soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine.* Nota di P. CLEMENTE, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

L'importanza nelle applicazioni alla fisica e alla elettrotecnica che ha lo studio delle soluzioni periodiche della equazione differenziale, lineare, autoaggiunta, del secondo ordine

$$\frac{d}{dx} \left( \theta \frac{dy}{dx} \right) + \lambda A(x) y = f(x),$$

nella ipotesi che  $\theta(x)$ ,  $A(x)$  e  $f(x)$  siano periodiche, mi ha indotto a ritornare sull'argomento già da me trattato nella mia Tesi di Laurea <sup>(2)</sup>. Con questa Nota presento un complesso di nuove formole di maggiorazione, che si prestano ad un calcolo assai più semplice, pur mantenendo le ipotesi già fatte nella mia Tesi.

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) P. CLEMENTE, *Ricerche intorno alle soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine*, (vol. LXIX (1931) della 3<sup>a</sup> serie del « Giornale di Matematiche Battaglini »).

Riprendiamo l'equazione

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left( \theta \frac{dy}{dx} \right) + A(x)y = f(x)$$

con le condizioni ai limiti

$$(2) \quad \begin{cases} y(a) - y(b) = 0 \\ y'(a) - y'(b) = 0 \end{cases}$$

Supposto che l'unità non sia un autovalore del sistema formato da (1) e (2), vogliamo assegnare numeri maggioranti per la soluzione  $y(x)$  di detto sistema, nella ipotesi che  $\theta(x)$ ,  $A(x)$ ,  $f(x)$  siano funzioni continue e periodiche di periodo  $(b-a)$ , ed inoltre risulti  $\theta(x) > 0$ ,  $A(x) \neq 0$  in  $(a, b)$ .

1. Supponiamo dapprima  $A(x) < 0$  e sia

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

La funzione

$$\int_a^x Ay d\xi = - \left[ \theta \frac{dy}{d\xi} \right]_a^x + \int_a^x f(\xi) d\xi$$

assume lo stesso valore in  $a$  e in  $b$ , e quindi esiste certamente un punto  $c$  di  $(a, b)$  in cui è nulla la sua derivata, in cui cioè risulta

$$A(c)y(c) = 0$$

ossia, per l'ipotesi  $A(x) \neq 0$ ,

$$y(c) = 0.$$

Per questo fatto è chiaro che un numero maggiorante l'oscillazione di  $y$  è anche maggiorante per la  $y$  stessa.

Ricordiamo poi che <sup>(1)</sup>, se  $g(x)$  è una qualsiasi funzione, si ha

$$(3) \quad (\text{oscill } g)^2 \leq \vartheta \int_a^b \theta \left( \frac{dg}{dx} \right)^2 dx,$$

dove

$$\vartheta = \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)}.$$

(1) M. PICONE, *Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari autoaggiunte*. («Mathematische Zeitschrift», Band 28, p. 532).

Nel caso nostro

$$(4) \quad (\max |y|)^2 \leq \vartheta \int_a^b \theta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Moltiplicando la (1) per  $y$  e integrando per parti si ha

$$\left[ \frac{dy}{dx} \theta y \right]_a^b - \int_a^b \theta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \int_a^b A(x) y^2 dx = \int_a^b f(x) y dx$$

da cui

$$(5) \quad \int_a^b \theta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \leq \left| \int_a^b f(x) y dx \right| \leq \max |y| \sqrt{(b-a) \int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Applicando la (3) in definitiva

$$(6) \quad \max |y| \leq \vartheta \sqrt{(b-a)} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Supponiamo ora che  $f(x)$  non sia di media nulla.

Prendiamo come nuova funzione incognita

$$u(x) = y(x) - \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b A dx}.$$

La  $u$  verifica il sistema differenziale

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \theta \frac{du}{dx} \right) + Au = f(x) - A(x) \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b A dx} \\ u(a) - u(b) = 0 \\ u'(a) - u'(b) = 0. \end{cases}$$

Poichè

$$\int_a^b \left( f(x) - A(x) \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b A dx} \right) = 0,$$

applicando la (6), si ha per la  $u$  la seguente formola di maggiorazione



$$\begin{aligned} \max |u| &\leq \vartheta \sqrt{(b-a)} \left[ \int_a^b \left( f(x) - A(x) \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b A(x) dx} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \vartheta \sqrt{b-a} \left[ \int_a^b f(x)^2 dx + \frac{\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b A(x)^2 dx \cdot (b-a)}{\left( \int_a^b A(x) dx \right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\int_a^b f(x)^2 dx \sqrt{\int_a^b A(x)^2 dx} \sqrt{b-a}}{\int_a^b A(x) dx} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \vartheta \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \left( 1 - \frac{\sqrt{\int_a^b A(x)^2 dx} \sqrt{b-a}}{\int_a^b A(x) dx} \right). \end{aligned}$$

Tenendo presente che

$$\max |y| \leq \max |u| + \frac{\sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}}{\int_a^b |A| dx},$$

possiamo dire:

I. Nella ipotesi  $A(x) < 0$ , per la soluzione  $y(x)$  della (1) vale la formola di maggiorazione:

$$(7) \quad \max |y| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \sqrt{(b-a)} \left[ \vartheta \left( 1 + \frac{\sqrt{\int_a^b f(x) dx \cdot (b-a)}}{\int_a^b |A| dx} \right) + \frac{1}{\int_a^b |A| dx} \right].$$

2. Supponiamo in secondo luogo  $A(x) < 0$ .

Diciamo  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_1 \dots$  gli autovalori del sistema omogeneo associato e supponiamo  $\mu_{r-1} < 1 < \mu_r$ .

Se  $f(x)$  è di media nulla si dimostra come sopra che esiste un punto  $c$  di  $(a, b)$  per il quale è  $y(c) = 0$ .

Ne discende

$$(\max |y|)^2 \leq \vartheta \int_a^b \theta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Poniamo

$$(8) \quad \eta = y - \sum_{k=0}^{r-1} c_k u_k,$$

dove

$$c_k = \int_a^b A y u_k = \frac{1}{1 - \mu_k} \int_a^b f u_k dx.$$

Si ha

$$\eta(a) = \eta(b) ; \quad \eta'(a) = \eta'(b) ; \quad \int_a^b A \eta u_k dx = 0 \quad (k = 0, \dots, r-1),$$

sicchè per il teorema hilbertiano di minimo <sup>(1)</sup> risulta

$$\int_a^b \theta \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx > \mu_r \int_a^b A \eta^2 dx.$$

Sostituendo la (8) nella (1) si ha

$$\frac{d}{dx} \left( \theta \frac{d\eta}{dx} \right) + A \eta = f(x) - \sum_{k=0}^{r-1} A c_k (1 - \mu_k) u_k$$

da cui

$$(9) \quad \int_a^b \theta \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx \leq - \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} \int_a^b f \eta dx.$$

Ricordando che

$$\int_a^b A u_k dx = 0 \quad \text{e} \quad c_0 = \int_a^b A y dx \cdot \frac{1}{\sqrt{\int_a^b A dx}} = \int_a^b f dx \frac{1}{\int_a^b A dx} = 0$$

si riconosce che il termine noto della equazione differenziale, a cui soddisfa  $\eta$ , ha integrale nullo tra  $a$  e  $b$ ; per l'osservazione fatta in principio, esiste allora un punto  $c$  di  $(a, b)$  in cui è  $\eta(c) = 0$ .

La (9) può allora scriversi

$$(10) \quad \int_a^b \theta \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx \leq - \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} \int_a^b f [\eta(x) - \eta(c)] dx \leq \\ \leq \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} \sqrt{(b-a)} \cdot \text{oscill } \eta \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Applicando la (3) si ha allora

$$\text{oscill } \eta \leq \sqrt[3]{\frac{\mu_r}{\mu_r - 1}} \cdot \sqrt{(b-a)} \cdot \text{oscill } \eta \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

(1) P. CLEMENTE, loc. cit., Cap. II, § 3.

ossia

$$\text{oscill } \eta \leq \vartheta \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} \sqrt{(b-a)} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}.$$

D'altra parte  $\text{oscill } u_k < \sqrt{\vartheta \mu_k}$ , e inoltre, dato che le  $u_k$  hanno almeno uno zero in  $(a, b)$ ,  $\max |u_k| < \sqrt{\vartheta \mu_k}$ .

In definitiva

$$\begin{aligned} (11) \quad \text{oscill } y &\leq \max |y| \leq \text{oscill } \eta + \sum_{k=1}^{r-1} |c_k| \text{oscill } u_k \leq \\ &\leq \text{oscill } \eta + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{1 - \mu_k} \sqrt{(b-a)} \vartheta \mu_k \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \leq \\ &\leq \vartheta \sqrt{(b-a)} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \left( \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\mu_r}{1 - \mu_k} \right). \end{aligned}$$

La  $f(x)$  non è di media nulla, posto

$$u = y - \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b A dx}$$

si ha

$$\begin{aligned} \max |u| &\leq \vartheta \sqrt{(b-a)} \left( \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\mu_r}{1 - \mu_k} \right) \cdot \left[ \int_a^b \left( f(x) + A(x) \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b A(x) dx} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \vartheta \sqrt{(b-a)} \left( \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\mu_k}{1 - \mu_k} \right) \left( 1 + \frac{\sqrt{\int_a^b A^2 dx} \sqrt{(b-a)}}{\int_a^b A dx} \right) \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}. \end{aligned}$$

Da qui tenendo presente che

$$\max |y| \leq \max |u| + \frac{\sqrt{(b-a)} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}}{\int_a^b A dx},$$

si ha in definitiva il teorema:

II. Siano  $\mu_0 = 0, \mu_1, \mu_2, \dots$  gli autovalori del sistema. Se per un certo valore di  $r$  risulta

$$\mu_{r-1} < 1 < \mu_r,$$

noti gli autovalori  $\mu_1, \dots, \mu_r$ , per la soluzione periodica  $y$  della (1) vale la formola di maggiorazione:

$$(12) \quad \max |y| \leq \sqrt{\int_a^b f(x) dx} \sqrt{(b-a)} \left\{ \frac{1}{\int_a^b A dx} + \vartheta \left( \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\mu_k}{1 - \mu_k} \right) \left( 1 + \frac{\sqrt{\int_a^b A^2 dx} \sqrt{(b-a)}}{\int_a^b A dx} \right) \right\}.$$

Si ha immediatamente

III. Se  $\mu'_k, \mu''_k$ , indicano due valori approssimati dello autovalore  $\mu_k$  il primo per difetto e il secondo per eccesso e se riesce

$$\mu''_k < 1 < \mu'_k \quad (k = 1, 2, \dots, r-1)$$

sussiste la formola di maggiorazione

$$(13) \quad \max |y| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \sqrt{(b-a)} \left\{ \frac{1}{\int_a^b A dx} + \vartheta \left( \frac{\mu'_r}{\mu'_r - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(r-1) \mu''_{r-1}}{1 - \mu''_{r-1}} \right) \left( 1 + \frac{\sqrt{\int_a^b A^2 dx} \sqrt{(b-a)}}{\int_a^b A dx} \right) \right\}.$$

3. Le formole di maggiorazione trovate nei numeri precedenti valgono nella ipotesi che sia  $A(x) < 0$ , oppure  $A(x) > 0$ . È però facile vedere che esse valgono anche nella ipotesi che sia  $A(x) \leq 0$ , oppure  $A(x) \geq 0$ .

Supponiamo per esempio  $A(x) \leq 0$ .

Diciamo  $y(x, \varepsilon)$  la soluzione periodica della equazione

$$\frac{d}{dx} \left( \theta \frac{dy}{dx} \right) + (A(x) + \varepsilon) y(x) = 0 \quad (\varepsilon < 0)$$

si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = y(x).$$

Per la  $y(x, \varepsilon)$  vale la formola di maggiorazione

$$\max |y(x, \varepsilon)| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \sqrt{(b-a)} \left[ \vartheta \left( 1 + \frac{\sqrt{\int_a^b (A + \varepsilon)^2 dx} \sqrt{(b-a)}}{\int_a^b |A + \varepsilon| dx} \right) + \frac{1}{\int_a^b |A + \varepsilon| dx} \right]$$

donde, passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si trova che per la  $y(x)$  vale ancora la formola di maggiorazione (7).

**Matematica.** — *Sur l'équation de Laplace.* Nota di M. GHERMANESCO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. M. P. Humbert<sup>(2)</sup> a émis l'idée d'attacher à tout espace d'un nombre quelconque de dimensions, une équation aux dérivées partielles du même ordre, jouant le rôle de l'équation de Laplace pour le plan. Il a même proposé une telle équation pour l'espace à trois dimensions, dont s'est occupé aussi M. J. Devisme<sup>(3)</sup>.

J'ai moi-même<sup>(4)</sup> proposé une équation du quatrième ordre pour l'espace à quatre dimensions, dont j'ai étudié quelques propriétés.

Mais ni l'équation de M. P. Humbert, ni la mienne ne sont des extensions de l'équation de Laplace, proprement dites, parceque le mode de définition présente des analogies avec celui de l'équation de Laplace, mais ils ne sont pas les mêmes.

Je vais donner une définition qui renferme en particulier l'équation de Laplace et qui en sera par la suite l'extension la plus naturelle.

2. Ma définition a pour point de départ l'observation simple que, en désignant par  $\alpha, \beta$  les racines de l'équation  $x^2 + 1 = 0$ , on a l'égalité symbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \beta \frac{\partial}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) u.$$

Soient alors  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les racines de l'équation  $\alpha^n + 1 = 0$  et désignons par  $D_{n,k}$  l'opérateur

$$(A) \quad D_{n,k} = \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_k^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \alpha_k^n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

l'équation

$$(I) \quad \Delta_n u = D_{n,1} D_{n,2} \dots D_{n,n}(u) = 0$$

est l'extension cherchée de l'équation de Laplace pour un espace à  $n$  di-

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) P. HUMBERT, « Journal de Math. », 1930.

(3) J. DEVISME, « C. R. », Paris, 1931, t. 193.

(4) M. GHERMANESCO, « Bull. de la Soc. Math. de France », 1931.



mensions. Pour  $n = 2$  on retombe sur l'équation de Laplace, pour  $n = 3$  on a l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$$

qui diffère de l'équation de M. P. Humbert, ce à quoi on s'attendait, son mode de définition étant un peu différent du notre et en employant les racines de l'équation  $\alpha^3 = 1$ .

Pour  $n = 4$  on a l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial t^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \\ + 4 \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

3. Nous allons établir quelques propriétés générales de l'équation (1).

Posons

$$(B) \quad u_k = \alpha_k x_1 + \alpha_k^2 x_2 + \dots + \alpha_k^n x_n$$

l'équation (1) devient

$$(2) \quad \frac{\partial_n U}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n} = 0.$$

Il est à remarquer qu'on ne peut pas toujours remplacer l'équation (1) par (2), vu que ces équations appartiennent généralement à des types bien différents et les problèmes qu'on peut se poser pour l'un diffèrent essentiellement de ceux correspondant à l'autre, comme tel est le cas dans le plan.

Posons

$$(C) \quad ds^n = du_1 du_2 \dots du_n$$

et cherchons les fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_n (x_1, x_2, \dots, x_n)$  telles que

$$(3) \quad dS^n = \lambda (x_1, x_2, \dots, x_n) ds^n.$$

qui correspond à une sorte de généralisation de la représentation conforme.

En posant

$$(D) \quad U_k = \alpha_k X_1 + \alpha_k^2 X_2 + \dots + \alpha_k^n X_n$$

la relation (3) devient

$$(4) \quad dU_1 dU_2 \dots dU_n = \lambda ds^n$$



partielles. D'après le théorème précédent la fonction

$$v = U \left( \frac{p_{x_1}}{p}, \frac{p_{x_2}}{p}, \dots, \frac{p_{x_n}}{p} \right)$$

est aussi une intégrale de (1) si  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en est; ce cas particulier constitue une généralisation directe d'un théorème établi par M. D. V. JONESCO<sup>(1)</sup> pour l'équation particulière de M. P. Humbert.

4. Ce qui précède nous conduit à imaginer un espace spécial  $S_n$ , non euclidien, dont  $p$ ,  $ds$  et l'équation (1) seraient les éléments, c'est à dire  $p$  serait la distance de l'origine au point de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $ds$  l'élément de l'arc et (1) l'équation caractérisant l'espace considéré. Les fonctions  $X_i$  seraient le système de fonctions conjuguées de  $S_n$  et, d'après leurs propriétés, elles sont bien l'extension des fonctions harmoniques conjuguées de l'espace à deux dimensions. L'hypersurface  $p = K$  jouerait le rôle du cercle ou de l'hypersphère et il est probable que le théorème de Gauss relatif à la moyenne des valeurs d'une fonction harmonique, prises sur un cercle, ait son équivalent dans  $S_n$  et pour  $p = k$ .

On pourrait aussi envisager une théorie des fonctions de variable complexe qui serait  $u_k$ , les autres étant les variables complexes conjuguées.

La théorie de la représentation conforme y trouverait son équivalent aussi et on pourrait par là, démontrer l'existence d'une certaine fonction de Green qui permettrait la résolution d'un problème, analogue à celui de Dirichlet pour l'équation de Laplace.

, (1) D. V. JONESCO, « Bull. de la Soc. Math. de France », 1930.

**Matematica.** — *La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique.* — I. *Remarques sur la théorie générale de la transformation de Ribaucour.* Nota di HANS HAMBURGER, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

1. Soit  $\Sigma$  une surface et soit  $\mathbf{x}$  le vecteur qui s'étend de l'origine du système des coordonnées à un point de la surface. Si l'on se donne les trois composantes de  $\mathbf{x}$  comme fonctions de  $u$  et de  $v$ , c'est à dire

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v),$$

le vecteur  $\mathbf{x}$  définit la surface  $\Sigma$ . Supposons en outre que les courbes paramétriques  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  soient choisies de manière qu'elles coïncident avec les lignes de courbure de  $\Sigma$ .

Dans ce qui suit, nous désignerons toujours comme vecteur normal de la surface le vecteur qui est normal au plan tangent de  $\Sigma$  et qui a la longueur 1. Soit donc  $\mathbf{n}(u, v)$  le vecteur normal de  $\Sigma$  et soit  $\mathbf{y}(u, v)$  un autre vecteur décrivant une seconde surface  $\Sigma'$  dont les lignes de courbure sont de même les lignes paramétriques  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  et dont le vecteur normal est également  $\mathbf{n}(u, v)$ . Evidemment le vecteur  $\mathbf{n}(u, v)$  représente l'image sphérique des lignes de courbure aussi bien de la surface  $\Sigma$  que de la surface  $\Sigma'$ .

Nous dirons que la surface  $\Sigma$  est parallèle à  $\Sigma'$ , puisque les trois vecteurs tangents

$$\mathbf{x}_u, \mathbf{y}_u, \mathbf{n}_u^{(2)}$$

sont parallèles entre eux, de même que les trois autres vecteurs tangents

$$\mathbf{x}_v, \mathbf{y}_v, \mathbf{n}_v.$$

Quand on a entre  $\mathbf{x}(u, v)$  et  $\mathbf{y}(u, v)$  l'équation

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{x}(u, v) + \mu \mathbf{n}(u, v),$$

$\mathbf{a}$  étant un vecteur constant, indépendant de  $u$  et de  $v$ , tandis que  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes scalaires quelconques, nous dirons que les deux surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sont parallèles entre elles au sens strict du mot.

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) Pour abrégér, nous écrirons  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  etc. pour les dérivées partielles  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$  etc.

2. On vérifie sans difficulté que, si les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  définissent deux surfaces parallèles, le produit scalaire

$$\mathbf{y} d\mathbf{x} = \mathbf{y}x_u du + \mathbf{y}x_v dv$$

est un différentiel total; on peut donc former l'expression

$$\widehat{\mathbf{x}}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) - 2 \left( c + \int_{u_0, v_0}^{u, v} \mathbf{y} d\mathbf{x} \right) \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}^2}.$$

En s'appuyant sur une formule de Bianchi <sup>(1)</sup>, on reconnaît, que la surface  $\widehat{\Sigma}$ , représentée par le vecteur  $\widehat{\mathbf{x}}(u, v)$ , est une transformée de Ribaucour de la surface  $\Sigma$ , c'est à dire que:

1°  $\Sigma$  et  $\widehat{\Sigma}$  sont les deux nappes de l'enveloppe d'une congruence de sphères;

2° La correspondance particulière, établie par cette configuration de Ribaucour entre  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , assure la conservation des lignes de courbure.

Pour abrégér, nous introduisons les symboles

$$\mathbf{y}^{-1} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}^2}.$$

$$(1) \quad \widehat{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_c = \mathbf{x} - 2 \left( c + \int_{u_0, v_0}^{u, v} \mathbf{y} d\mathbf{x} \right) \mathbf{y}^{-1}$$

en remarquant qu'on passe par une inversion de  $\Sigma'$  à la surface  $\Sigma'^{-1}$ , représentée par le vecteur  $\mathbf{y}^{-1}$ . La formule (1) montre que le symbole  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_c$  est déterminé uniformément, quand on se donne la constante d'intégration  $c$  et les deux vecteurs  $\mathbf{x}(u, v)$ ,  $\mathbf{y}(u, v)$  représentant deux surfaces  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  parallèles entre elles.

3. Si  $\widehat{\mathbf{n}}(u, v)$  désigne le vecteur normal de la surface  $\widehat{\Sigma}$ , en posant

$$c = \mathbf{n}(u_0, v_0) \mathbf{y}(u_0, v_0)$$

on a

$$\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} - 2 (\mathbf{n}\mathbf{y}) \mathbf{y}^{-1} = \{\mathbf{n}, \mathbf{y}\}_c. \quad (2)$$

Or on remarque immédiatement que le vecteur  $\widehat{\mathbf{n}}$  est en même temps le vecteur normal de la surface  $\Sigma'^{-1}$ , représentée par le vecteur  $\mathbf{y}^{-1}$ ; donc

(1) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, parte prima, terza edizione. Pisa 1932, pp. 167-175.

(2) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, parte prima, terza edizione. Pisa 1932, pp. 181-183.



les deux surfaces  $\Sigma'^{-1}$  et  $\widehat{\Sigma}$  ont la même image sphérique des lignes de courbure, c'est à dire que  $\Sigma'^{-1}$  et  $\widehat{\Sigma}$  sont parallèles entre elles. D'où il résulte, comme on sait, que toute transformation R de Ribaucour se compose de deux transformations de Combescure  $C_1, C_2$  et d'une inversion I:

$$R = C_1 \cdot I \cdot C_2.$$

4. En outre nous ferons observer que le symbole  $\{x, y\}_c$  a une double signification géométrique selon que  $x$  se conserve et que  $y$  varie ou que  $y$  se conserve et que  $x$  varie. Nous formulerons donc le théorème suivant <sup>(1)</sup>.

THÉORÈME I. — Si dans le symbole  $\widehat{x} = \{x, y\}_c$  on conserve  $x$  et que l'on fasse parcourir à  $c$  toutes les valeurs réelles, à  $y$  tous les vecteurs représentant une surface parallèle à  $x$ , on obtient toutes les surfaces transformées de Ribaucour de la surface  $x$ .

Si au contraire on conserve  $y$  et que l'on fasse parcourir à  $x$  tous les vecteurs représentant une surface parallèle à  $y$ , à  $c$  toutes les valeurs réelles, on obtient toutes les surfaces qui sont parallèles à la surface  $y^{-1}$ .

5. Notons encore quelques cas particuliers remarquables de la transformation de Ribaucour: On calculera facilement

$$\{x, n\}_c = x - 2cn,$$

$$\{x, x\}_c = (x^2(u_0, v_0) - 2c) x^{-1},$$

d'où l'on tire

$$\{x, x\}_c = \begin{cases} 0 & \text{pour } c = \frac{x^2(u_0, v_0)}{2} \\ x^{-1} & \text{pour } c = \frac{x^2(u_0, v_0) - 1}{2}; \end{cases}$$

on remarque donc que les surfaces parallèles au sens strict  $x - 2cn$  et la surface  $x^{-1}$ , construite par une inversion, se trouvent parmi les transformées de Ribaucour de la surface  $x$ .

6. Enfin on déduit du symbole

$$\widehat{x} = \{x, y\}_c$$

(1) La démonstration détaillée des théorèmes énoncés dans les §§ suivants sera publiée ailleurs dans un mémoire plus étendu.

par un calcul simple le nouveau symbole

$$(2) \quad \mathfrak{x} = \{\widehat{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}^{-1}\}_{c'} \quad , \quad c' = -\frac{c}{\mathfrak{y}^2(u_0, v_0)}$$

en observant que si  $\widehat{\Sigma}$  est une transformée de Ribaucour de la surface  $\Sigma$ ,  $\Sigma$  est de même une transformée de Ribaucour de  $\widehat{\Sigma}$ .

7. En vue d'établir une relation entre les deux symboles  $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$  et  $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}$  on démontre le

THÉORÈME 2. — Soit

$$(3) \quad c' = \mathfrak{x}(u_0, v_0) \mathfrak{y}(u_0, v_0) - c,$$

les deux surfaces

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} \quad \text{et} \quad \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{c'}^{-1}$$

sont parallèles entre elles.

On peut préciser l'énoncé de ce théorème en partant de la remarque suivante. Si l'on soumet à une inversion une congruence de sphères de Ribaucour, dont les surfaces  $\mathfrak{x}$  et  $\widehat{\mathfrak{x}}$  sont les deux nappes de l'enveloppe, les surfaces  $\mathfrak{x}^{-1}$  et  $\widehat{\mathfrak{x}}^{-1}$  apparaîtront également comme les deux nappes de l'enveloppe d'une congruence de Ribaucour. En cherchant à déterminer exactement le rapport entre les deux surfaces  $\mathfrak{x}^{-1}$  et  $\widehat{\mathfrak{x}}^{-1}$ , on trouve le

THÉORÈME 3. — La relation entre les surfaces

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} \quad \text{et} \quad \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{c'}^{-1}$$

est donnée par l'équation :

$$\widehat{\mathfrak{x}}^{-1} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} = \{\mathfrak{x}^{-1}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{c'}\}_{c''},$$

$c'$  ayant la même valeur que dans l'équation (3), pendant qu'on a

$$c'' = \frac{c}{\mathfrak{x}^2(u_0, v_0)}.$$

8. En s'appuyant sur le théorème 3, on démontre un théorème de permutabilité remarquable :

THÉORÈME 4. — Soient

$$\mathfrak{x}(u, v), \mathfrak{y}_1(u, v), \mathfrak{y}_2(u, v)$$

trois surfaces parallèles entre elles, on a la relation

$$\{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{c_1}, \{\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1\}_{c_2}\}_{c_3} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_2\}_{c'_1}, \{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\}_{c'_2}\}_{c'_3}$$

dans laquelle on a posé

$$\begin{aligned}c'_1 &= c_3 + 2 c_1 \frac{y_1(u_0, v_0) y_2(u_0, v_0) - c_2}{y_1^2(u_0, v_0)} \\c'_2 &= y_1(u_0, v_0) y_2(u_0, v_0) - c_2 \\c'_3 &= c_1 - \frac{2 c'_1 c_2}{y_2^2(u_0, v_0)}\end{aligned}$$

$c_1, c_2, c_3$  étant trois constantes arbitraires.

Ce théorème s'interprète immédiatement d'une manière géométrique, si l'on cherche à déterminer toutes les surfaces parallèles à  $\{y_2, y_1\}_{c_2}^{-1}$ , qui, d'après le théorème 2, sont les mêmes que les surfaces parallèles à  $\{y_1, y_2\}_{c'_2}^{-1}$ .

9. Le théorème 4 se rapproche d'un théorème de permutabilité qu'on doit à Bianchi <sup>(1)</sup>. Bianchi étudie le faisceau de surfaces

$$\widehat{x}(u, v; t_1, t_2) = \{x, t_1 y_1 + t_2 y_2\}_{t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2}$$

où  $t_1, t_2$  sont des paramètres quelconques, et il démontre l'existence d'un second faisceau

$$(4) \quad \widehat{z}(u, v; s_1, s_2) = \{z, s_1 w_1 + s_2 w_2\}_{s_1 \gamma'_1 + s_2 \gamma'_2}$$

qu'il nomme conjugué au faisceau  $\widehat{x}(u, v; t_1, t_2)$  et qui a les deux propriétés suivantes:

- 1° Le faisceau  $\widehat{z}(u, v; s_1, s_2)$  contient la surface  $x$ ;
- 2° Toute surface du faisceau  $\widehat{z}$  peut s'obtenir en soumettant une surface quelconque du faisceau  $\widehat{x}$  à une transformation de Ribaucour.

On dérive facilement le théorème de Bianchi de notre théorème 4. Car  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  étant trois constantes choisies arbitrairement, on substitue en (4)

$$\begin{aligned}z &= \{x, y_1\}_{\gamma_1} \\w_1 &= y_1^{-1} \\w_2 &= \{y_2, y_1\}_{\gamma_3} \\\gamma'_1 &= -\frac{\gamma_1}{y_1^2(u_0, v_0)} \\\gamma'_2 &= \gamma_2 - \frac{2 \gamma_1 (y_1(u_0, v_0) y_2(u_0, v_0) - \gamma_3)}{y_1^2(u_0, v_0)};\end{aligned}$$

(1) BIANCHI, loc. cit., pp. 202-212.

puis en s'appuyant sur le théorème 4, on vérifie l'équation

$$(5) \quad \widehat{z}(u, v; s_1, s_2) = \{x, t_1 y_1 + t_2 y_2\}_{t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2}, \{y_1, t_1 y_1 + t_2 y_2\}_{t_1 c'_1 + t_2 c'_2} \{c'_3\}$$

où l'on a posé

$$c'_1 = \frac{1}{2} y_1^2 (u_0 v_0)$$

$$c'_2 = y_1 (u_0 v_0) y_2 (u_0 v_0) - \gamma_3 + \frac{s_1}{2 s_2}$$

$$c'_3 = \gamma_1 - \frac{(t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2) \left( t_1 y_1^2 (u_0 v_0) + t_2 \left( 2 \gamma_3 - \frac{s_1}{s_2} \right) \right)}{(t_1 y_1 (u_0 v_0) + t_2 y_2 (u_0 v_0))^2}.$$

La formule (5) fait apparaître en effet toute surface du faisceau  $\widehat{z}$  comme une transformée de Ribaucour d'une surface quelconque du faisceau  $\widehat{x}$ ; en outre en se rapportant aux formules (2) et (4) on démontre par un calcul facile que

$$\widehat{z}(u, v; 1, 0) = x(u, v).$$

Donc le faisceau  $\widehat{z}$ , ayant les deux propriétés définies auparavant, est le faisceau conjugué du faisceau  $\widehat{x}(u, v; t_1, t_2)$ .

Après avoir déduit le théorème de Bianchi de notre théorème 4, on peut montrer que réciproquement le théorème de Bianchi contient déjà une partie de notre théorème 4. Car, comme on a

$$\widehat{x}(u, v; 1, 0) = \{x, y_1\}_{\gamma_1}, \quad \widehat{x}(u, v; 0, 1) = \{x, y_2\}_{\gamma_2}$$

le théorème de Bianchi énonce qu'il existe une surface  $\widehat{z}(u, v)$  se déduisant par une transformation de Ribaucour aussi bien de la surface  $\{x, y_1\}_{\gamma_1}$  que de la surface  $\{x, y_2\}_{\gamma_2}$ , et c'est là justement une conséquence immédiate du théorème 4.

**Matematica.** — *Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine.* Nota di M. PICONE, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

In una Nota recente <sup>(2)</sup> N. Cioranescu osserva che il metodo da me dato <sup>(3)</sup> per la traduzione in equazione integrale di un certo problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine, può essere applicato, senza veruna modificazione, per conseguire lo stesso scopo nel più generale problema lineare relativo alle equazioni stesse, problema ch'egli, ben giustamente, pone al modo seguente: *Assegnate, nell'intervallo limitato  $(a, b)$  dell'asse reale  $x$ , le  $n + 2$  funzioni continue (reali o complesse)*

$$p_0(x), \quad p_1(x), \dots, p_n(x), \quad f(x),$$

*e le  $(n + 1)^2$  funzioni (reali o complesse) a variazione limitata*

$$\alpha_{ik}(x) \quad (i, k = 0, 1, \dots, n),$$

*determinare un integrale  $y(x)$  dell'equazione differenziale lineare ordinaria:*

$$(1) \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \lambda \sum_{k=0}^n p_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = f(x),$$

*verificante le  $n + 1$  condizioni lineari:*

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{d^k y}{dx^k} dx_{ik}(x) = b_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

*ove gli integrali scritti sono presi nel senso di Stieltjes.*

Ora io devo osservare che il metodo della citata mia antica Nota vale soltanto nell'ipotesi che esista uno ed un solo polinomio in  $x$ , di grado  $n$ , verificante le (2), laddove esso fornisce, direttamente, un traducente

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) N. CIORANESCU, *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires avec les conditions linéaires les plus générales* [*Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți*], vol. V (1931), pp. 109-117].

(3) M. PICONE, *I teoremi d'esistenza per gl'integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni* [*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*], vol. XVII (1908), pp. 340-346].



sistema di  $n + 1$  equazioni integrali lineari, nella  $y$  e nelle sue prime  $n$  derivate, e quindi la definitiva traducente *unica* equazione integrale, mercè l'ulteriore impiego del classico artificio di Fredholm, ciò che, come ho potuto sperimentare, conduce poi a metodi di calcolo di applicazione assai malagevole.

Nelle righe che seguono, che mi ha indotto a scrivere l'occasionale lettura del citato lavoro del sig. Cioranescu, voglio esporre il semplicissimo metodo, per la traduzione diretta in un'unica equazione integrale del sistema di equazioni (1) e (2), al quale sono, alla fine, di recente pervenuto cercando di preparare, nei lavori affidati all'**Istituto di Calcolo del Consiglio nazionale delle Ricerche**, le condizioni migliori per l'effettivo calcolo numerico degli autovalori del parametro  $\lambda$  nei sistemi di equazioni del tipo delle (1) e (2), calcolo così frequentemente richiesto per importantissimi problemi, nelle Scienze sperimentali e d'applicazione.

Il metodo ora indicato — che può seguirsi nella sola ipotesi, evidentemente necessaria, che lo spettro, nel parametro  $\lambda$ , non sia tutto il piano — può ritenersi un'estensione, con un perfezionamento che ne rende possibile anche le applicazioni numeriche, del metodo che io detti nella mia Tesi d'abilitazione <sup>(1)</sup>, per le equazioni differenziali del 2° ordine. Anche il sig. Cioranescu, nel citato suo lavoro, considera l'indicata traduzione in equazione integrale, prescindendo dall'ipotesi dell'esistenza e dell'unicità di un polinomio di grado  $n$  verificante le (2), per le particolari equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda A(x) y + f(x) \quad , \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \lambda A(x) y + f(x) .$$

Ma le equazioni che vengono fornite dalle Scienze sperimentali e d'applicazione contengono il parametro  $\lambda$  nei modi più svariati, ed avendo a ciò riguardo esporrò la sopradetta traduzione in equazione integrale considerando il sistema di equazioni:

$$(3) \quad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} - \sum_{k=0}^n p_k(x, \lambda) \frac{d^k y}{dx^k} = f(x, \lambda),$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{d^k y}{dx^k} d\alpha_{ik}(x, \lambda) = b_i(\lambda),$$

ove  $p_k(x, \lambda)$ ,  $f(x, \lambda)$ ,  $\alpha_{ik}(x, \lambda)$ ,  $b_i(\lambda)$  sono, per ogni fissato valore di  $x$  nell'intervallo  $(a, b)$ , trascendenti intere in  $\lambda$  e, per ogni fissato valore di  $\lambda$  del piano complesso, le  $p_k(x, \lambda)$  e  $f(x, \lambda)$ , funzioni continue della  $x$  le  $\alpha_{ik}(x, \lambda)$ , funzioni a variazione limitata. Conseguirò così la necessaria generalità.

(1) M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* [« Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa », vol. XI (1909), pp. 3-141], pp. 88-103.

Nelle sopradette scienze è anche frequente la ricerca di autovalori per i sistemi di più equazioni differenziali lineari in altrettante funzioni incognite, e mostrerò perciò anche, colla stessa generalità, come il sistema delle seguenti  $m$  equazioni differenziali, degli ordini  $n_1 + 1$ ,  $n_2 + 1$ , ...,  $n_m + 1$  nelle funzioni incognite  $y_1, y_2, \dots, y_m$ ,

$$(5) \quad \frac{d^{n_j+1} y_j}{dx^{n_j+1}} = \sum_{b=1}^m \sum_{k=0}^{n_b} p_{jbk}(x, \lambda) \frac{d^k y_b}{dx^k} f_j(x, \lambda), \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

e delle  $n_1 + n_2 + \dots + n_m + m = N + 1$  condizioni:

$$(6) \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{n_j} \int_a^b \frac{d^k y_j}{dx^k} d\alpha_{ijk}(x, \lambda) = b_i(\lambda) \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

possa tradursi in un sistema di  $m$  equazioni integrali in  $m$  funzioni incognite.

**1. Condizione necessaria e sufficiente perchè lo spettro non sia tutto il piano.** — Prenderemo come funzione incognita

$$\varphi(x) = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}},$$

donde, designando  $c_0, c_1, \dots, c_n$  costanti arbitrarie, si ha:

$$(7) \quad y(x) = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + c_n \frac{x^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \varphi(\xi) d\xi,$$

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \sum_{v=k}^n c_v \frac{x^{v-k}}{(v-k)!} + \int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-k}}{(n-k)!} \varphi(\xi) d\xi,$$

ed introducendo questa nella (3), posto

$$q_v(x, \lambda) = \sum_{k=0}^v p_k(x, \lambda) \frac{x^{v-k}}{(v-k)!}, \quad H(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=0}^n p_k(x, \lambda) \frac{(x-\xi)^{n-k}}{(n-k)!},$$

l'equazione di Volterra in  $\varphi(x)$

$$(8) \quad \varphi(x) = f(x, \lambda) + \sum_{k=0}^n c_k q_k(x, \lambda) + \int_a^x H(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi.$$

Porremo

$$H_1(x, \xi, \lambda) = H(x, \xi, \lambda), \quad H_2(x, \xi, \lambda) = \int_{\xi}^x H_1(x, t, \lambda) H(t, \xi, \lambda) dt, \dots,$$

$$H_{v+1}(x, \xi, \lambda) = \int_{\xi}^x H_v(x, t, \lambda) H(t, \xi, \lambda) dt, \dots,$$

$$q_k^{(0)}(x, \lambda) = q_k(x, \lambda), \quad q_k^{(v)}(x, \lambda) = \int_a^x H_v(x, \xi, \lambda) q_k(\xi, \lambda) d\xi,$$

$$f^{(0)}(x, \lambda) = f(x, \lambda), \quad f^{(v)}(x, \lambda) = \int_a^x H_v(x, \xi, \lambda) f(\xi, \lambda) d\xi,$$

e se ne trae, per qualsivoglia  $\lambda$ ,

$$(9) \quad \varphi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} f^{(v)}(x, \lambda) + \sum_{k=0}^n c_k \sum_{v=0}^{\infty} q_k^{(v)}(x, \lambda),$$

riuscendo, il secondo membro, una trascendente intera in  $\lambda$ . Introducendo le (7) nelle (4), posto,

$$\sum_{k=0}^v \int_a^b \frac{x^{v-k}}{(v-k)!} d\alpha_{ik}(x, \lambda) = a_{iv}(\lambda), \quad \sum_{k=0}^n \int_{\xi}^b \frac{(x-\xi)^{n-k}}{(n-k)!} d\alpha_{ik}(x, \lambda) = g_i(x, \lambda),$$

si hanno le equazioni:

$$(10) \quad \sum_{k=0}^n a_{ik}(\lambda) c_k + \int_a^b g_i(\xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = b_i(\lambda),$$

le quali, in forza della (9), posto

$$a_{ik}^{(0)}(\lambda) = a_{ik}(\lambda), \quad a_{ik}^{(v+1)}(\lambda) = \int_a^b g_i(\xi, \lambda) q_k^{(v)}(\xi, \lambda) d\xi,$$

$$b_i^{(0)}(\lambda) = b_i(\lambda), \quad b_i^{(v+1)}(\lambda) = - \int_a^b g_i(\xi, \lambda) f^{(v)}(\xi, \lambda) d\xi,$$

formano il seguente sistema di equazioni lineari nelle  $c_0, c_1, \dots, c_n$ :

$$\sum_{k=0}^n c_k \sum_{v=0}^{\infty} a_{ik}^{(v)}(\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} b_i^{(v)}(\lambda), \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Porremo

$$A_{ik}(\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{ik}^{(v)}(\lambda), \quad A_{ik}^{(\mu)}(\lambda) = \sum_{v=0}^{\mu} a_{ik}^{(v)}(\lambda),$$

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{00}(\lambda) & \dots & A_{0n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n0}(\lambda) & \dots & A_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}, \quad A^{(\mu)}(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{00}^{(\mu)}(\lambda) & \dots & A_{0n}^{(\mu)}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n0}^{(\mu)}(\lambda) & \dots & A_{nn}^{(\mu)}(\lambda) \end{vmatrix},$$

e si ha:

$$(11) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} A^{(\mu)}(\lambda) = A(\lambda).$$

Evidentemente: *Condizione necessaria e sufficiente affinché lo spettro in  $\lambda$  non sia tutto il piano complesso è che la trascendente intera  $A(\lambda)$  non sia identicamente nulla. Detto spettro è costituito dalla totalità degli zeri di  $A(\lambda)$ .*

**2. Traduzione in equazione integrale del sistema di equazioni (3) e (4).** — Nell'ipotesi che lo spettro in  $\lambda$  non sia tutto il piano, esistono, in base alla (11), valori di  $\mu$  per i quali,  $A^{(\mu)}(\lambda)$  riesce non identicamente nulla. Diamo a  $\mu$  il più basso di tali valori e consideriamo valori di  $\lambda$  per i quali  $A^{(\mu)}(\lambda) \neq 0$ . Introducendo, successivamente, la (8),  $\mu$  volte nelle (10), posto

$$g_i^{(0)}(\xi, \lambda) = g_i(\xi, \lambda), \dots, g_i^{(\nu+1)}(\xi, \lambda) = \int_a^b g_i^{(\nu)}(t, \lambda) H(t, \xi, \lambda) dt,$$

$$B_i^{(\mu)}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\mu} b_i^{(\nu)}(\lambda),$$

si traggono le equazioni:

$$(12) \quad \sum_{k=0}^n A_{ik}^{(\mu)}(\lambda) c_k = B_i^{(\mu)}(\lambda) - \int_a^b g_i^{(\mu)}(\xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi,$$

donde, con l'eliminazione delle costanti  $c_0, c_1, \dots, c_n$  da queste e dalla (8), si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \varphi - f - \lambda \int_a^x H \varphi d\xi & q_0 & \dots & q_n \\ B_0^{(\mu)} - \int_a^b g_0^{(\mu)} \varphi d\xi & A_{00}^{(\mu)} & \dots & A_{0n}^{(\mu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n^{(\mu)} - \int_a^b g_n^{(\mu)} \varphi d\xi & A_{n0}^{(\mu)} & \dots & A_{nn}^{(\mu)} \end{vmatrix} = 0.$$

cioè, detto  $C_{ik}^{(\mu)}(\lambda)$  il complemento algebrico di  $A_{ik}^{(\mu)}(\lambda)$  nel determinante  $[A_{ik}^{(\mu)}(\lambda)]$ ,

$$\begin{aligned} & \varphi(x) - f(x, \lambda) - \int_a^x H(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi - \\ & - \sum_{i,k}^{0,n} \frac{C_{ik}^{(\mu)}(\lambda)}{A^{(\mu)}(\lambda)} q_i(x, \lambda) \left[ B_k^{(\mu)}(\lambda) - \int_a^b g_k^{(\mu)}(\xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi \right] = 0, \end{aligned}$$

e quindi, posto

$$g(x, \xi, \lambda) \begin{cases} = H(x, \xi, \lambda), & \text{per } \xi \leq x, \\ = 0, & \text{per } \xi > x, \end{cases}$$

$$K^{(\mu)}(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) - \sum_{i,k}^{0,n} \frac{C_{ik}^{(\mu)}(\lambda)}{A^{(\mu)}(\lambda)} q_i(x, \lambda) g_k^{(\mu)}(\xi, \lambda),$$

l'equazione integrale traduce il sistema di equazioni (3) e (4).

$$(13) \quad \varphi(x) - \int_a^b K^{(\mu)}(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = f(x, \lambda) + \sum_{i,k}^{0,n} \frac{C_{ik}^{(\mu)}(\lambda)}{A^{(\mu)}(\lambda)} q_i(x, \lambda) B_k^{(\mu)}(\lambda),$$

per i valori di  $\lambda$  per cui

$$A^{(\mu)}(\lambda) \neq 0.$$

Pertanto, gli autovalori di  $\lambda$  non annullanti  $A^{(\mu)}(\lambda)$  sono tutti e soli quelli per cui esiste una soluzione, non identicamente nulla, dell'equazione:

$$(14) \quad \varphi(x) - \int_a^b K^{(\mu)}(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

Se, per esempio, in particolare, le  $\alpha_{ik}$  non dipendono da  $\lambda$ , tali riesciranno le  $a_{ik}$  e le  $g_i$ , e se il determinante  $[a_{ik}]$  risulta diverso da zero, si può fare  $\mu = 0$  e la totalità degli autovalori di  $\lambda$  è quella stessa dell'equazione (14), per  $\mu = 0$ . In tal caso, se, come avviene di frequente, il parametro  $\lambda$  entra linearmente nel primo membro della (3), il nucleo  $K^{(0)}(x, \xi, \lambda)$  riesce, esso pure, una funzione lineare di  $\lambda$ , e del classico tipo  $\lambda K(x, \xi)$  quando si avesse  $p_k(x, \lambda) \equiv \lambda p_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

3. *Caso dei sistemi di equazioni (5) e (6).* - Prenderemo come funzioni incognite le

$$\varphi_j(x) = \frac{d^{n_j+1} y_j}{dx^{n_j+1}}, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

per le quali, posto

$$q_{j b k} = \sum_{v=0}^k p_{j b v} \frac{x^k - v}{(k-v)!}, \quad H_{j b} = \sum_{v=0}^{n_b} p_{j b v} \frac{(x-\xi)^{n_b-v}}{(n_b-v)!},$$

e designando  $q_{j0}, q_{j1}, \dots, q_{jN}$  le funzioni  $q_{j b k}$  disposte in un certo ordine e  $c_0, c_1, \dots, c_N$  costanti arbitrarie, sussiste il seguente sistema di equazioni integrali di Volterra:

$$(15) \quad \varphi_j(x) = f_j(x, \lambda) + \sum_{l=1}^N c_l q_{jl}(x, \lambda) + \sum_{b=1}^m \int_a^x H_{j b}(x, \xi, \lambda) \varphi_b(\xi) d\xi.$$

Porremo:  $H_{j b}^{(1)} = H_{j b}$ ,

$$H_{j b}^{(v+1)} = \sum_{r=1}^m \int_{\xi}^x H_{j r}^{(v)}(x, t, \lambda) q_{r b}(t, \xi, \lambda) dt,$$

$$q_{j l}^{(0)} = q_{j l}, \quad q_{j l}^{(v)} = \sum_{r=1}^m \int_{\xi}^x H_{j r}^{(v)}(x, \xi, \lambda) q_{r l}(\xi, \lambda) d\xi,$$



$$f_j^{(0)} = f_j, \quad f_j^{(v)} = \sum_{r=1}^m \int_a^x H_{jr}^{(v)}(x, \xi, \lambda) f_r(\xi, \lambda) d\xi,$$

$$\sum_{v=0}^h \int_a^b \frac{x^{k-v}}{(k-v)!} d\alpha_{ijv} = a_{ijk}(\lambda), \quad \sum_{v=0}^{n_j} \int_{\xi}^b \frac{(x-\xi)^{n_j-v}}{(n_j-v)!} d\alpha_{ijv} = g_{ij}(\xi, \lambda),$$

$$b_i^{(0)} = b_i, \quad b_i^{(v+1)} = - \sum_{r=1}^m \int_a^b g_{ir}(\xi, \lambda) f_r^{(v)}(\xi, \lambda) d\xi,$$

$$a_{il}^{(v+1)} = \sum_{r=1}^m \int_a^b g_{ir}(\xi, \lambda) q_{rl}^{(v)}(\xi, \lambda) d\xi,$$

$$g_{ih}^{(0)} = g_{ih}, \quad g_{ih}^{(v+1)} = \sum_{r=1}^m \int_{\xi}^b g_{ir}^{(v)}(t, \lambda) H_{rh}(t, \xi, \lambda) dt,$$

e, designando con  $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{iN}$  le  $a_{ihk}$  disposte nello stesso ordine delle  $q_{jhk}$ , porremo anche

$$a_{il}^{(0)} = a_{il}, \quad A_{il}(\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{il}^{(v)}(\lambda), \quad A_{il}^{(\mu)}(\lambda) = \sum_{v=0}^{\mu} a_{il}^{(v)}(\lambda), \quad (i, l = 0, 1, \dots, N),$$

$$A(\lambda) = [A_{il}(\lambda)], \quad A^{(\mu)}(\lambda) = [A_{il}^{(\mu)}(\lambda)].$$

Sussiste la (11). Se lo spettro in  $\lambda$  non è tutto il piano complesso, daremo a  $\mu$  il valore più basso per il quale  $A^{(\mu)}(\lambda)$  riesce non identicamente nulla e a  $\lambda$  un valore per cui sia  $A^{(\mu)}(\lambda) \neq 0$ . Insieme alle (15) hanno luogo le equazioni:

$$\sum_{l=0}^N A_{il}^{(\mu)}(\lambda) c_l = B_i^{(\mu)}(\lambda) - \sum_{b=1}^m \int_a^b g_{ib}^{(\mu)}(\xi, \lambda) \varphi_b(\xi) d\xi,$$

e quindi, con l'eliminazione delle costanti  $c_l$ , si perviene ad un sistema di  $m$  equazioni integrali nelle  $m$  funzioni incognite  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , del tipo:

$$\varphi_j(x) - \sum_{b=1}^m \int_a^b K_{jb}^{(\mu)}(x, \xi, \lambda) \varphi_b(\xi) d\xi = F_j^{(\mu)}(x, \lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

traducendo il sistema di equazioni (5) e (6), per i valori di  $\lambda$  per cui  $A^{(\mu)}(\lambda) \neq 0$ .

**Matematica.** — *Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet.* Nota di V. BERNSTEIN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz.* Nota di A. DEL CHIARO, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica** (Geometria). — *Corrispondenza per piani tangenti paralleli.* Nota di M. HAIMOVICI e E. POPA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires.* Nota di B. HOSTINSKY, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* —  
I. *Sommazione delle funzioni puntiformi.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata dal Corrisp. C. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* —  
II. *Riduzione a tipi normali e integrali fondamentali.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata dal Corrisp. G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* —  
III. *Funzioni periodiche.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata dal Corrisp. G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sul pendolo di lunghezza variabile.* Nota di U. CASSINA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. A. MAGGI.

Desidero aggiungere qualche osservazione ad una recente Nota del prof. R. Thiry: *Sur le lancement du pendule par modification de sa longueur*, pubblicata nel « L'Enseignement mathématique », t. 29, 1930, pp. 75-80.

1. L'altalena può essere considerata come un pendolo di lunghezza variabile: il punto pesante è allora il centro di gravità del bimbo.

Sia O il punto di sospensione, A la posizione del grave con velocità nulla, B la sua posizione quando il filo è verticale, e C la posizione finale dopo una oscillazione (semplice). Allora il bimbo s'accoscia nel tratto discendente AB, e si raddrizza nel tratto ascendente BC, e così aumenta l'ampiezza dell'oscillazione; cioè il filo, nel periodo discendente è più lungo che nel periodo ascendente.

Vale il seguente

*Teorema.* « Il centro di gravità dell'area OABC, descritta dal filo del pendolo in una oscillazione, cade sopra la verticale OB del punto di sospensione O ».

*Dimostrazione.*

Pongo eguale ad uno la massa del punto mobile P; allora il punto P è soggetto a due forze: una è la gravità  $g$ , l'altra è la tensione del filo dal punto P ad O.

Adopero coordinate cartesiane: O origine,  $x$  orizzontale,  $y$  verticale. Le equazioni del moto sono perciò:

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = g - ky,$$

dove  $k$  è una quantità *positiva* dipendente dalla tensione del filo.

Eliminando  $k$  si ha:

$$(2) \quad y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} = -gx,$$

ossia:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left( y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = -gx.$$

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

Introduco ora coordinate polari:  $Oy$  è l'asse polare,  $\rho$  il raggio vettore e  $\theta$  l'argomento.

Allora le formole di trasformazione sono:

$$(4) \quad x = \rho \sin \theta, \quad y = \rho \cos \theta,$$

e la formola (3) diventa:

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -g\rho \sin \theta.$$

Questa formola (5) si può dedurre anche dal teorema delle aree.

Ora moltiplico per il fattore integrante  $\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ ; risulta:

$$(6) \quad \left( \rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -g\rho^3 \sin \theta \frac{d\theta}{dt},$$

e, in seguito ad integrazione,

$$(7) \quad \frac{1}{2} \Delta \left( \rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -g \int \rho^3 \sin \theta d\theta,$$

ove  $\Delta$  indica l'incremento della funzione, relativo ai limiti dell'integrale.

Se noi integriamo fra gli estremi  $A$  e  $C$  dell'oscillazione, ivi la velocità angolare  $d\theta/dt$  è nulla; quindi fra detti limiti:

$$(8) \quad \int \rho^3 \sin \theta d\theta = 0.$$

Ora:  $\frac{1}{2} \rho^2 d\theta$  è l'area del settore infinitesimo descritto dal filo,  $\frac{2}{3} \rho \sin \theta$

è la distanza del baricentro dell'area dalla verticale  $OB$ ; quindi  $\frac{1}{3} \int \rho^3 \sin \theta d\theta$

è il momento, rispetto alla verticale, dell'area  $OABC$ ; ma questo momento è nullo, quindi il baricentro dell'area  $OABC$  sta sulla verticale  $OB$ .

La formola (7) coincide con la formola (1) della citata Nota di R. Thiry; ed è stata già pubblicata nella breve Nota di G. PEANO, *Sul pendolo di lunghezza variabile* (« Rend. del Circ. mat. di Palermo », 24 nov., 1895, t. 10, 1896, pp. 36-37).

Ivi, l'autore, dà la seguente interpretazione geometrica della formola (8):

« I volumi descritti dai settori  $OAB$  e  $OBC$ , nella rotazione attorno ad  $OB$ , sono eguali ».

Il libro di C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Meccanica razionale* (Torino, Lattes, 1921), p. 394 riporta il teorema di Peano e considera anche il moto del pendolo di lunghezza variabile, in un mezzo resistente.

2. Come semplici corollari si hanno le proposizioni seguenti, che danno la spiegazione razionale dei moti del secchio nel pozzo, e dell'altalena:

a) « Per aumentare l'ampiezza delle oscillazioni del pendolo di lunghezza variabile (oscillante nel vuoto) *basta* accorciare sempre la lunghezza del pendolo, (caso del *secchio nel pozzo*) »; e

b) « *Basta* anche allungare (o conservare costante) la lunghezza del pendolo nel ramo discendente ed accorciarlo nel ramo ascendente, in modo che — nei punti egualmente inclinati sulla verticale — la lunghezza del pendolo nel punto in cui scende sia maggiore di quella che ha nel punto in cui sale, (caso dell'*altalena*) ».

Queste proposizioni vennero da me enunciate nella mia recensione della suddetta *Meccanica razionale* (v. « Bollettino di matematica » (di CONTI e LORIA), annata XVIII, Bologna (Cuppini), 1922, p. LVI).

**Meccanica.** — *Cilindri rotori autorotanti*. Nota di L. S. DARIOS, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Per l'effetto Magnus, un cilindro circolare ruotando intorno al proprio asse, ove sia investito da una corrente, riceve una spinta in direzione normale alla corrente stessa e a quell'asse; e in un senso o nell'opposto a seconda del verso della rotazione. Precisamente, se il vettore **F** della

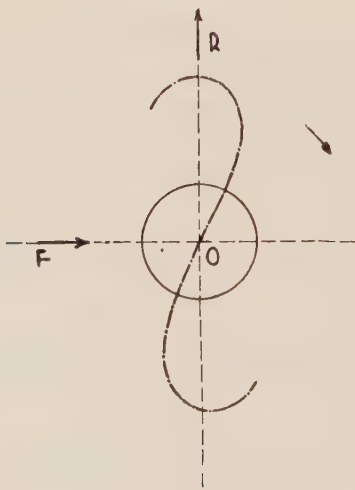


figura annessa dà la direzione e il verso della corrente, il vettore **R** può rappresentare quella spinta conseguente; il cilindro essendo figurato in se-

(1) Nella seduta del 15 maggio 1932.



zione dal circolo di centro  $O$ , e ruotando esso intorno al proprio asse  $a$  nel senso indicato dalla freccia ricurva.

Il fenomeno si spiega *grosso modo* ammettendo che la corrente venga dal cilindro divisa in due falde: delle quali la superiore (secondo il disegno) vien dal cilindro trascinata e portata ad incontrarsi con quella inferiore nella regione sottostante. Di qui una soprapressione al basso e una depressione in alto; o, se si vuole, una circolazione diversa da zero intorno al cilindro.

Sostituendo al cilindro circolare una specie di ruota idraulica, come quella rappresentata in figura a punto e tratto, questa dovrebbe ruotare nel senso indicato e venir sollecitata verso l'alto. L'esperienza confermò la facile intuizione.

2. A un cilindro di legno lungo cm. 18 e col diametro di cm. 3, feci attaccare per tutta la sua lunghezza due pale di lamiera metallica, profilate come in figura. In corrispondenza dell'asse del cilindro fissai due perni, che feci appoggiare orizzontalmente alle basi di due fessure aperte ciascuna su due ritti verticali in ferro il meno possibile ingombranti. Esposi il tutto alla corrente di scia prodotta da un'elica del diametro di cm. 60, ruotante a punto fisso a 2400 giri al minuto. Quella ruota si mise in rapida rotazione e si sollevò fino all'estremità superiori delle fessure, ivi rimanendo aderente finchè la corrente di scia non fosse venuta meno. Il peso della ruota era di circa 300 grammi.

In seguito feci costruire un'apposita bilancia allo scopo di misurare la spinta  $R$  diretta verso l'alto e la forza  $F$  d'investimento. Ripetei le prove con pale diversamente profilate e riducendo al minimo il cilindro assiale di sostegno. Ma non credo opportuno riportare tali misure: esperimenti del genere, se mai, potranno essere ripetuti in qualche laboratorio aerodinamico con estrema esattezza. A me basta per ora d'aver assodato in via perentoria (e sia pur rudimentale) tanto l'esistenza della spinta  $R$  come la sua rilevante intensità. Il fenomeno avviene anche con ruote a quattro pale.

Chiamo col nome di *cilindro rotore autorotante* la ruota sopra descritta. A differenza di un cilindro circolare, è sua prerogativa essenziale quella di essere sollecitata a ruotare dalla corrente investitrice. Pertanto, mentre i ben noti rotori del Flettner vogliono essere azionati da opportuni meccanismi, da questi possono esser liberi i cilindri in discorso <sup>(1)</sup>.

3. A prescindere dalla distribuzione delle pressioni, il fenomeno Magnus per il cilindro circolare ruotante e quello analogo delle mie ruote possono anche collegarsi ad un notissimo effetto giroscopico.

(1) Correggendo le bozze di stampa, appresi la precedente esistenza del *rotore a pale* del finlandese J. Savonius, che differisce dalla mia ruota solo per la configurazione delle pale stesse. Se ne veda un cenno ne «Le Vie d'Italia», aprile 1932, p. 290.

Si noti anzitutto che tanto il cilindro circolare quanto la ruota a quattro pale sono corpi giroscopici; e che per questi, come anche per la ruota a due pale, la rapida rotazione avviene intorno ad un asse principale d'inerzia. Si ricordi allora <sup>(1)</sup> che una forza  $\mathbf{F}$  incidente su quell'asse e di momento  $\mathbf{M}$  rispetto al baricentro  $O$  del corpo ruotante dà luogo ad una deviazione dell'asse nel piano per esso perpendicolare ad  $\mathbf{F}$ , e in un senso o nell'altro a seconda del verso di  $\mathbf{M}$ .

Ciò premesso, s'immagini divisa la ruota in tante fette di spessore infinitesimo mediante piani perpendicolari all'asse di rotazione. Su una di tali fette l'azione della corrente si risolve in una coppia motrice e in una forza  $\mathbf{F}'$  incidente sull'asse. Il momento di  $\mathbf{F}'$  rispetto al baricentro  $O$  avrà poi un senso o l'altro, a seconda che la fetta corrispondente si trovi nell'uno o nell'altro dei due semispazi determinati dal piano normale all'asse e passante per  $O$ . Ne consegue che i momenti delle due forze  $\mathbf{F}'$  relativi a due fette equidistanti da  $O$  tendono a far sollevare l'asse parallelamente a se stesso. In definitiva la spinta totale  $\mathbf{F}$  della corrente investitrice dà luogo anche alla sollecitazione  $\mathbf{R}$ , come in figura.

4. Il lettore, leggendo questa Nota, ricorderà il fenomeno illustrato qualche anno fa dal compianto col. Raimondi <sup>(2)</sup>. Le due cose sono però profondamente distinte. Sia la lastra piatta come il cilindro ruotanti del Raimondi in aria tranquilla non possono porsi in rotazione da una corrente. E oltracciò la spinta subita dal corpo ruotante è legata alla presenza d'una superficie materiale a conveniente distanza. Quell'autore metteva poi in rilievo non già una forza di sustentazione ma una spinta verso il basso, imprimendo una rotazione antioraria. La spinta verso il basso si ottiene anche colla mia ruota, ribaltando le pale in modo che la pala superiore presenti alla corrente la sua convessità anzichè la concavità.

Ho in mente possibili applicazioni di questo studio preliminare. Ma su queste e sulle necessarie relative esperienze d'indole quantitativa deciderà l'avvenire.

(1) Vedasi, p. es., T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, Parte II; Zanichelli, 1927, p. 87 e sgg.

(2) Cfr. E. RAIMONDI, *Un nuovo fenomeno di aerodinamica*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. X, serie 6<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem., 1929.

**Astronomia.** — *Metodo per il calcolo d'orbita di una binaria visuale.* Nota di E. MARTIN, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. SILVA.

1. La determinazione degli elementi geometrici di una binaria visuale, disegnata che sia l'ellisse apparente, riesce spedita, come vedremo in seguito, nota che sia la posizione della linea dei nodi. Questa si identifica:

con l'asse maggiore dell'ellisse armonica del Thiele <sup>(2)</sup>;

con la bisettrice dell'angolo esterno a quello formato dalle congiungenti la stella principale con i due fuochi dell'ellisse apparente <sup>(3)</sup>;

con la parallela per la stella principale all'asse maggiore dell'ellisse ausiliaria dello Zwiers e del Russell <sup>(4)</sup>;

con una componente della coppia ortogonale nell'involuzione di raggi sopra il piano apparente ed avente per centro la stella principale <sup>(5)</sup>;

con la bisettrice dell'angolo formato dalle congiungenti la stella principale con gli estremi del segmento eguale alla proiezione del *latus rectum*, normale a detta proiezione e bisecato dalla proiezione dell'asse maggiore in un punto particolarmente determinato <sup>(6)</sup>;

con la parallela per la stella principale ad uno degli assi cartesiani ortogonali aventi per origine il centro dell'ellisse apparente e rispetto ai quali le coordinate  $x, y$  della proiezione del periastro e quelle  $\xi, \eta$  di un punto particolarmente determinato sul prolungamento della proiezione del semiasse minore soddisfano alla relazione  $xy + \xi\eta = 0$  <sup>(7)</sup>;

con la parallela per la stella principale a quel diametro dell'ellisse apparente che forma, con le perpendicolari condotte su di esso dagli estremi delle proiezioni dei semiassi e con queste proiezioni quali ipotenuse, due triangoli rettangoli le cui aree stanno fra loro nel rapporto  $1 - e^2$ , essendo  $e$  l'eccentricità dell'orbita vera <sup>(8)</sup>.

Secondo gli studi di altri autori <sup>(9)</sup> detta posizione può essere ancora definita in modo esprimibile meno sinteticamente dando però luogo a co-

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) THIELE « A. N. », 52, p. 39 (1859).

(3) MŁODZIEJOWSKI « Annales Obs. Moscou » II; II; p. 168 (1890).

(4) ZWIERS « A. N. », 139, p. 369 (1895); RUSSELL « A. J. », XIX, p. 9 (1898).

(5) PLUMMER « M. N. », LX, p. 485 (1900).

(6) JONCKHEERE « B. S. A. F. Année », 22, p. 540 (1908).

(7) COMSTOCK « A. J. », XXXIII, p. 139 (1921).

(8) PARVULESCO « Bulletin Obs. Lyon », X, p. 49 (1928).

(9) J. HERSCHELL « M. R. A. S. », V, p. 171 (1833); MEYERMANN « A. N. », 215, p. 179 (1921); LAVES « A. N. », 227, p. 321 (1926), ecc.

struzioni generalmente non più laboriose di quelle basate sulle definizioni enunciate. In alcuni dei metodi citati si richiede in tutto od in parte la preventiva conoscenza delle posizioni del centro dell'ellisse apparente, delle proiezioni degli assi e del *latus rectum* (o corda parametro) dell'orbita vera, delle lunghezze di dette proiezioni, dell'eccentricità dell'orbita vera.

Ci proponiamo di indicare in questa Nota anzitutto un ulteriore metodo di tracciamento della linea dei nodi che richiede la sola conoscenza dell'ellisse apparente e che a differenza dei metodi precedenti può, quando si voglia, essere ripetuto più volte, cambiando la corda dalla quale si deve iniziare la costruzione, così da attenuare nella media delle direzioni risultanti per la linea cercata le incertezze della costruzione grafica. In secondo luogo esponiamo, per il calcolo degli elementi geometrici dell'orbita vera, un procedimento molto semplice e per il quale bastano alcune misure prese sulla linea dei nodi e sulla corda ad essa ortogonale, qualunque sia il metodo che ha servito a tracciarle.

2. Ricordiamo le seguenti proprietà:

*a)* Il segmento finito intercetto sopra una tangente variabile di una conica da due tangenti fisse condotte per gli estremi di una corda focale è sempre visto dal fuoco sotto un angolo retto.

*b)* Fra tutte le coppie di corde focali ortogonali dell'ellisse vera soltanto quella contenente la linea dei nodi conserva la sua ortogonalità per proiezione sul piano apparente.

Proponiamoci di trovare la proiezione di detta coppia tracciata che sia l'orbita apparente e la posizione della stella principale A (Fig. 1). Se immaginiamo una corda focale dell'orbita vera, le due tangenti fisse negli estremi ed una tangente variabile, il tutto si proietta sul piano apparente secondo una corda passante per la stella principale A, e sia CD; due tangenti fisse all'ellisse apparente in C e D, e siano CQ e DQ; una tangente variabile sulla quale le tangenti fisse intercettano il segmento variabile XY che viene visto da A sotto un angolo pure variabile con la tangente stessa, a meno che il piano apparente non coincida con quello vero <sup>(1)</sup>. Per le proprietà *a)*, *b)* tale angolo sarà retto soltanto se la coppia AX, AY è la proiezione cercata. Pertanto:

*Tracciati, come in figura, CD, CQ, DQ e posto in A il vertice retto interno di una squadra facciamola ruotare intorno ad A finchè i lati interni della squadra intersecano le tangenti fisse in due punti T, U tali che il segmento TU risulti tangente all'ellisse. AT ed AU danno la soluzione propostaci* <sup>(2)</sup>.

(1) In questo caso  $i = 0$ ;  $\Omega$  ed  $\omega$  non hanno significato e gli elementi geometrici  $a$  ed  $e$  si ricavano direttamente dall'ellisse apparente poichè allora essa coincide con l'orbita vera. Ammetteremo quindi in seguito  $i > 0$ .

(2) Per lo scopo può anche servire un rapportatore in celluloido.







3. Siano:  $e$  l'eccentricità,  $a$  il semiasse maggiore,  $p$  il parametro ed  $r$  il raggio vettore dell'ellisse vera,  $d$  la distanza apparente (queste ultime quattro grandezze espresse in secondi d'arco) ed  $i$  l'inclinazione del piano vero sul piano apparente ( $0 < i < \frac{\pi}{2}$ ). Indichiamo: con  $I^o$  *Nodo* l'estremo della linea dei nodi (per ora non precisata fra le due componenti della coppia trovata) che per primo s'incontra lungo l'orbita apparente movendo da N (origine degli angoli di posizione) nel senso positivo, nel quale cioè crescono gli angoli di posizione, con  $II^o$  *Nodo* quello opposto al precedente, con  $I^o$  *Estremo* della corda ortogonale alla linea dei nodi quello che si incontra passando dal primo nodo al secondo nodo del detto senso positivo, con  $II^o$  *Estremo* quello opposto al precedente, con  $\omega$  la distanza angolare ( $0 \leq \omega < 2\pi$ ) dal primo nodo al periastro nel detto senso positivo lungo l'orbita vera, con  $v$  l'anomalia vera ( $0 \leq v < 2\pi$ ) misurata pure lungo l'orbita vera a partire dal periastro nel senso positivo (indipendentemente cioè dal senso del moto) ed infine con  $j$  l'angolo tra  $r$  e  $d$ . Abbiamo allora:

Posizione del compagno	$v$	$j$	$d = r \cos j$
I Nodo	$-\omega$	0	$p [1 + e \cos \omega]^{-1}$
II Nodo	$-\omega + \pi$	0	$p [1 - e \cos \omega]^{-1}$
I Estremo	$-\omega + \frac{1}{2} \pi$	$i$	$p \cos i [1 + e \sin \omega]^{-1}$
II Estremo	$-\omega + \frac{3}{2} \pi$	$i$	$p \cos i [1 - e \sin \omega]^{-1}$

Le prime due distanze danno come media armonica  $p$  mentre le seconde due danno  $p \cos i$ . Poichè  $p > p \cos i$  (avendo escluso  $i = 0$ ), delle due medie armoniche la maggiore è relativa alla linea dei nodi che viene con ciò precisata; detta media inoltre dà direttamente il valore del parametro. Il rapporto tra le due medie dà poi  $\sec i$  oppure  $\cos i$ . Per giunta il rapporto tra la differenza e la somma delle distanze relative al  $II^o$  ed al  $I^o$  *Nodo* dà  $e \cos \omega$  ed il rapporto analogo relativo al  $II^o$  ed al  $I^o$  *Estremo* dà  $e \sin \omega$  da cui  $\omega$  ed  $e$ .

4. Riepilogando: Ordinate, corrette, perequate le osservazioni riportiamo in grafico polare e disegniamo il percorso apparente in modo che sia un'ellisse secondo gli accorgimenti noti ai calcolatori d'orbite.

Costruiamo la coppia ortogonale di corde passanti per la stella principale come è detto e sottolineato al numero 2 (oppure la linea dei nodi valendoci di uno dei metodi citati al numero 1, e la sua ortogonale).

Misuriamo le due corde trovate ed i segmenti in cui esse vengono divise dalla stella principale. Calcoliamo le medie armoniche di detti segmenti per ciascuna corda o più semplicemente le metà di tali medie, cioè i rapporti tra il prodotto dei segmenti di una corda e l'intera corda. Il maggiore di tali rapporti corrisponde alla linea dei nodi. Per fissare le idee riferiamoci allora alla Fig. 2. Il primo estremo di detta linea che incontreremo a partire da N (origine degli angoli di posizione) verso Est, cioè nel senso positivo (freccia della figura) sarà il primo nodo e lo indicheremo con  $B_1$ , mentre indicheremo ordinatamente con  $B_2, B_3, B_4$  gli altri tre estremi della coppia che incontreremo successivamente. Avremo allora il formulario:

$$(1) \quad \rho_1 = \frac{AB_3 \cdot AB_1}{B_3 B_1} \quad (2) \quad \rho_2 = \frac{AB_4 \cdot AB_2}{B_4 B_2}$$

(e per le definizioni precedenti dev'essere  $\rho_1 > \rho_2$ )

$$(3) \quad \Omega = \widehat{NAB_1} < \pi \quad (4) \quad p = 2 \rho_1$$

$$(5) \quad \sec i = \frac{\rho_1}{\rho_2} > 1 \quad \text{oppure} \quad (5') \quad \cos i = \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$$

$$(6) \quad \tau_1 = \frac{AB_3 - AB_1}{B_3 B_1} \quad (7) \quad \tau_2 = \frac{AB_4 - AB_2}{B_4 B_2}$$

$$(8) \quad \tan \omega = \frac{\tau_2}{\tau_1} \quad (9) \quad e = \frac{\tau_1}{\cos \omega} = \frac{\tau_2}{\sin \omega} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}.$$

Dalla (8)  $\omega$  si ottiene senza ambiguità di quadrante poichè i segni di  $\tau_2$  e di  $\tau_1$  sono rispettivamente quelli di  $\sin \omega$  e di  $\cos \omega$ . Per chi usa contare  $\omega$  nel senso del moto, il valore cercato, quando il moto è retrogrado, è il supplemento a  $2\pi$  di quello trovato.

Se si usa il calcolo logaritmico conviene, avuto  $\omega$ , trovare  $\cos \omega$  oppure  $\sin \omega$  e valersi quindi per  $e$  della prima o della seconda espressione della (9). Se si usa il calcolo aritmetico serve la terza forma della (9) ricavando subito dalla (6) e (7)  $\tau_1^2 + \tau_2^2$ . Infine

$$(10) \quad a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{p}{1 - (\tau_1^2 + \tau_2^2)}$$

usando la prima o la seconda espressione rispettivamente per il primo o per il secondo dei due tipi di calcolo suddetti.

Se le tangenti fisse necessarie per la costruzione di cui al numero 2 si ottengono facendo ricorso alle proprietà dei diametri coniugati, il che

richiede la preventiva determinazione del centro  $C$  dell'ellisse apparente, la formula (9) può essere sostituita dalla (vedi Fig. 2)

$$(9') \quad e = \frac{CA}{CP}$$

la quale, dovuta a J. Herschell (loc. cit.), è comune si può dire a tutti i metodi che fanno ricorso, anche solo in parte, ad operazioni grafiche.

**Geofisica (Sismologia).** — *La presenza di onde lente nella fase preliminare di taluni sismogrammi.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio L. PALAZZO.

1. È noto come al momento di una commozione tellurica si considerino generate nel focolare sismico tre specie di onde terrestri: le prime, le più veloci, le così dette *longitudinali*, o *condensazionali*, contemplate nella teoria dell'elasticità dei corpi solidi e che sogliono indicarsi con  $P$ ; le seconde ( $S$ ) dotate d'una velocità circa metà, le *trasversali*, o *distorzionali* di detta teoria; e, infine, le terze ( $L$ ) ancor meno veloci, denominate *gravitazionali*, o anche *superficiali*, perchè appunto si propagano alla superficie del nostro globo al contrario delle altre che si trasmettono nel suo interno approssimativamente lungo le corde. L'insieme di queste tre specie d'onde costituisce il sismogramma, registrato da speciali strumenti, e quando sono bene conosciuti i tempi successivi di arrivo di ognuna di queste tre classi di onde, è possibile determinare la distanza da cui provengono, in base alle velocità note delle medesime.

In questa concezione, l'inizio del sismogramma è costituito dall'ingresso del treno di onde  $P$ , e quando queste sono già cessate, o in via di estinzione, subentra il treno delle  $S$ , e quando il tracciato è tornato tranquillo, o quasi, ecco che sopraggiungono le  $L$ , caratterizzate da un periodo oscillatorio assai più lento per rispetto alle precedenti <sup>(2)</sup>.

2. Come singolare anomalia alla regola, il Somville <sup>(3)</sup> ha annunciato il fatto di aver riscontrato per la prima volta un'onda di ben 24 secondi di periodo, che dava negli occhi, nel sismogramma ottenuto a Uccle (Brus-

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) A complicare alquanto le cose, si notano nella fase preliminare alcuni speciali rinforzi che si vuole siano dovuti a riflessioni delle  $P$  e  $S$  sia alla superficie terrestre (Wiechert) sia sopra strati profondi (Mohorovicic).

(3) *A propos d'une onde longue dans la première phase de quelques séismogrammes* («Gerland's Beiträge zur Geophysik», XXVII, 1930, p. 437).

selle) per il terremoto toscano del 9 settembre 1920 e che seguiva di poco l'inizio delle *P*.

Questo fatto straordinario egli ebbe di poi a rintracciare per altri cinque terremoti italiani avvenuti a distanze da 550 a 1370 Km., registrati a Uccle, all'osservatorio Taunus (Germania) ed a quello di De Bilt (Olanda)<sup>(1)</sup>. Siffatte onde, che si mostrano tra le *P* e le *S*, furono da lui indicate con *PL*, appunto per la loro vicinanza alle *P*. Egli terminò con la promessa di tornare sull'argomento, per vedere se siffatte onde si presentano anche per terremoti più distanti ed in altre direzioni.

Questa prima Nota del Somville richiamò l'attenzione del Landsberg<sup>(2)</sup> il quale riesaminando i sismogrammi dell'Osservatorio del Taunus, ebbe a riscontrare le *PL* per 17 terremoti avvenuti dal 1927 al 1930, dei quali ben 13 originati in Italia e, cioè, in direzione Sud, e gli altri 4 in diverse direzioni e precisamente in Tessaglia (Km. 1750), Algeri (Km. 1800), Asia M. (Km. 2060) e Islanda (Km. 2500).

La possibilità che le *PL* abbiano luogo per taluni terremoti anche provenienti da notevoli distanze e direzioni differenti dal Sud, venne confermata da una seconda Nota del Somville<sup>(3)</sup> nella quale si trova una lista di altri sette sismogrammi, ottenuti tra il 1913 e 1928 sia in Uccle che in altri Osservatori e per distanze da 1550 a 2340 Km. e direzioni diverse. Tanto egli quanto il Landsberg hanno indagato sul ritardo delle *PL* rispetto all'inizio della perturbazione e ne hanno tracciato l'*odografia* che rimane intermedio a quello delle *P* e *S*. Il Somville s'indugia poi nel ricercare se queste *PL* fossero per caso dovute alla riflessione delle stesse *P* sopra alcuni strati profondi della crosta terrestre, secondo la teoria del Mohorovicic, ma fa notare le difficoltà che si oppongono a questa spiegazione, e tra esse la più seria, quella derivante dal lungo periodo delle *PL* che può anche sorpassare i 30 secondi!

In una terza Nota il Somville<sup>(4)</sup> riporta altri dieci sismogrammi che mostrano le *PL* con periodi da 26 a 36 secondi e relative a terremoti con epicentro distante da 1380 a 2670 Km. e avvenuti dal 1910 al 1931; dice che le velocità con le quali si sono propagate in quelli dell'Atlantico Nord e dell'Islanda sono sistematicamente minori in confronto dei terremoti

(1) Riferisce il Somville che queste onde anormali furono registrate a Uccle, in occasione del terremoto di Avezzano del 1915, dal sismografo astatico « Wiechert » di 1000 Kg. e dotato di un periodo di 10-11 secondi, ma che passarono allora inosservate, e sarebbe stato necessario esserne prevenuti perchè avessero attirato l'attenzione, ed aggiunge che lo stesso strumento non le mostrò per altri terremoti meno violenti.

(2) *Beobachtungen zur P. L.-Welle* (« Gerland's Beiträge zur Geophysik », XXIX, 1931, p. 64).

(3) *A propos d'une onde longue dans la première phase de quelques séismogrammes* (« Gerland's Beiträge zur Geophysik », XXIX, 1931, p. 347).

(4) *Nouvelles observations sur l'onde PL* (Ivi, XXXIII, 1931, p. 31).



verificatisi nel Sud d'Europa, e aggiunge che per un terremoto dell'Islanda il Landsberg trovò una velocità di circa 6 Km. al secondo.

3. L'esistenza delle *PL* fu da me subito rilevata nell'esame dei sismogrammi dell'Osservatorio di Rocca di Papa, dovuti alla scossa disastrosa in Calabria dell'8 settembre 1905 e così pure in occasione dell'altro ancor più disastroso Calabro-Siculo del 28 dicembre 1908; e non mancai dal segnalare il singolare fenomeno in due Note, presentate a questa stessa Accademia nelle sedute del 4 e 18 aprile 1909<sup>(1)</sup>. Nel primo terremoto l'inizio della perturbazione era costituito di onde rispettivamente di 16<sup>s</sup> e 19<sup>s</sup> di periodo registrate da due sismografi non smorzati a pendolo verticale, con periodo strumentale di 4<sup>s</sup>, 2 e 2<sup>s</sup>, 4; e nel secondo terremoto i sismogrammi cominciarono con onde consimili (16<sup>s</sup> e 18<sup>s</sup> di periodo). In quest'ultimo, un pendolo orizzontale con forte smorzamento ad acqua e dotato di un periodo di 35<sup>s</sup>, tracciò un'onda iniziale di 17<sup>s</sup>; ed altro consimile, ma libero e con periodo di 26<sup>s</sup>, diè una lunga serie di onde strumentali a cominciare da un'ampiezza di ben 20<sup>mm</sup>, la quale non può essere giustificata se non da una notevole inclinazione lenta del suolo, dato il trascurabile ingrandimento del pendolo, di poco superiore a 1, e che sarebbe stato insufficiente a porre in sì grande evidenza l'arrivo delle *P*.

Nel gennaio 1910 ritornai sullo stesso argomento<sup>(2)</sup> per dimostrare che la mancanza della fase preliminare pel terremoto giapponese del 21 gennaio 1906, la quale aveva richiamato l'attenzione dell'Omori, era forse dovuta pure all'arrivo di onde lente fin dall'inizio della perturbazione, le quali produssero notevoli tracce nei pendoli orizzontali in uso nel Giappone.

4. Ma bisogna che io faccia risaltare l'importante circostanza che mentre nei terremoti da me considerati i sismogrammi s'iniziarono proprio con onde lente, invece, in quelli citati dal Somville e dal Landsberg, l'ingresso delle onde a lento periodo sarebbe avvenuto poco dopo le *P*, ed il ritardo aumenterebbe con la distanza dell'epicentro.

Esaminando però i vari sismogrammi da essi riportati, si ha l'impressione, più o meno vaga, che le onde lente abbiano potuto presentarsi fin dall'inizio della perturbazione, ma difficili ad essere riconosciute probabilmente a causa non solo della loro minore ampiezza iniziale e forse anche del maggiore periodo, ma altresì per la coesistenza di onde d'altra natura le quali tendono a mascherarle. A mio parere, l'inizio delle *PL* è posto dal

(1) *Importante particolarità nei sismogrammi del R. Osserv. Geod. di Rocca di Papa in occasione dei terremoti Calabri dell'8 settembre 1905 e 28 dicembre 1908* («Rend. della R. Acc. dei Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, XVIII, p. 339); *Alcune considerazioni sul meccanismo di propagazione delle onde sismiche* (Ivi, p. 393).

(2) *Intorno ai sismogrammi senza tremiti preliminari* («Boll. d. Soc. Sism. Ital.», XIV, 1910, p. 9).



Somville e dal Landsberg al momento che le medesime emergono con un sensibile rinforzo e si mostrano perciò più evidenti a causa dell'accresciuta loro ampiezza nonchè per la decrescenza delle altre più rapide coesistenti. Se si osserva con particolare attenzione il tratto dei sismogrammi che si trova tra il loro inizio e l'ingresso delle *PL*, quale è indicato nei facsimili riportati, s'intravede che le onde più rapide si mostrano sovrapposte ad altre più lente, come se nei singoli gruppi d'oscillazioni la posizione di riposo della penna scrivente si spostasse sensibilmente per effetto d'inclinazione del suolo, in modo da far variare rispetto ad esso la verticale ora in un senso ed ora in un altro, non altrimenti che delle onde lente si propagassero nella crosta terrestre, nel tempo stesso percorsa da rapide oscillazioni.

Questa mia ipotesi sarebbe avvalorata dal fatto che pel terremoto Calabro del 1905 il sismogramma di Gottinga — tracciato da un sismografo astatico « Wiechert » di 1200 Kg. e 13<sup>s</sup> di periodo, alla distanza di ben 1492 Km. dall'epicentro — cominciò con un'onda di ben 25<sup>s</sup> di periodo<sup>(1)</sup>; e così pure da quanto ebbe a scrivermi in proposito il principe Galitzine, cioè, che pel terremoto Calabro-Siculo del 1908, la perturbazione cominciò a Pulkowa, alla distanza di ben 2614 Km., con onde lente. E infatti il sismogramma ottenuto colà con un pendolo orizzontale del tipo « Zöllner » a registrazione fotografica, ridotto quasi aperiodico ed a forte smorzamento, si vede cominciare con onde di 23<sup>s</sup> di periodo, frastagliate da altre più rapide<sup>(2)</sup>.

Questo modo di vedere sarebbe appoggiato ancora dall'importante circostanza che mentre il Landsberg trovò per le *PL* una velocità di circa 6000 metri al secondo per un terremoto proveniente dall'Islanda (Km. 2500) e il Somville riscontrò una velocità di poco superiore, e, cioè: m. 6242 (media per i dieci terremoti della sua terza Nota) io trovai una velocità più notevole (m. 7500 circa) per le onde lente con le quali s'iniziarono i sismogrammi di Rocca di Papa per ambedue i terremoti Calabri del 1905 e 1908, velocità che compete alle *P* e che resta confermata da quella (m. 7610) che si ottenne per Gottinga per il primo terremoto Calabro, e da quella di più di 8000 metri che si riscontrò per Pulkowa nel secondo terremoto Calabro, sebbene queste due località si trovino distanti dall'epicentro rispettivamente per 1492 e 2614 Km. A queste distanze, le *PL* considerate dal Somville e dal Landsberg, si sarebbero invece mostrate con notevole ritardo per rispetto alle *P*.

5. Passo ora a considerare più da vicino il *periodo* delle onde anormali in questione. Abbiamo visto che quello da me trovato per Rocca di Papa

(1) *Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1905.*

(2) B. GALITZIN, *Das Sicilianische Erdbeben am 28. Dec. 1908 nach den Aufzeichnungen der Pulkowa'schen seismischen Station* (« Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. de St. Pétersbourg », 1909).

nei terremoti Calabri del 1905 e 1908 si aggira sui 18<sup>s</sup>, registrato da sismografi dotati di un periodo piuttosto rapido (2<sup>s</sup>, 5 e 4<sup>s</sup>, 2). Il Landsberg ha ottenuto valori che oscillano da 17<sup>s</sup> a 25<sup>s</sup> (valore medio 20<sup>s</sup> circa); il Galitzine trovò un periodo di 23<sup>s</sup> per l'onda iniziale del sismogramma di Pulkowa relativo al sismo Calabro del 1908; l'Angenheister un periodo di 25<sup>s</sup> per l'inizio del sismogramma di Gottinga dovuto al sismo Calabro del 1905; il Somville ha riportato per le *PL*, nella sua seconda Nota, periodi che vanno da 24<sup>s</sup> a 32<sup>s</sup> (valore medio 28), e nella terza Nota periodi che variano da 26 a 36 (valore medio 30<sup>s</sup>).

Certamente a produrre sì grande varietà nel periodo delle onde in questione, può aver concorso la diversa genesi dei terremoti, come pure la diversa natura degli strati terrestri attraversati e la più o meno grande distanza dell'epicentro, ma io penso che forse la maggiore influenza debba attribuirsi alla diversità degli strumenti adoperati nelle varie stazioni. Infatti, i sismografi di Rocca di Papa erano costituiti da pendoli verticali, non smorzati e oscillanti con periodi piuttosto rapidi e quindi molto diversi da quelli delle onde lente da misurare; il sismografo di Gottinga, con smorzamento ad aria, aveva un periodo di soli 10<sup>s</sup>–11<sup>s</sup>; quelli delle altre località, citate dal Somville e Landsberg, erano pendoli orizzontali « Galitzine » fortemente smorzati con magneti e dotati di un periodo proprio di circa 24<sup>s</sup>, che si avvicina assai di più a quello attribuito alle *PL*; e infine il pendolo orizzontale « Zöllner » di Pulkowa, pure a smorzamento magnetico, era aperiodico.

Ma è risaputo che lo smorzamento agisce fino ad un certo punto nell'impedire che i tracciati sismografici risentano del periodo strumentale, tanto che due sismografi identici, posti nella stessa direzione e sullo stesso pilastro, ma di periodo differente, sebbene entrambi dotati di smorzamento, danno tracciati che spesso non mostrano alcuna rassomiglianza<sup>(1)</sup>; e che il prof. Rothé, al Congresso internazionale Geodetico e Geofisico di Praga del settembre 1927, a proposito di una discussione sulla scelta di apparecchi sismometrici, ebbe a concludere: essere impossibile avere un sismografo che abbracci ugualmente bene tutta la gamma sismica, donde il suggerimento che le stazioni siano provviste di almeno due pendoli: l'uno per le onde rapide e l'altro per le onde lente<sup>(2)</sup>. Non è questo un principio di resipiscenza circa l'utilità del *dissincronismo*, nella sismometria, indipendentemente dallo smorzamento?

(1) Rimando su ciò alle Memorie del GUTENBERG, LANDSBERG e SOMVILLE pubblicate in « Gerland's Beiträge zur Geophysik » (XXV, 1930, p. 74–XXIX, 1931, p. 64 e 347).

(2) E. ODDONE, *I lavori della Sezione sismologica alla terza Assemblea generale dell'Unione Geodetico-Geofisica internazionale in Praga dal 3 al 10 settembre 1927* (« Boll. della Soc. Sism. Ital. », XXVII, 1927, p. 141).

6. A proposito di queste anormalissime onde lente che, contrariamente all'attuale teoria, si presentano all'inizio di taluni sismogrammi, ho creduto interessante ricordare le osservazioni fatte da me, dall'Angenheister e dal Galitzine in occasione dei terremoti di Calabria del 1905 e 1908, ben lieto se le medesime potranno contribuire a gettare un po' di luce sulla natura delle *PL*. Sulla loro genesi ebbi già occasione a intrattenermi vagamente nella seconda delle mie Memorie sopra indicate e che senza dubbio sono sfuggite all'attenzione del Landsberg e del Somville. Una discussione approfondita su queste *PL* sarà molto utile, e non mancherà di allargare e magari modificare le nostre attuali idee sul meccanismo di propagazione dei terremoti.

**Fisica** (Fisica atomica). — *Su una serie perturbata dello spettro dell'alluminio ionizzato*. Nota di L. PINCHERLE, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica** (Fisica teorica). — *Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta*. Nota di P. STRANEO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica**. — *Nuovi composti complessi del cianuro di argento col cianuro di sodio*<sup>(1)</sup>. Nota di G. A. BARBIERI e A. TETTMANZI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corresp. M. BETTI.

G. Bodländer e W. Eberlein<sup>(3)</sup> misurando la forza elettromotrice di pile di concentrazione formate da soluzioni aventi eguale concentrazione in argento-cianuro potassico e concentrazione diversa in cianuro potassico, poterono giungere alla conclusione che nelle soluzioni concentrate di argento-cianuro che contengono un grande eccesso di cianuro potassico esistono degli anioni  $\text{Ag}(\text{CN})_3''$  e forse anche degli anioni  $\text{Ag}(\text{CN})_4'''$ .

Questo risultato è molto interessante giacchè è ben noto che da tutte le soluzioni che contengono il cianuro di argento combinato col cianuro di potassio, anche da quelle in cui quest'ultimo è in grande eccesso, cristallizza per evaporazione un unico sale complesso:  $\text{KAg}(\text{CN})_2$ .

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(3) «Z. f. anorg. Chem.» 39, 222 (1904).

In una Nota <sup>(1)</sup> precedente uno di noi, con E. Parisi, descrisse la preparazione dei seguenti prodotti di addizione di argentocianuri con l'esametilentetrammina:



e per la prima volta venne constatata, in composti cristallizzati, la presenza del complesso  $\text{Ag}(\text{CN})_3$  di cui Bodländer e Eberlein avevano affermata l'esistenza in soluzione.

Mediante ricerche ulteriori, che vengono riferite in questa Nota, noi abbiamo potuto accertare che il cianuro di argento può formare col cianuro di sodio, oltre al composto  $\text{NaAg}(\text{CN})_2$  descritto da Baup <sup>(2)</sup>, i seguenti composti:  $\text{Na}_2 \text{Ag}(\text{CN})_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{Na}_3 \text{Ag}(\text{CN})_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  che sono isolabili allo stato solido in cristalli che presentano forme caratteristiche.

Siamo stati indotti a compiere tali ricerche dalla seguente osservazione accidentale. Durante la preparazione di forti quantità di  $\text{NaAg}(\text{CN})_2$  nella quale era stato impiegato un eccesso di cianuro di sodio greggio (il così detto cianuro di potassio commerciale fuso) abbiamo notato che, mentre le prime cristallizzazioni avevano l'aspetto normale dell'argentocianuro di sodio, cioè erano in piccole squamette lucenti, le cristallizzazioni che si ottenevano dalle acque madri — previa concentrazione — avevano un aspetto notevolmente diverso, ed esaminate al microscopio non apparivano omogenee, ma risultavano costituite, oltre che di squamette, di lunghi prismi. All'analisi qualitativa si riconobbero in tale prodotto, seccato all'aria, soltanto argento, sodio, CN, ed acqua. All'analisi quantitativa risultò di composizione anormale: per un atomo di argento si trovarono 1,6 atomi di sodio e 2,6 gruppi CN. Questi risultati provavano chiaramente che si trattava della miscela di almeno due sostanze e ci fecero supporre che la sostanza cristallizzata in aghi — la quale certamente aveva preso origine in causa dell'eccesso di cianuro di sodio presente nella soluzione — potesse essere un argento-cianuro contenente il complesso  $\text{Ag}(\text{CN})_3$  o  $\text{Ag}(\text{CN})_4$  e se ne tentò la preparazione allo stato di purezza e in condizioni ben determinate.

Gr. 10 di cianuro di sodio Kahlbaum vennero sciolti in 25 cc. di acqua e nella soluzione scaldata all'ebollizione si introdussero gr. 5 di  $\text{NaAg}(\text{CN})_2$  cristallizzato in squamette. Dal liquido limpido si separò per raffreddamento una sostanza omogenea in prismi jalini lunghi parecchi centimetri che, ad un esame più minuto, risultarono associazioni parallele di cristalli di abito prismatico molto allungato (aciculare) con nette sfaldature

(1) G. A. BARBIERI, E. PARISI, «Ber.», 60, 2418 (1927).

(2) «Ann. Chim. Phys.», [3] 53, 465 (1858).



parallelamente all'asse dell'allungamento dei cristalli. Essi vennero spremuti alla pompa e asciugati rapidamente fra carta da filtro. All'aria secca, e più rapidamente nel vuoto su acido solforico, i cristalli perdono la loro lucentezza e trasparenza e assumono aspetto lattiginoso. Si tratta della perdita dell'acqua di cristallizzazione che avviene anche a temperatura ordinaria.

Esaminati al microscopio, i cristalli risultano uniassici con carattere ottico negativo, dotati di alta birifrangenza e di alto indice di rifrazione. L'analisi diede i seguenti risultati:

trovato %	Ag 37.52 — N 14.85 — Na 16.20 — H <sub>2</sub> O 18.56
calcolato per	
Na <sub>2</sub> Ag(CN) <sub>3</sub> · 3H <sub>2</sub> O	Ag 37.73 — N 14.70 — Na 16.09 — H <sub>2</sub> O 18.89.

Questo argentocianuro è solubilissimo in acqua nella quale si dissocia parzialmente secondo l'equazione:



Ciò è provato dalla seguente esperienza:

Gr. 20 di Na<sub>2</sub>Ag(CN)<sub>3</sub> · 3H<sub>2</sub>O vennero sciolti a caldo in cc. 35 di acqua all'ebollizione; per raffreddamento della soluzione cristallizzò una sostanza omogenea in squamette che all'analisi venne identificata per NaAg(CN)<sub>2</sub>. Dall'acqua madre, ridotta per evaporazione al volume di cc. 17, si separarono dei cristalli prismatici e poche squamette. Dalla seconda acqua madre, ridotta al volume di cc. 12, cristallizzarono soltanto dei prismi allungati che vennero identificati, mediante l'analisi, per Na<sub>2</sub>Ag(CN)<sub>3</sub> · 3H<sub>2</sub>O.

Da una soluzione concentratissima di Na<sub>2</sub>Ag(CN)<sub>3</sub> addizionata a caldo, fino a saturazione, di cianuro di sodio in sostanza e poi filtrata, si separò per raffreddamento una bella sostanza cristallizzata in prismi esagonali bipyramidati, che all'esame microscopico risultarono omogenei e con caratteri ottici diversi da quelli del composto precedente.

L'esame microscopico permise inoltre di escludere la presenza di cristalli di NaCN che, com'è noto, sono isotropi.

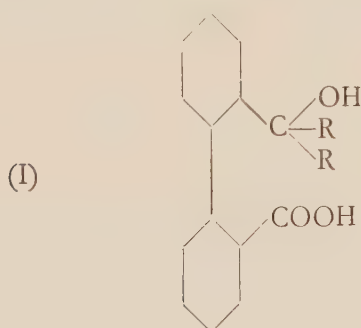
La nuova sostanza diede all'analisi i seguenti risultati:

trovato %	Ag 28.83 — N 14.90 — Na 18.62 — H <sub>2</sub> O 24.18
calcolato per	
Na <sub>3</sub> Ag(CN) <sub>4</sub> · 5H <sub>2</sub> O	Ag 29.08 — N 15.11 — Na 18.56 — H <sub>2</sub> O 24.27.



**Chimica.** — *Sulla stereoisomeria dei derivati 2,2'-disostituiti del difenile* <sup>(1)</sup>. Nota II di A. CORBELLINI e M. ANGELETTI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. CAMBI.

In una recente Nota uno di noi con C. Pizzi <sup>(3)</sup> ha studiato la scissione in antipodi ottici dell'acido 2-[bis-fenil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico appartenente alla serie di composti del tipo (I) (R=fenile).



Si era trovato che cristallizzando frazionatamente il sale di brucina del predetto acido si ottiene una prima frazione destrogira ed una seconda frazione levogira e che tanto esse quanto gli acidi attivi provenienti dalla loro scissione si racemizzano facilmente già a temperatura ordinaria.

Proseguendo in queste ricerche sui composti del tipo (I) abbiamo ritenuto interessante indagare il comportamento dell'acido 2-[bis-metil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico (R = metile).

Non era infatti prevedibile se la sostituzione di due gruppi fenilici con due metilici, aventi evidentemente un volume minore, avrebbe ancora impedita nel composto difenilico la rotazione di un nucleo benzenico rispetto all'altro, tanto più che la facile racemizzabilità dell'acido *d*-2-[bis-fenil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico e del suo sale di brucina lasciava già supporre un debole ostacolo alla rotazione.

Il caso dell'acido 2-[bis-metil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico era quindi interessante poichè era incerta la possibilità di scinderlo in antipodi ottici.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(3) A. CORBELLINI e C. PIZZI, questi « Rendiconti », XV, [6], 287 (1932).

Questo acido si ottiene per reazione fra l'anidride difenica e lo ioduro di metilmagnesio. Esso si purifica trasformandolo nel suo lattone (p. f. 123°) e da questo si passa mediante saponificazione nuovamente all'acido (p. f. 137°).

Cristallizzando frazionatamente dall'alcool il suo sale di brucina si ottiene una prima frazione levogira (p. f. 217°; in soluzione cloroformica  $[\alpha]_D^{24} = -35^{\circ}.35$ ). Evaporando a secco a temperatura ordinaria l'alcool madre si ottiene una seconda frazione pure levogira (p. f. 214°; in cloroformio  $[\alpha]_D^{24} = -33^{\circ}.49$ ).

I sali delle due frazioni in soluzione cloroformica sono instabili a temperatura ordinaria; il loro potere rotatorio va diminuendo con il tempo e tende al valore del potere rotatorio del sale del racemico (in soluzione cloroformica  $[\alpha]_D^{25} = -1^{\circ}.87$ ).

Scindendo a freddo il sale della prima frazione si ottiene un acido sinistrorso (in cloroformio  $[\alpha]_D^{25} = -1^{\circ}.88$ ) il quale pure si racemizza facilmente già a temperatura ordinaria.

Come si è detto per l'acido 2-[bis-fenil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico per cristallizzazione frazionata del sale del racemico si ottiene anche in questo caso in maggior quantità il sale sinistro, meno solubile, per effetto dell'equilibrio



La composizione della seconda frazione è qui prevalentemente sinistra per effetto dell'alta velocità di racemizzazione (maggiore dell'analogo composto difenilico) in relazione alla solubilità del sale sinistro ed alla velocità di evaporazione del solvente.

Gli altri composti del tipo (I) (R = etil, propil, butil, o-, m-, p-, toli,  $\alpha$ -,  $\beta$ -naftil, ecc.) non si possono preparare in modo analogo ai precedenti per reazione fra i corrispondenti alogenuri di magnesio e l'anidride difenica poichè questa reagisce solamente in piccolissima parte.

L'acido 2-[bis-etil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico venne invece ottenuto facendo reagire lo ioduro di metilmagnesio con l'etere monoetilico dell'acido difenico. Esso si purifica al solito attraverso il lattone (p. f. 137°).

Proseguiamo con questo metodo alla preparazione dei composti analoghi e comunicheremo prossimamente il risultato dei tentativi di scissione in antipodi ottici.

Questi risultati attestano la complessità dei fenomeni di isomeria dei derivati difenilici. Essa supera probabilmente gli schemi fin qui proposti ed induce ad approfondire le ricerche in questo campo.

PARTE SPERIMENTALE.

*Acido 2-[bis-metil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico.*

Alla sospensione di 10 gr. (1 mol.) di anidride difenica<sup>(1)</sup> in 180 cmc. di etere assoluto (posta in un pallone munito di refrigerante a ricadere e di imbuto a rubinetto) si aggiungono 5.12 gr. di magnesio in trucioli e gradualmente 26.7 gr. (4 mol.) di ioduro di metile diluiti con etere assoluto (40 cmc.).

La reazione si inizia vivacemente e l'etere entra in ebollizione. Quando tutto lo ioduro è stato introdotto e la reazione si è moderata si riscalda la sospensione moderatamente all'ebollizione per quattro-cinque ore.

Si decompone il prodotto di reazione, che forma un deposito pastoso sul fondo del recipiente, aggiungendo ghiaccio e acido acetico diluito (corrispondente a 15 gr. di acido glaciale) con che esso passa completamente in soluzione. Si separa lo strato eterico e si estrae ripetutamente lo strato acquoso con etere.

Gli estratti eterici si sbattono ripetutamente con idrato sodico al 5% e gli estratti alcalini si acidificano raffreddando con acido acetico con che si separa bianco fioccoso l'acido 2-[bis-metil-ossimetil]-2'-difenil-carbossilico.

Il prodotto greggio (gr. 9.30; p. f. 128°) si scioglie in poco alcool etilico e si tratta la soluzione alcoolica calda per brevissimo tempo con una corrente di acido cloridico gassoso. Per raffreddamento si separa cristallino il lattone dell'acido; ricristallizzandolo ripetutamente da alcool si ottiene il composto puro in grossi cristalli bianchi fondenti a 123°.

L'esame goniometrico dei cristalli eseguito dal prof. A. Ferrari della R. Università di Milano dimostra che si tratta di cristalli triclini aventi le seguenti caratteristiche:

$$a : b : c = 0.4357 : 1 : 0.5534;$$

$$\alpha = 81^{\circ}.36 \quad ; \quad \beta = 93^{\circ}.37 \quad ; \quad \gamma = 98^{\circ}.53.$$

La microanalisi ha fornito:

	trovato	%	C 80.55	H 5.99
per C <sub>16</sub> H <sub>14</sub> O <sub>2</sub>	calcolato	%	80.63	5.93.

Il lattone è solubile in cloroformio e benzolo, meno in etere ed alcool.

(1) Preparata dal fenantrene secondo G. CHARRIER e A. BERRETTA, «Gazz. Chim. Ital.», 54, 765 (1924).

Esso si può anche ottenere riscaldando l'acido per breve tempo con anidride acetica; dalla soluzione per raffreddamento esso si separa in grossi cristalli bianchi.

La saponificazione del lattone ha luogo bollendolo per breve tempo con potassa alcoolica (lattone gr. 2, alcool etilico 95° cmc. 8, idrato potassico gr. 0.7, acqua cmc. 1) fin quando un campione della soluzione non precipita più per diluizione con acqua. Si evapora fin quasi a secco la soluzione alcoolica, si riprende il residuo con acqua e dopo eventuale filtrazione si precipita raffreddando la soluzione con acido acetico diluito. Da 2 gr. di lattone si ottengono 1.24 gr. di acido fondente a 137°.

L'acido è discretamente solubile in acqua bollente e facilmente nella maggior parte dei solventi organici.

Ricristallizzando l'acido da alcool diluito con egual volume di acqua si separa in aghetti bianchi un composto fondente a 130°. Esso non è completamente solubile in carbonato sodico ed il residuo, in piccola quantità, è costituito da lattone (p. f. 123°).

La soluzione eterea già estratta con alcali viene lavata sbattendola con acqua e dopo essiccamento su solfato sodico anidro si distilla il solvente. Il residuo oleoso lievemente bruno lasciato in essicatore a vuoto si riprende parzialmente separando un prodotto cristallino che si riesce ad isolare mediante trattamento con poco etere. Esso fonde a 121°, e ricristallizzato ripetutamente da alcool eleva il suo punto di fusione a 123°. Il suo punto di fusione ed il fatto che trattandolo con potassa alcoolica, come è stato indicato precedentemente, dà luogo ad un acido fondente a 137°, dimostra che si tratta del lattone dell'acido 2-[bis-metil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico.

*Scissione dell'acido.* Ad una soluzione di 6.15 (1 mol.) di brucina anidra in 50 cmc. di alcool si aggiungono 4 gr. (1 mol.) di acido 2[bis-metil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico. Si bolle per breve tempo e si filtra la soluzione.

Per raffreddamento si separa la prima frazione del sale di brucina (gr. 8.45; p. f. 217°); evaporando a secco l'alcool madre in essicatore a vuoto su acido solforico si ottiene una seconda frazione (gr. 1.33 p. f. 214°).

La microdeterminazione dell'azoto nelle due frazioni ha fornito:

I frazione	trovato	%	4.38
II    »	»	%	4.15
per $C_{39}H_{42}O_7N_2$	calcolato	%	4.31;

ed il loro potere rotatorio in soluzione cloroformica misurato appena fatta la soluzione risulta:

I frazione	$[\alpha]_D^{24} = (-0^\circ, 59.100) : (1,6680.1) = -35^\circ.35$
II    »	$[\alpha]_D^{24} = (-0^\circ, 64.100) : (1,9112.1) = -33^\circ.49.$

Il potere rotatorio delle due soluzioni va diminuendo con il tempo; dopo 64 ore vennero osservati i seguenti valori:

$$\begin{array}{ll} \text{I frazione} & [\alpha]_D^{25^\circ} = (-0^\circ,04.100) : (1,6688.1) = -2^\circ.39 \\ \text{II »} & [\alpha]_D^{25^\circ} = (-0^\circ,04.100) : (1,9112.1) = -2^\circ.09. \end{array}$$

Essi tendono evidentemente al valore del potere rotatorio del sale di brucina della miscela racemica che dalla misura di una soluzione di 0.2420 gr. di brucina anidra e 0.1575 di acido in 24 cmc. di cloroformio risulta essere:

$$[\alpha]_D^{25^\circ} = (-0^\circ,03.100) : (1,5980.1) = -1.88^\circ.$$

La racemizzazione della prima frazione è praticamente completa riscaldando la sua soluzione cloroformica per circa tre ore all'ebollizione. Infatti il suo potere rotatorio è diminuito a

$$[\alpha]_D^{24^\circ} = (-0^\circ,03.100) : (1,6000.1) = -1.87^\circ.$$

La scissione del sale di brucina si effettua sciogliendolo a temperatura ordinaria nella minore quantità possibile di anilina e trattando la soluzione con acido cloridrico diluito ghiacciato. La parte insolubile costituita dall'acido attivo viene lavata parecchie volte prima con acido cloridrico diluito poi con acqua e si asciuga in essiccatore.

L'acido attivo proveniente dalla prima frazione (gr. 0.20 da gr. 1 di sale; p. f. 126°) in soluzione cloroformica ha il seguente potere rotatorio:

$$[\alpha]_D^{24^\circ} = (-0^\circ,24.100) : (0,5656.2) = -21^\circ.21.$$

Esso va diminuendo con il tempo e dopo circa tre giorni si annulla.

*Acido 2-[bis-etil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico.*

L'anidride difenica sospesa in etere assoluto reagisce solamente superficialmente con lo ioduro di etilmagnesio. Precipitando con acido cloridrico gli estratti alcalini ottenuti come è detto precedentemente si separa acido difenico.

L'acido 2-[bis-etil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico si ottiene operando con l'etere monoetilico dell'acido difenico.

La soluzione di 18 gr. (1 mol.) di questo composto<sup>(1)</sup> in 200 cmc. di etere assoluto si fa reagire con 7.30 gr. di magnesio e 42 gr. (4 mol.) di ioduro etilico seguendo le stesse modalità indicate per il caso precedente.

(1) Ottenuto per reazione fra l'anidride difenica e l'alcool assoluto secondo H. W. UNDERWOOD, Jr. e E. L. KOCHMANN, « Am. Chem. Soc. », 46, 2073 (1924).



Gli estratti alcalini si concentrano a bagno maria a piccolo volume; per raffreddamento si separa il sale sodico in cristalli bianchi setacei. Il sale separato per filtrazione si scioglie in poca acqua e dalla soluzione si precipita raffreddando l'acido 2-[bis-etil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico mediante acidificazione con acido acetico. Una ulteriore quantità di acido si ottiene dalle acque madri.

Il prodotto greggio (5 gr.; p. f. 98°) si purifica trasformandolo nel suo lattone trattando la sua soluzione alcoolica con acido cloridrico gassoso. Ricristallizzato ripetutamente da alcool si presenta in lamine quadrate fondenti a 137°.

Alla microanalisi si è avuto:

	trovato	%	C 81.29	H 6.92
per C <sub>18</sub> H <sub>18</sub> O <sub>2</sub>	calcolato	%	81.16	6.82.

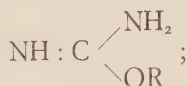
Esso si può ottenere dall'acido anche mediante trattamento con anidride acetica.

L'acido 2-[bis-etil-ossimetil]-2'-difenilcarbossilico si ottiene saponificando il suo lattone operando come nel caso precedente. Esso fonde a 140°-141°.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *La suscettibilità magnetica delle uree, delle isouree e della solfammidè* <sup>(1)</sup>. Nota di G. DEVOTO, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L CAMBI.

In relazione alle ricerche sul comportamento polare dell'urea e di alcune uree sostituite in soluzione acquosa <sup>(3)</sup>, era di qualche interesse vedere se anche nel comportamento magnetico allo stato solido si potesse rivelare qualche indizio che chiarisse ulteriormente la questione.

Ho a questo scopo misurato i valori del diamagnetismo non solo per varie uree sostituite — qualche valore era già stato ottenuto da Pascal <sup>(4)</sup> — ma bensì anche per le isouree preparate da Stieglitz <sup>(5)</sup>



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1932.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 520 (1930); 61, p. 898 (1931).

(4) « Comptes rendus », 182, p. 215 (1926).

(5) « Berichte », 33, p. 807 (1900).

e questo allo scopo di aver dati di confronto con la carbammide, per la quale è ormai accertata allo stato solido la forma simmetrica <sup>(1)</sup>. I dati della solfammide erano interessanti per la sua somiglianza con l'urea.

I risultati sperimentali hanno solo condotto a rilevare ancora una volta la trascurabile importanza percentuale che bene spesso i fenomeni di isomeria hanno, rispetto al diamagnetismo, di fronte al fattore fondamentale della formula chimica bruta; e non si è potuto così portare un apprezzabile contributo alla questione.

Basti ad esempio considerare i valori ottenuti per i quattro composti:

	$\chi_{mol} \cdot 10^6$
$\text{CO} \begin{cases} \text{NHC}_2\text{H}_5 \\ \text{NH}_2 \end{cases} \dots \dots \dots$	— 55.5
$\text{NH} : \text{C} \begin{cases} \text{NH}_2 \\ \text{OC}_2\text{H}_5 \end{cases} \dots \dots \dots$	— 54.7
$\text{CO} \begin{cases} \text{NHCH}_3 \\ \text{NHCH}_3 \end{cases} \dots \dots \dots$	— 56.3
$\text{CO} \begin{cases} \text{N}(\text{CH}_3)_2 \\ \text{NH}_2 \end{cases} \dots \dots \dots$	— 55.1.

Le differenze che si riscontrano, se pur superiori ai limiti d'errore della lettura, non li oltrepassano tuttavia largamente.

Può essere che, con campi magnetici più intensi, si arrivino a rendere ben netti questi fenomeni, solo appena accennati, di esaltazione; ma si tratterà sempre di fenomeni di secondo ordine.

#### PARTE SPERIMENTALE.

L'apparecchio usato è quello descritto per altre ricerche già compiute presso questo Istituto <sup>(2)</sup>. Nessuna modificazione di importanza è stata adottata: solamente l'intraferro è stato portato a 10 mm.

Accorgimenti speciali hanno richiesto le isouree data la loro straordinaria igroscopicità. È stato necessario distillare direttamente sotto vuoto spinto, le sostanze nel tubo di misura. Superate alcune difficoltà, il sistema adottato si è dimostrato perfettamente rispondente allo scopo.

(1) WICKOFF, « Ztschr. f. Kristallogr. », 81, p. 102 (1932).

(2) SZEGÖ e OSTINELLI, « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 926 (1930).

Per ciò che riguarda le sostanze che hanno servito alle misure, accennerò che le dimetiluree e la tetraetilurea erano prodotti del commercio purificati rispettivamente per ricristallizzazione e per ridistillazione. Le uree monosostituite vennero direttamente ottenute da cianato ed ammina; le isouree si ottennero da cianammide anidra e alcool modificando leggermente il metodo di Stieglitz<sup>(1)</sup>; la solfammide infine era il prodotto già usato da me per altre ricerche<sup>(2)</sup>.

Ed ecco i valori ottenuti, media generalmente di tre misure su sostanza ogni volta rinnovata:

	$\chi_{\text{mol}} 10^6$	peso specifico
$\text{CO}(\text{NH}_2)_2$	— 33.4	1.33
$\text{CO} \begin{cases} \text{NHCH}_3 \\ \text{NH}_2 \end{cases}$	— 42.4	1.20
$\text{CO} \begin{cases} \text{NHC}_2\text{H}_5 \\ \text{NH}_2 \end{cases}$	— 55.5	1.21
$\text{CO} \begin{cases} \text{NHC}_3\text{H}_7 \\ \text{NH}_2 \end{cases}$	— 67.4	1.18
$\text{CO} \begin{cases} \text{NHCH}_3 \\ \text{NHCH}_3 \end{cases}$	— 56.3	1.14
$\text{CO} \begin{cases} \text{N}(\text{CH}_3)_2 \\ \text{NH}_2 \end{cases}$	— 55.1	1.25
$\text{CO} \begin{cases} \text{N}(\text{C}_2\text{H}_5)_2 \\ \text{N}(\text{C}_2\text{H}_5)_2 \end{cases}$	— 122.4	0.902
$\text{NH} : \text{C} \begin{cases} \text{OCH}_3 \\ \text{NH}_2 \end{cases}$	— 43.7	1.19
$\text{NH} : \text{C} \begin{cases} \text{OC}_2\text{H}_5 \\ \text{NH}_2 \end{cases}$	— 54.7	1.14
$\text{SO}_2(\text{NH}_2)_2$	— 44.4	1.80.

(1) « Berichte », 33, p. 1517 (1900).

(2) « Rend. Acc. Lincei », XIV, 6<sup>a</sup>, p. 432 (1931).

Alcuni dei valori dei pesi specifici non erano ancora noti: il peso specifico della solfammina è stato determinato da Ferrari, sul prodotto da me preparato, in connessione con altre ricerche <sup>(1)</sup>.

Oltre naturalmente l'urea, Pascal ha studiato dal punto di vista di suscettibilità magnetica, anche la metilurea e la tetraetilurea: per quanto si possa giudicare dai dati indiretti che egli dà, l'accordo è buono <sup>(2)</sup>.

Ringrazio vivamente il laureando Gino Zoccolini che ha eseguito buona parte del lavoro sperimentale.

**Chimica.** — *Sopra una costante strutturale relativa ai passaggi di stato.* Nota di R. BIGAZZI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica fisiologica). — *Raffronti tra il valore ricostruttivo di alcuni legumi e quello del grano.* Nota di V. FAMIANI e V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Il trifenilfosfato come solvente in crioscopia* <sup>(3)</sup>. Nota I di F. GARELLI e G. RACCIU, presentata <sup>(4)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

Il trifenilfosfato  $(C_6H_5)_3PO_4$  fu ottenuto per la prima volta da Schrugmann <sup>(5)</sup> per azione del pentacloruro di fosforo sul fenolo, poscia da Schiapparelli <sup>(6)</sup>.

Viene ora preparato industrialmente dalla I. G. per azione dell'ossicloruro di fosforo sul fenolato sodico e fa parte di quella numerosa classe di composti che, per le loro proprietà solventi, plastificanti, hanno ricevuto molteplici applicazioni nell'industria del celluloido, delle masse plastiche e in quella degli esplosivi come stabilizzanti.

Il prodotto tecnico viene fornito, in qualsiasi quantità, già notevolmente puro e si presenta come una sostanza bianca, cristallizzata, che fonde tra 49°–50° C., congela fra 48° e 48.5, bolle a 244° C. alla pressione di

(1) Non ancora pubblicate.

(2) Loc. cit.

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

(4) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(5) SCHRUGMANN, « Ann. », 92, 317.

(6) SCHIAPPARELLI, « G. », 11, 69.

10 mm. di mercurio e si accende solo a 225°. È insolubile nell'acqua, quasi insolubile nell'etere di petrolio, ma è solubilissimo nell'alcool e negli altri solventi organici. Esso discioglie molti corpi e considerando che tale solvente si può avere puro, a poco prezzo, in qualsiasi quantità, che congela a temperatura assai comoda, ha un punto di ebollizione così elevato che lo si può ritenere per nulla volatile, non si altera all'aria, all'umidità, alla luce, e che infine, presumibilmente, avrebbe dovuto possedere una costante molecolare crioscopica elevata, abbiamo pensato fosse utile studiarne il comportamento come solvente per la determinazione dei pesi molecolari col metodo crioscopico.

Il fosfato trifenilico che ci servì per queste esperienze, venne messo cortesemente a nostra disposizione dalla Società I. G. pel tramite della Società A. R. C. A. Il composto inviatoci era già abbastanza puro e bastò una sola cristallizzazione dall'alcool per avere un composto ineccepibile. Il suo punto di congelamento, determinato col termometro in centesimi Beckmann, risultò di 48°.25.

Per determinare l'abbassamento molecolare costante del punto di congelamento scegliemmo alcune sostanze, in maggioranza idrocarburi, che si presumeva avessero comportamento crioscopico normale, e cioè naftalina, difenile, toluolo, trifenilmetano, anidride ftalica, uretano.

Il trifenilfosfato fuso costituisce un liquido limpidissimo con lievissima fluorescenza violacea. Lasciato all'aria, entro la provetta crioscopica, anche dopo parecchi giorni manteneva inalterato il punto di congelamento. Le determinazioni furono eseguite con provetta crioscopica Beckmann a tubulatura laterale, che veniva mantenuta in bagno di acqua scaldata a 50°-52° per fondere il solvente e poi lasciato raffreddare lentamente. Il trifenilfosfato si sovraraffredda di un grado e mezzo o due, poi si inizia la separazione dei cristalli (favorita dall'agitazione e provocata, se necessario, con l'introduzione di qualche germe) e il termometro risale rapidamente dapprima, poi lentamente, finchè si porta al punto più alto, vi rimane stazionario per qualche minuto, ed è questa la temperatura di congelamento. Non è conveniente agitare troppo il liquido perchè si disturba la cristallizzazione.

Solvente *Trifenilfosfato*  $(C_6H_5)_3PO_4 = 326$ .

*Difenile*  $C_{12}H_{10}$  - *P. m.* = 154:

gr. solvente	concentr. gr. %	$\Delta$	K
19.892	0.7884	0°.69	136.5
»	2.096	1°.56	114.4
»	3.449	2°.315	103.4
17.43	1.332	1°.265	146.2
»	2.457	1°.88	117
»	3.405	2°.45	114



*Naftalina*  $C_{10}H_8$  - *P. m.* = 128:

17.57	1.199	1 <sup>o</sup> .195	127
»	1.98	1 .85	119.6
»	2.981	2 .57	110.4
»	3.793	3 .095	104.4

*Toluolo*  $C_7H_8$  - *P. m.* 89:

17.05	0.8281	1 <sup>o</sup> .09	121.1
22.05	2.906	3 .16	100.1
»	3.489	3 .77	97.14

*Uretano*  $C_3H_7O_2N$  - *P. m.* = 89:

18.05	0.7756	1 <sup>o</sup> .07	122.8
»	1.654	1 .94	104.3
»	2.708	3 .07	100.7

*Anidride ftalica*  $C_8H_4O_3$  - *P. m.* = 148:

gr. solvente	concentr. gr. %	$\Delta$	K
18.35	0.6458	0 <sup>o</sup> .63	147.8
»	1.22	1 .03	125
»	1.854	1 .49	129
»	2.405	1 .86	114.4
20.5205	0.4207	0 <sup>o</sup> .39	137
»	0.9308	0 .76	120.8
»	1.448	1 .15	117.6
»	1.991	1 .48	110
»	2.727	1 .95	108.3
»	3.427	2 .31	98.05

*Trifenilmetano*  $C_{18}H_{15}$  - *P. m.* = 244:

30.6458	0.648	0 <sup>o</sup> .37	139.2
»	1.292	0 .60	113.2
»	1.992	0 .99	118.5
»	2.949	1 .19	123

Come si vede gli abbassamenti molecolari forniti del difenile, naftalina, anidride ftalica, trifenilmetano concordano abbastanza bene e per concentrazioni intorno all'uno per cento sono tra 130 e 140. Non del tutto normale appare il comportamento del toluolo e dell'uretano. Pel fosfato trifenilico, come per altri solventi, si nota in genere che l'abbassamento molecolare scende dapprima rapidamente col crescere della concentrazione e poi tende a rimanere costante. Infatti facendo la media soltanto delle seconde concentrazioni si ottiene 119.

Venne altra volta rilevato che specialmente le soluzioni diluite forniscono abbassamenti molecolari più elevati di quelli che si deducono dalla nota formola di van t'Hoff, spiegandolo col fatto che parte del solvente, separandosi nell'inizio del congelamento si sottrae alla pressione osmotica <sup>(1)</sup>. Eykman in taluni casi ha determinato indirettamente, con una certa approssimazione, la quantità del solvente puro che si separa nel congelamento e tenendone conto ha corretto i valori sperimentali della costante, riportandoli in accordo con la teoria.

Abbiamo cercato di determinare, per lo meno in via approssimata, il calore di fusione del trifenilfosfato col metodo dei calori specifici, seguendo le modalità indicate da Eykman <sup>(2)</sup>.

Il trifenilfosfato messo in una cassetina di argento (del peso di gr. 25 e dimensioni cm.  $1 \times 4 \times 9$ ) munita di termometro, viene riscaldato in termostato ad una temperatura da prima inferiore e poi di poco superiore a quella di fusione; introdotto quindi nel calorimetro si sono ottenuti i seguenti risultati:

Gr. 285.53 di  $H_2O$

gr. 21 di trifenilfosfato solido a  $42^{\circ}.2$

dettero un innalzamento di  $18.9^{\circ}-18^{\circ}.1 = 0^{\circ}.8$  di temperatura,

gr. 285.53 di  $H_2O$

gr. 21 di trifenilfosfato fuso a  $48^{\circ}.5$

dettero un innalzamento di  $19^{\circ}.1-16^{\circ}.8 = 2^{\circ}.2$  di temperatura.

Il calore specifico del trifenilfosfato fra  $18^{\circ}$  e  $42^{\circ}$  risulta quindi di 0.381 e se fra l'intervallo di temperatura  $42^{\circ}.2$  e  $48^{\circ}.5$  si pone in calcolo lo stesso calore specifico (0.381) si hanno pel calore di fusione 17.56 calorie.

Ne segue:

$$K = \frac{0.02 \cdot T^2}{17.5} = \frac{0.02 \times 321.25^2}{17.56} = 117.6$$

costante crioscopica teorica secondo van t'Hoff.

(1) EYKMAN, « Zeitschr. phys. Chemie », IV, p. 512, (1889).

(2) EYKMAN, loc. cit.

Noi crediamo si possa adottare 120 come valore della costante crioscopica media del fosfato trifenilico da assumere per calcolare i pesi molecolari. Essa risulta quindi uguale all'incirca a quella trovata pel fenantrene<sup>(1)</sup>.

Per completare le caratteristiche del nuovo solvente crioscopico abbiamo sperimentato il comportamento dell'acido benzoico e dell'acido salicilico.

*Acido benzoico*  $C_7H_6O_2$  — *P. m.* = 122:

gr. solvente	concentr. gr. o/o	abbassamento $\Delta$	K
18.20	1.05	0°.89	101
»	2.184	1.77	98.97
»	3.421	1.90	67.77
»	4.56	3.29	88.03

*Acido salicilico*  $C_7H_6O_3$  — *P. m.* = 138:

19.4121	0.4894	0°.44	124
»	1.016	0.69	93.74
»	1.686	1.23	100.7

L'acido benzoico ha fornito, come era prevedibile, una costante molecolare inferiore alla normale, essa va da 101 a 67. È noto che il carbossile e l'ossidril, nei composti organici, comunicano a questi la proprietà di formare in soluzioni di solventi non acidi, molecole complesse. Come solvente crioscopico adunque il trifenilfosfato si comporta in modo analogo agli idrocarburi ed altri corpi che non hanno il potere di scindere le molecole associate. Pure anormale è il comportamento crioscopico dell'acido salicilico, ma l'anomalia è meno sensibile, ciò che appare strano giacchè il composto contiene carbossile e ossidril, aggruppamenti entrambi associanti.

Anormale pure risultò il comportamento delle soluzioni di trifenilfosfina:

*Solvente trifenilfosfato*  $(C_6H_5)_3PO_4$ .

*Corpo sciolto*  $(C_6H_5)_3P$  — *P. m.* = 262.

gr. solvente	concentr. gr. o/o	abbassamento $\Delta$	K
19.4045	1.134	0°.39	90.07
»	1.897	0.64	89.3
»	2.818	1.16	105.4

L'anomalia in tal caso con maggior probabilità va ricercata nella analogia di costituzione fra solvente e corpo sciolto che può indurre alla formazione di soluzione solida fra trifenilfosfato e trifenilfosfina.

(1) GARELLI e FERRATINI, «R. Acc. Lincei», 1893.

**Chimica.** — *Il fosfato trifenilico come solvente crioscopico.* Nota II di F. GARELLI e G. RACCIU, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geologia.** — *Il Miocene del M. Vallassa.* Nota di A. BONI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio P. VINASSA DE REGNY.

Il M. Vallassa, rilievo di una certa entità in val di Staffora, ha già richiamato su di sè l'attenzione degli studiosi dell'Appennino Pavese in particolare, ed anche di quelli dell'Appennino settentrionale tutto, per la sua placca elveziana estesa e potente, ricchissima di fossili, ed ha già fornito numeroso materiale a studi paleontologici. Così il prof. Mariani <sup>(2)</sup> nel 1886 inserì nel suo studio geologico dei terreni fra Scrivia e Staffora un lavoro paleontologico in cui studiò pure i fossili del M. Vallassa. E già da allora la fauna apparve ricca; ma molto ancora rimaneva da fare. È di quest'anno lo studio del prof. Patrini sui litofilli di questo giacimento <sup>(3)</sup>.

La struttura geologica del M. Vallassa è semplice e tipica. Le falde collinose sono formate prevalentemente di marne friabili grigio-azzurre, attribuite all'Oligocene. Al disopra di questa formazione molto estesa sta la massa dell'Elveziano potente, compatta, quasi a comprimere le marne sottostanti, che infatti in taluni punti schizzan fuori, si può dire, di sotto ad essa.

Tra la formazione oligocenica e quella miocenica elveziana si nota sul fianco nord-orientale del monte una formazione, distintamente visibile in tutto il suo sviluppo in una spaccatura formata dal rio Semola che scende alla Staffora, sotto la località chiamata Cà Rossago, costituita da marne leggermente sabbiose di color grigio-azzurro molto più chiaro di quello delle marne oligoceniche; formazione della potenza di una cinquantina di metri, attribuita dal Sacco al Langhiano superiore. Ma convien subito avvertire come questa non sia una formazione ben delimitata, nettamente distinta dalle arenarie elveziane sovrastanti. Infatti le marne che la costituiscono, uniformi alla base, divengono vieppiù sabbiose e compatte man mano che si sale lungo questa sezione, sì che si ha ben presto un'alternanza di strati più compatti e di strati più facilmente erodibili, che conservano però

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) MARIANI, *Descrizione dei terreni miocenici fra Scrivia e Staffora.* « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. V, 1886, p. 227.

(3) PATRINI, *Su di un nuovo litofillo miocenico.* « Rivista Italiana di Paleontologia », anno XXXVIII, fasc. I-II, 1932.

sempre il color grigio-azzurro. Più sopra, aumentando ancora la percentuale di sabbia, si passa gradatamente, mediante alternanza di strati più chiari e di strati più scuri, a strati che si possono riferire tanto al Langhiano quanto all'Elveziano, rappresentando essi una formazione intermedia tra quella marnosa langhiana e quella arenacea elveziana. Del resto quest'ultima non ha sempre il medesimo aspetto, ma anzi appare a grana assai fina, a cemento argilloso, di colore grigiastro alla base (così alla fontana dell'Arsazza) e si fa, salendo, gradatamente più grossolana; il cemento diventa prevalentemente calcareo, si arricchisce di resti fossili, specialmente gusci di Pettini, sì che in taluni punti assume l'aspetto di una brecciola organogena. Voglio dire cioè che la serie langhiano-elveziana sembrerebbe essere una serie continua, da marne sabbiose su, su fino ad arenarie grossolane, a brecciole organogene. E questo ha un certo valore per quanto verrò dicendo.

La presenza di tutti questi termini di passaggio rende oltremodo difficile e soggettiva la delimitazione di questa formazione langhiana, anche perchè non molte sono le sezioni ove appaia la serie tipica, e perchè essa viene in parte ricoperta dalle marne oligoceniche, che, come dissi, schizzano fuori di sotto e si rigonfiano. Ad ogni modo la presenza del Langhiano, almeno di quelle forme di transizione arenaceo-marnose, cui accennai prima, mi sembra sicura su tutto il versante della Staffora, a partire dal rio Semola fino a Serra del Monte, dove si ritrova proprio la formazione tipo marno-sabbiosa grigio-azzurra; anzi Serra del Monte è posta su tale tipo di terreno. Anche nel versante del Curone essa si ritrova per un breve tratto; avrebbe quindi un'estensione maggiore di quella attribuitale dagli autori; si tratta però sempre di una formazione poco potente e che fa gradualmente passaggio all'Elveziano. Più a monte, nel versante del Curone, verso Musigliano, appare una netta spaccatura, dove si scorge invece una potente massa dirupata di Elveziano alla base della quale schizzano fuori le argille scagliose e non è traccia della formazione langhiana. Una tale mancanza pare continuarsi anche sul versante meridionale, cosicchè si avrebbe sul versante nord-orientale successione normale Langhiano-Elveziano, mentre ad un chilometro e mezzo circa più addentro l'Elveziano tipico poggerebbe direttamente sulle argille scagliose.

A nord-ovest e sud-est, verso Cecima e verso Bagnaria, il complesso testè descritto è limitato dalla formazione tipica delle argille scagliose. È caratteristica la loro posizione nelle selle ai lati del monte, quasi fossero schizzate fuori, schiacciate delle masse sovrastanti più pesanti attraverso punti di minor resistenza. Il loro aspetto è quello tipico a conoidi con creste ben marcate, il loro colore è grigio-cinereo, ad esse sono frammisti in taluni punti blocchi calcarei grigiastri. È logico pensare che esse formino la base di tutto il monte, al disotto delle marne oligoceniche.

Gli strati elveziani si presentano, come ho detto, riccamente fossiliferi; talvolta i gusci sono tanto abbondanti da prevalere sulla roccia eccipiente.



Essi però si trovano in generale riuniti in determinati punti, che corrispondono molto probabilmente a località - cimiteri - dove erano raccolti, dopo la morte, dalla forza delle onde che li sbatteva. Una prova di questo rotolio dei fossili del M. Vallassa si ha nei litotamni e nei briozoi che si presentano spesso sotto forma di noduli arrotondati. La fauna è una fauna sub-litorale, corrispondente a quella descritta dal De Stefani<sup>(1)</sup> per la zona delle laminarie; si trovano anche ciottoli con delle fossette erose probabilmente da gasteropodi scavatori. In questa fauna prevalgono di gran lunga i pettinidi dei quali potei raccogliere un migliaio di individui. La specie più diffusa, anzi, considerata in senso lato, l'unica veramente diffusa è la *Chlamys scabrella* Lamarck, i cui esemplari mi offrirono materiale di studio sulla variabilità di questa specie.

Il mio abbondante reperto di questa specie in terreno miocenico e così ricca di varietà viene a provare, contro quelli che la ritenevano forma prevalentemente del Pliocene inferiore, che essa è nata ed ha avuto uno sviluppo rigoglioso sia pel numero degli individui sia per le loro variazioni, sin dal Miocene. Anche le forme della *Chlamys scabriuscula* Matheron sono discretamente abbondanti.

Seguono poi come frequenza di individui le terebratule e le ostriche.

I terreni marnosi sottostanti (Langhiano) sono pure molto ricchi di fossili con prevalenza di alcuni generi di lamellibranchi, di gasteropodi, di coralli isolati, ecc. Tutti questi fossili essendo a guscio sottile sono raramente ben conservati: in generale non ne rimangono che i modelli interni; soltanto le terebratule, che hanno guscio più resistente, sono ben conservate ed essendo numerosissime m'hanno offerto abbondante materiale di studio.

Dò l'elenco dei fossili, segnando con un asterisco quelli esclusivi degli strati attribuiti al Langhiano e con una crocetta quelli comuni alle due formazioni: elveziana e langhiana. Non cito naturalmente le nuove forme, che saranno descritte in un prossimo lavoro:

* <i>Pecten Hornensis</i> —Déperét et Roman	<i>Chlamys latissima</i> —Brocchi
<i>Pecten Dunkeri</i> —Mayer Eymar var.	<i>Chlamys Tournali</i> —Serres
* <i>Pecten Josslinghi</i> —Smith. var.	* <i>Chlamys opercularis</i> var. aff. <i>laevigatoides</i> Sacco
<i>Flabellipecten fraterculus</i> —Sowerby	* <i>Chlamys opercularis</i> var. aff. <i>sexdecimcostata</i> Sacco
<i>Flabellipecten Besseri</i> —Andreizowski	<i>Chlamys</i> cfr. <i>Malvinae</i> —Dubois
<i>Flabellipecten incrassatus</i> —Partsch.	+ <i>Chlamys scabrella</i> —Lamarck (con numerosissime varietà).
<i>Flabellipecten Bassanensis</i> —Oppenheim	<i>Chlamys Scilli</i> —Mayer Eymar
* <i>Flabellipecten</i> cfr. <i>Vinassai</i> —Ugolini	
* <i>Amussium denudatum</i> —Reuss con var.	
<i>Chlamys gloriamaris</i> —Dubois	

(1) DE STEFANI C., *Les terrains tertiaires supérieurs du bassin de la Méditerranée*. « Annales de la Soc. Géolog. de Belgique », tome XVIII, Mem. 1891.

- |   |  |
|---|--|
| * <i>Chlamys Gentoni</i> —Fontannes e var.                                  | <i>Cubitostrea frondosa</i> —Serres  |
| <i>Chlamys</i> cfr. <i>Hilberi</i> —Mikhailowski                            | <i>Gigantostrea crassicosta</i> —Sowerby   |
| <i>Chlamys multiscabrella</i> (?) Sacco                                     | <i>Pectunculus inflatus</i> —Brocchi   |
| <i>Chlamys zibinica</i> —Coppi  | <i>Pectunculus bimaculatus</i> (?) Poli  |
| <i>Chlamys zibinica</i> —Coppi var. <i>gibbulosa</i><br>Sacco               | <i>Callista erycina</i> L. var. <i>subtriangula</i> —<br>Sacco                   |
| <i>Chlamys zibinica</i> —Coppi var. <i>stricti-</i><br><i>costata</i> Sacco | <i>Callista pedemontana</i> L.   |
| <i>Chlamys Orsinii</i> —Meneghini   | + <i>Terebratula sinuosa</i> —Brocchi  |
| <i>Chlamys improvisa</i> —Fischer et Tour-<br>nouër                         | <i>Terebratula sinuosa</i> —Brocchi var. <i>pe-</i><br><i>demontana</i> —Sacco   |
| * <i>Chlamys cavarum</i> —Fontannes   | <i>Terebratula sinuosa</i> —Brocchi var. <i>pseu-</i><br><i>doscillae</i> —Sacco |
| <i>Chlamys camaretensis</i> —Fontannes                                      | <i>Terebratula tauroolata</i> —Sacco   |
| <i>Ostrea edulis</i> var. <i>adriatica</i> Lamarck                          | <i>Balanus concavus</i> —Bronn   |
| + <i>Ostrea cochlear</i> —Poli  | <i>Balanus tintinnabulum</i> —Lamarck  |
| <i>Ostrea lamellosa</i> —Brocchi  | <i>Balanus spongicola</i> —Bronn. <sup>(1)</sup>                                 |

La presenza di una successione graduale completa dalle marne attribuite al Langhiano alle arenarie elvezieane su di un versante e quella, sull'altro versante, a poca distanza, di una netta discordanza dell'Elveziano su formazioni molto più antiche, mi ha suggerito l'idea, che quello che si è considerato come Langhiano possa andare sempre più sfumando sotto l'Elveziano, formando come un'unghia, e possa quindi essere considerato piuttosto come una formazione un po' più profonda, più ricca quindi di materiale fino sabbioso, argilloso, di uno stesso mare, dato anche il graduale passaggio fra i due tipi di terreni. Tanto più che riuscirebbe difficile spiegare la presenza di questa leggera lingua di Langhiano alla base dell'Elveziano, difficilmente connettabile colle altre formazioni langhiane di questa parte dell'Appennino pavese. Allora potrebbe il M. Vallassa stare a rappresentare un antico golfo di mare e la lingua di Langhiano, a forma di U, corrisponderebbe appunto alla zona centrale di maggior profondità del mare.

Del resto l'idea che si tratti di due facies anzichè di due piani differenti era già stata enunciata da altri autori, indottivi dalla vana ricerca di una fauna caratteristica dei piani stessi. Già nel 1891 il De Stefani, nell'opera citata sui terreni terziari superiori del bacino mediterraneo, attribuendo alla

(1) Numerosi altri generi di lamellibranchi si trovano negli strati langhiani ma in generale sono ridotti ai soli modelli interni non determinabili. E anche i gasteropodi, rarissimi nell'Elveziano e invece frequenti nel Langhiano, son ridotti a modelli interni.

Echinidi: pochi e non ben conservati esemplari provenienti tanto dagli strati elveziani quanto da quelli langhiani. Briozoi: specie del genere *Holoporella* formano numerosi noduli arrotondati. Grossi noduli sono poi costituiti da alghe calcaree tra cui prevale il *Lithophyllum Vinassai*—Patrini. Coralli isolati esistono non ben conservati, nel Langhiano. In questo terreno si trovano pure numerosi denti di squalo.

litologia un valore soltanto per la distinzione batometrica delle formazioni, considerando che le differenze paleontologiche, le quali tanto valore cronologico hanno, sono per i terreni del Miocene medio da ricondursi piuttosto a differenze batometriche, ritenne che le formazioni stesse rappresentino piuttosto che piani cronologicamente distinti, facies batometriche di un medesimo mare miocenico.

Quest'idea fu in seguito discussa: prevalsero ancora le divisioni del Mayer nei piani comunemente tutt'oggi accettati. Questi furono dal Sacco spiegati mediante una serie di oscillazioni del fondo marino, per le quali dall'Aquitaniense marnoso arenaceo (mare poco profondo) si passa attraverso un abbassamento al Langhiano marnoso (mare discretamente profondo) poi per un nuovo sollevamento all'Elveziano arenaceo sublitorale, quindi un altro abbassamento porta alla deposizione del Tortoniano, formazione corrispondente alla 3<sup>a</sup> zona del De Stefani. L'idea però del De Stefani non era del tutto dimenticata e la si trova accennata in taluni lavori.

Ora mi sembra che il M. Vallassa colla sua struttura e colla sua fauna porti un piccolo contributo a questa teoria, la quale altri argomenti favorevoli deduce, del resto, da considerazioni generali.

Infatti se si considerano i piani miocenici da un punto di vista più largo, si vede che essi si presentano sempre colla medesima facies litologica: il Langhiano ad es., come deposito di mare piuttosto profondo è quasi sempre a facies marnosa; l'Elveziano, deposito sub-litorale, è comunemente arenaceo, qualche volta calcareo. Ma un piano geologico per essere definito deve essere conosciuto in tutte le facies, che può dare il mezzo in cui esso si forma. Nel caso dei piani del Miocene medio, secondo la concezione comune, manca questa definizione, nè nell'ambito abbastanza ristretto del mare miocenico, si riesce a trovare le altre facies corrispondenti cronologicamente a quella tipica. Colla teoria del De Stefani la definizione è invece completa. Nè con questa teoria è necessario ammettere quella serie di oscillazioni del fondo marino cui ricorre il Sacco e la deposizione è continua e regolare.

Ma soprattutto le considerazioni paleontologiche parlano in favore di questa teoria. Infatti nei piani miocenici degli autori manca una fauna caratteristica. Differenze paleontologiche esistono fra un piano e l'altro, ed anche notevoli, ma sono quelle stesse differenze che ha messo in evidenza il De Stefani e che dipendono unicamente dalla diversa profondità del mare: poichè ad una determinata profondità vivono soltanto certi tipi ed altri non possono vivere in quell'ambiente perchè incapaci di dominarlo.

L'unico gruppo cui, per la ricchezza di forme e la loro variabilità d'ornamentazione, si possa attribuire valore cronologico nel Terziario è quello dei Pettinidi del quale si trovano appunto forme a profondità diversissime. A questo gruppo Depéret e Roman attribuiscono lo stesso valore cronologico che hanno per il secondario le Ammoniti. Ma anche per i Pettinidi si

può ripetere ciò che si è detto per i fossili in generale: se forme furono ritrovate in un sol piano, questo si è, perchè esse, per lo spessore del loro guscio e per la loro ornamentazione, sono atte a vivere soltanto in quell'ambiente. A questa convinzione mi ha portato lo studio dei numerosi Pettinidi del M. Vallassa ed in particolare quello della variabilità della *Chlamys scabrella* Lamarck eseguito su materiale molto ricco e proveniente da ambo i piani (Elveziano e Langhiano): posso dire di non aver trovato una varietà spiccatamente caratteristica di uno solo di essi, pure esistendo lievi differenze tra talune variazioni elvezie e le corrispondenti langhiane, differenze spiegabili pensando che la contemporaneità è una contemporaneità relativa alla lunghezza dei periodi geologici, tale cioè da permettere uno scarto di tempo sì grande che giustifichi la presenza di queste leggere variazioni.

**Geologia.** — *Sulla Geologia del M. Pisano.* Nota di R. REDINI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

In questa Nota intendo rendere brevemente conto di quanto ho recentemente osservato al M. Pisano. Le conclusioni cui perverrò, fondate su numerose escursioni e ricerche effettuate in vari punti del monte stesso e in qualcuno dei monti d'Oltre Serchio, sono in contrasto non solo con le concezioni particolari del Fucini e di altri autori, ma anche con quanto da tempo era pacificamente ammesso. Pertanto, conscio della gravità di queste mie nuove idee sulla stratigrafia e sulla tettonica del M. Pisano, esprimo quanto segue come una ipotesi, che può semplificare notevolmente la interpretazione della geologia del monte stesso.

Nella porzione meridionale del M. Pisano, il Verrucano (quello cioè della Verruca, versante sud, sud-ovest) come risultava già dagli studi del Vinassa <sup>(2)</sup>, immerge ovunque al disotto della cintura calcarea periferica: inoltre, tra Verrucano e sovrapposti calcari, in più punti, notasi un graduale passaggio: la sedimentazione cioè è stata continua, il che è comprovato dai dati stratigrafici, i quali indicano perfetta concordanza tra l'uno e gli altri. Nella valle di Crespignano, agli scisti verrucani seguono calcari a lastre con selce, di color giallo-marrone, grigiastri, di piccolissima potenza: lungo le pendici nord-occidentali di q. 291, ai calcari a lastre con selce, sono intimamente connessi: calcescisti, diaspri rossi, scisti rossastri con corpi allungati identici ai supposti *Siphonites* apuani, sottili calcescisti ver-

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) VINASSA P., *La sorgente acidulo-alcalino-litiosa di Uliveto*. « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. XVII. Pisa, 1900.



dolini, con chiazze rosse, perlacee, ecc., perfettamente simili, quindi, agli scisti e calcescisti della formazione degli scisti varicolori della porzione nord-occidentale del M. Pisano. Per accurate osservazioni, ho dovuto convincermi non essere i calcari con selce, diaspri, scisti a *Siphonites*, calcescisti varicolori, altro che facies eteropiche di una stessa formazione.

Nei pressi di Focetta, lungo lo stradello che scende a Uliveto, detta formazione ricompare, avendo attraversato per probabile sinclinale più o meno irregolare e anche forse con fratture, il cocuzzolo di q. 291, all'ingrosso da ovest ad est: scende quindi per la valle di Focetta, costituendo sempre il terreno immediatamente superiore al Verrucano, e come tale si ritrova lungo le basse pendici orientali dei Monti Bianchi, a non molto dall'abitato di Noce. Quivi ho riscontrato, in ordine ascendente, la serie seguente:

Verrucano;

Calcari con selce, ed intercalazioni argilloscistose, rossastre, rosso-violacee: diaspri qua e là accennati;

Diaspri rossi, associati a calcescisti, argilloscisti pure rossi;

Calcari con selce, immergenti sotto a:

Calcari cavernosi, che ascrivo al Retico inferiore.

Ai calcari a lastre con selce, nella valle di Crespignano, fa seguito, essendovi indissolubilmente connessa, una formazione calcarea che, per facilitare l'esposizione, chiamerò dei calcari gialli, essendo appunto la forma litologica più comune rappresentata da un calcare d'un giallo ora più o meno carico, con venule a volte giallo-rossastre: connessi vi sono calcari biancastri, grigiastri ecc. Hanno aspetto non di raro marmoreo, dotati di una pellucidità caratteristica, talchè è facile ricordarne i caratteri e riconoscerli. Faccio notare che tra i calcari gialli se ne rinvennero, a qualsiasi livello, di quelli d'un giallo più carico, letteralmente identici ai così detti marmi gialli del M. Moriglion di Penna e del M. Cotrozzi, ravvicinabili, secondo vari autori, ai marmi gialli della Montagnole senese. La formazione dei calcari gialli dal fondo della valle di Crespignano, salendo, raggiunge la cresta del monte, l'oltrepassa e, discendendo per l'opposto versante, viene a costituire la grande massa calcarea in cui sono aperte le cave di Uliveto: di qui probabilmente si spinge sino nei pressi del paese di Noce. Ora questa formazione dei calcari gialli, ovunque, per dati stratigrafici e osservazioni correlative, è sottoposta ad un complesso di calcari cavernosi, che per la loro posizione stratigrafica e per i loro caratteri litologici, rispondono molto bene a quelli che dallo Zaccagna<sup>(1)</sup> nelle Alpi Apuane sono stati riferiti alla zona inferiore del Retico: alla medesima zona ho riferito anch'io, come si è visto, quelli del M. Pisano. Tra la formazione dei cal-

(1) ZACCAGNA D., *Note illustrative della Carta geologica delle Alpi Apuane*. «Pubbl. R. Uff. geol.». Roma, 1920.



cari gialli e quella dei cavernosi ora detti si rinviene, a partire dalla valle di Crespignano, sotto q. 150, sin sopra le cave di Uliveto una formazione, di piccolissima potenza, di quarziti, con qualche granulo di quarzo roseo, di scisti consociati, di cui alcuni almeno assai simili, se non a volte pressochè identici, a scisti verrucani tipici. Per l'insieme dei caratteri macroscopici e per ricerche petrografiche eseguite, ha tutto l'aspetto di essere un complesso a facies verrucana.

Ai calcari cavernosi seguono regolarmente le altre assisi del Retico, (di cui ho rinvenuto una nuova località fossilifera, sita in quella cava che, andando verso Uliveto, fa seguito a quella delle Conche) e quindi il bianco ceroide del Lias inferiore. In più punti della porzione di monte tra la Torre Upezzinghi e q. 291 (incluse) ho rinvenuto breccie e brecciame ad elementi di calcari ceroidi rossi, color fegato, carnicini ecc., altri con selce, elementi diasprini rossi, rappresentanti verosimilmente i primi il rosso ammonitico, i secondi il Lias medio, gli ultimi, forse, il Titoniano.

Quindi per ora può dirsi:

Il Verrucano è intimamente connesso al complesso dei calcari a lastre con selce, diaspri, scisti varicolori, scisti a *Siphonites*, cui segue, pure indissolubilmente legata, la formazione dei calcari gialli, sottoposta al Retico. Quindi i calcari a lastre con selce dal Fucini ora ascritti al Wealdiano superiore <sup>(1)</sup> (valle di Crespignano), ora al Lias medio <sup>(2)</sup> (q. 291), non possono ascrivarsi nè al Wealdiano superiore, nè al Lias medio, essendo sottoposti ai calcari gialli, ammessi, specie nella porzione nord-occidentale del Monte, di Lias inferiore. Nemmeno questi a loro volta sono riportabili al Lias inferiore, perchè soggiacenti al Retico.

Per le stesse ragioni i diaspri ritenuti dal Fucini di Wealdiano medio <sup>(3)</sup>, trasgressivi quindi sui calcari con selce, non sono ascrivibili al Wealdiano medio: gli scisti varicolori sottostanno al Retico,

Passo ora alla porzione nord-occidentale del M. Pisano.

Lungo la strada valico S. Giuliano-S. Maria affiora il Verrucano sovrapposto, a destra salendo, ai calcari con selce, a sinistra immergente al disotto di M. Rotondo. Varie ne sono state le interpretazioni.

Minuziose ricerche mi hanno dimostrato che i calcari con selce, in special modo quelli grigiastri più o meno dolomitici (loro facies eteropica), non passano bruscamente agli immediatamente sovrapposti scisti verrucani, ma mediante laminette qua e là e anche, alla Foce ad esempio, vere intercalazioni scistose, nerastre, brunastre, ecc., si raccordano con loro. Cioè: il Verrucano, lungo il valico, si trova tra i calcari con selce al disotto, e i

(1) FUCINI A., *Studi geologici sul M. Pisano*. « Atti Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania ». Serie V, vol. XIV, p. 88.

(2) FUCINI A., Op. cit., p. 33 (perchè infatti identici a calcari con selce, ammessi di Lias medio, di S. Giuliano).

(3) FUCINI A., Op. cit., p. 33.

calcari del M. Rotondo al disopra, per la semplicissima ragione che esso è un'intercalazione eteropicamente costituitasi tra l'una formazione e l'altra. I calcari dei pressi della Foce, di deposizione anteriore a quella del Verrucano del valico, terminano probabilmente in seno allo stesso Verrucano, a mo' di cuneo.

Il Verrucano poi, alla Foce, è curvato ad anticlinale.

I calcari nerastri con selce de La Valle (M. Torretta), essendo inseriti nei calcari biancastri, ammessi di Lias inferiore, di cui non sono che una facies eteropica <sup>(1)</sup>, non sono nè retici, nè wealdiani, come forse quelli della Colombaia.

I calcari bianchi, gialli, marmorei, probabilmente appartengono al Trias: a sud essi soggiacciono al Retico: qui al M. Rotondo sono sovrapposti, come del resto anche a sud, ai calcari con selce, ammessi di Lias medio: non quindi, ad ogni modo, di Lias inferiore. La fauna in essi per l'appunto al M. Rotondo rinvenuta, è probabilmente una fauna a caratteri misti triasici e liasici, come nel Trias superiore delle Alpi Apuane. In questa formazione sono sviluppatissime le *Evinospongiae* del tipo d'Esino <sup>(2)</sup>.

I calcari con selce attribuiti al Lias medio, hanno i loro corrispondenti litologicamente identici, per quanto riguarda la varietà giallo marrone, nella porzione meridionale del Monte, ove si è visto che susseguono immediatamente al Verrucano e sono sottoposti al Retico. Tra essi poi e i calcari ritenuti di Lias inferiore, manca e completamente, come riconosce giustamente anche il Fucini <sup>(3)</sup>, il rosso ammonitico; il che è oltremodo strano, dato che lo si rinviene, sebbene in breccie e brecciame, nella porzione meridionale del Monte e bene sviluppato poi nei prossimi monti d'Oltre Serchio. Quindi, più che al Lias medio, è probabile che appartengano al Trias.

Gli Aptici scoperti dal Canavari al M. Cupola <sup>(4)</sup>, non erano tali, per quanto dice il Fucini <sup>(5)</sup>, da far ritenere sicura l'assegnazione della formazione diasprina al Titonico: di aptici al M. Cupola ne ho rinvenuti anch'io, ma al solito in modello, e per giunta mal ridotti. Inoltre si noti che qui i diaspri sono intimamente connessi ai superiori scisti varicolori con *Siphonites*

(1) Il che è provato oltrechè da elementi stratigrafici, anche da chiazze, amigdale di bianco, osservabili qua e là nel nero con selce.

(2) Per studi in corso, su ricco materiale da me trovato al M. Cotrozzi e lungo le basse pendici del Moriglion di Penna, e su esemplari della V. Brembana, le *Evinospongiae*, del tipo d'Esino, probabilmente sono organismi, ed in particolare idroidi di tipo ellipsactinoide. Non parrebbero però simili ad altri probabili idroidi, che si trovano a Caprona, abbondantissimi a S. Giovanni alla Vena e al M. Sassigrossi nei monti d'Oltre Serchio, nel Lias inferiore.

(3) FUCINI A., Op. cit., p. 31.

(4) CANAVARI M., *Fossili titoniani del Monte Pisano*. « Proc. verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », 1887.

(5) FUCINI A., Op. cit., p. 52.

(osservativi dal Fucini <sup>(1)</sup>), ripetendosi cioè quanto si riscontra nella porzione meridionale dello stesso M. Pisano, ove per l'appunto si hanno diaspri indissolubilmente legati a scisti varicolori con *Siphonites*. Ora questo non può essere un puro caso, e poichè a sud il complesso degli scisti varicolori e diaspri è sottoposto al Retico, e nelle Alpi Apuane ritrovansi nel Trias superiore, risulta quanto sia improbabile la pertinenza e dei diaspri e dei connessi scisti varicolori al Titonico (Fucini <sup>(2)</sup>), e degli scisti varicolori in particolare, al Cretaceo (De Stefani <sup>(3)</sup>). Verosimilmente sono invece di Trias superiore. Il complesso concordante quindi, degli scisti varicolori, Verrucano, calcari a *Calcinema* di tipo triasico, calcari con selce tipo maiolica, del M. Maggiore sopra Ripafratta, passa logicamente al Trias.

Il Verrucano perciò, in base a queste nuove interpretazioni, non sarebbe più una formazione unica, inscindibile. Esso si è ripetuto varie volte, in piani diversi (vedi ad esempio, Verrucano della Verruca e Verrucano (?) posato sui calcari gialli a sud, Verrucano ancora della Verruca e Verrucano del Valico, C. Croce e Spelonca... sino al Verrucano di Rupe Cava, a nord-ovest) di uno stesso sistema, il Trias, sostituendo eteropicamente le formazioni a contatto, laddove e quando particolari condizioni ambientali ne favorirono il deposito. Esso è seguito, come ben ha posto in rilievo il Fucini, spesso da calcari grigiastri, più o meno dolomitici, talora con selce, o cavernosi. Il Verrucano della Verruca in particolare, è assegnabile, con non scarse probabilità, al Trias inferiore e forse anche, in parte almeno, al medio. Esso soggiace, essendovi intimamente legato, ai calcari con selce, alla formazione dei calcari gialli, che a sud, è sottoposta al Retico, e a nord-ovest contiene le *Evinospongiae* identiche a quelle d'Esino: d'altra parte sovrasta all'antracolitico: non è quindi facile ritenerlo con il Masini <sup>(4)</sup> e il De Stefani <sup>(5)</sup>, paleozoico, e tanto meno con il Fucini wealdiano. Inoltre alcune delle sue forme litologiche, quali per l'appunto, ad esempio, quelle quarziti verdastre che hanno dato la fauna studiata dal Fucini, sono letteralmente identiche a consimili rocce del Trias inferiore lombardo. Del resto, una « grandissima » analogia litologica tra scisti verrucani e werfeniani era già stata rilevata dal Tommasi <sup>(6)</sup>, e la triasicità del Verrucano affacciata

(1) FUCINI A., Op. cit., p. 43.

(2) FUCINI A., Op. cit., p. .

(3) DE STEFANI., *Di alcuni carreggiamenti locali recentemente supposti in Italia*. « Rend. R. Acc. Lincei ». Cl. sc. fis. mat. e nat., 1908.

(4) MASINI R., *Due parole sull'età del calcare cavernoso e del Verrucano nei dintorni del Monte S. Giuliano*. « Proc. verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. XXXVII.

(5) DE STEFANI C., *Escursione geologica da Buti a Calci nel Monte Pisano*. « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. Mem. », vol. XXXII.

(6) TOMMASI A., *Sulle rocce schistose e clastiche inferiori all'Infralias nel gruppo della Verruca*. « Proc. verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », 4 marzo 1883.



un tempo dal De Stefani <sup>(1)</sup>, attualmente, per la parte superiore almeno, dal Lotti <sup>(2)</sup>, e sostenuta sempre dal Vinassa <sup>(3)</sup>.

In ultima analisi quindi, a sud, tutta la serie dei terreni dal Verrucano, incluso, sino ai calcari cavernosi retici, esclusi, è probabilmente triasica: a nord-ovest, tutta la serie dei terreni dal Verrucano, incluso, al calcare con selce incluso, del M. Maggiore su Ripafratta è del pari (eccezion fatta forse di alcuni lembi di calcari cavernosi retici, probabilmente triasica. Il Trias poi, tanto a sud, quanto a nord-ovest, forse completo, cioè la porzione meridionale calcareo-scisto-diasprina del M. Pisano, è l'immagine, impicciolita, della porzione nord-occidentale. Occorre però a tal proposito tener sempre presente che, date le rapide variazioni di facies ed anche le loro alternanze, in tutta la serie dei terreni tra Verrucano e Retico (escluso), le facies debbonsi, con tutta probabilità, considerare tra loro eteropiche. Quindi non conviene forse soffermarsi troppo sulla successione, estensione, potenza dei vari terreni o facies, ma por mente piuttosto alla loro presenza, e su questa basarsi nei riferimenti.

Per ultimo deve si osservare come, in base a questa nuova interpretazione del M. Pisano, si possa in certo qual modo, spiegare come l'Antra-colitico affiori estesamente nella valle del Guappero, e i calcari mesozoici, ad es. tra Villa Massagli e Villa Trivellini, poggino direttamente su di esso. Infatti il Verrucano della base del M. Cotrozzi non solo ripete in gran parte le stesse facies di quello del valico, (il che tuttavia non avrebbe grande importanza), ma passa gradualmente ai sovrapposti calcari grigiastri più o meno dolomitici e con selce, mediante sottili intercalazioni scistose, qua e là visibili nei calcari, intercalazioni che a volte racchiudono quali noduli a pasta calcarea. Ora tali porzioni scistose sono letteralmente identiche, per colorazione e aspetto, a quelle che al valico ricollegano i calcari con selce del M. Torretta, al Verrucano. Si tenga inoltre presente che le formazioni calcaree del M. Cotrozzi appartengono al medesimo orizzonte e stratigrafico e litologico, di quelle del M. Rotondo (entrambi infatti, ad es., iniziano con il medesimo calcare grigiastro, dolomitico, talora con selce) e che ambedue sono connesse ai sottoposti scisti verrucani.

Quindi, dall'insieme dei fatti, può dedursi che verosimilmente il Verrucano della base del M. Cotrozzi sia coevo a quello del valico, non sia cioè il Verrucano della Verruca, ma di una deposizione posteriore.

Si può pertanto supporre che il Verrucano della Verruca, comunque

(1) DE STEFANI G., *Geologia del Monte Pisano*. « Memorie per servire alla descrizione della Carta Geologica d'Italia », vol. III, p. 1.

(2) LOTTI B., *Il Trias fossilifero di S. Antonio presso Casal di Pari*. « Boll. R. Com. Geol. », vol. XLVII, fasc. I.

(3) VINASSA P., *Sui calcari cavernosi dei dintorni di Uliveto*. « Boll. Soc. Geol. It. », vol. XXVII, 1908; ID., *Alcuni capisaldi per la Geologia del M. Pisano*. « Boll. Soc. Geol. It. », vol. LI, 1932.

di una anteriore deposizione, non abbia ricoperto l'attuale bacino antracolitico, perchè già allora, forse, questo emergeva per ripiegature proprie, o anche, meno probabilmente, pur essendosi ivi deposto, in seguito ad un sollevamento postetriassico, sia stato asportato dalla denudazione. In seguito il Verrucano del valico, per una sommersione dei litorali del rilievo antracolitico, si depose qua e là, non ovunque. I calcari successivi al Verrucano, per un ulteriore abbassamento della regione costiera, poterono quindi porsi direttamente sugli scisti a filliti.

**Botanica.** — *Un nuovo metodo microchimico per la separazione della cellulosa nelle membrane vegetali.* Nota di GIUSEPPINA DRAGONE-TESTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corresp. E. CARANO.

Notevole interesse ha per il botanico lo studio della natura chimica delle membrane vegetali.

Come è noto nella grande maggioranza delle piante superiori le membrane sono costituite essenzialmente da cellulosa e da sostanze pectiche, oltre che da altre sostanze, che vi possono essere presenti, e che caratterizzano taluni tessuti.

In alcune ricerche microchimiche può essere interessante la separazione della cellulosa dalla membrana; ciò si fa sciogliendo la materia cellulosica con il reattivo di Schweizer, secondo il metodo consigliato da Gilson, e sperimentato con esito favorevole da Carano <sup>(2)</sup>.

Le sezioni trattate con alcool assoluto, quindi con etere solforico, poi di nuovo con alcool assoluto ed in ultimo con acqua distillata, vengono rischiarate con acqua di Javelle; poi lavate accuratamente in acqua e introdotte per ventiquattro ore nel liquido di Schweizer, che, come si sa, ha la proprietà di sciogliere la cellulosa e non le sostanze pectiche; senonchè la preparazione di questo reattivo è laboriosa, e per di più esso non si conserva a lungo, perchè l'ammoniaca volatilizza facilmente.

In una recente comunicazione il prof. Paternò <sup>(3)</sup> espone un nuovo ed elegante metodo per ottenere a scopo industriale la soluzione della cellulosa: esso consiste nel macinare e poscia far digerire la materia fibrosa di quest'ultima con soluzione acquosa di acetato di rame al 10-15 %, precipitare con carbonato sodico, lasciare riposare per ventiquattro ore, filtrare, lavare,

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(2) CARANO E., *Osservazioni sulla membrana cellulare nelle piante superiori*, « Ann. di Bot. », fasc. VI, Roma, 1908, p. 161.

(3) PATERNÒ E., *La cellulosa nel reattivo di Schweitzer*, « Atti R. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XV, fasc. 4, Roma, 1932, p. 262.



sciogliere il precipitato con ammoniaca acquosa concentrata, e riprecipitare con acidi.

Con questo metodo dunque si forma la soluzione cupro-ammoniacale già intimamente compenetrata nella cellulosa, ottenendo così il massimo effetto dell'attacco, ed evitando ciò che costituisce la principale difficoltà, rappresentata dalla preparazione e conservazione del reattivo.

La praticità e semplicità di questo nuovo sistema mi hanno indotta a tentare la sua possibile applicazione anche nel campo microchimico per l'analisi delle membrane vegetali, previa qualche modifica per opportuni adattamenti alla tecnica istologica.

Il metodo è stato infatti da me applicato con successo su diversi materiali (picciolo fogliare di *Fatsia papyrifera*, caule di *Foeniculum vulgare*, picciolo fogliare di *Nimphaea alba*, caule di *Tradescantia virginica*, caule di *Yucca elephantipes*).

Le sezioni rischiarate con acqua di Javelle, previo lavaggio in alcool assoluto, etere, alcool assoluto, acqua distillata, come del resto si fa anche con l'altro metodo microchimico esposto sopra, furono da me introdotte in circa 3 cc. di una soluzione di acetato di rame al 5 %, ed ivi lasciate in riposo per un quarto d'ora a freddo; ho aggiunto in seguito una soluzione di carbonato sodico fino a reazione alcalina, con il quale ho ottenuto il noto precipitato azzurro di carbonato basico di rame. Dopo aver lasciato riposare per circa mezz'ora, ho lavato l'insieme del precipitato e sezioni tre volte per decantazione, raccogliendo in ultimo la massa su di un piccolo filtro; dopo aver asciugato il materiale il più possibile fra carta bibula, ho riportato quest'ultimo, staccato dal filtro, in un piccolo recipiente, dove ho aggiunto poche gocce di ammoniaca concentrata; ho lasciato in riposo le sezioni nella soluzione cupro-ammoniacale formatasi per circa un quarto d'ora, poi ho decantato, ho aggiunto ammoniaca a 18° Baumé in cui ho lasciato per mezz'ora rinnovando un paio di volte, ed infine ho lavato ripetutamente ed abbondantemente in acqua distillata. Con questi trattamenti ho ottenuto l'allontanamento completo della cellulosa dalle membrane.

Dopo queste operazioni una parte delle sezioni sono state montate in clorioduro di zinco, in cui le membrane sono rimaste perfettamente incolori, mentre nell'interno delle cellule si notano le note arborescenze di cellulosa precipitata, che conserva invece ancora questa reazione.

Altre sezioni trattate invece con ematossilina Delafield mantengono la proprietà di colorarsi intensamente in violetto, dimostrando così nelle membrane la presenza di sostanze pectiche.

Come si vede questo metodo differisce dall'altro microchimico in uso soltanto nei trattamenti dei composti cuprici, che successivamente vengono a costituire in sito lo stesso reattivo di Schweizer con procedimento estremamente semplice e rapido ed in condizioni migliori per esercitare la sua azione solvente.

Posso quindi concludere che il nuovo metodo Paternò, da me modificato come è stato descritto, può essere vantaggiosamente esteso anche nel campo microchimico in sostituzione dell'altro che usa il liquido di Schweizer preventivamente e laboriosamente preparato a parte.

**Mineralogia.** — *Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica.* Nota di G. ANDREATTA, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Zoologia.** — *Sull'embriogenesi degli ibridi fra Bufo vulgaris e Bufo viridis* <sup>(1)</sup>. Nota di G. MONTALENTI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. F. RAFFAELE.

È noto dalle ricerche del Pflüger, del Born e da quelle più recenti di G. Hertwig <sup>(3)</sup> che l'ibridazione fra le due specie di rospi comuni in Italia dà risultati molto diversi nei due incroci reciproci. L'incrocio *Bufo vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂ dà origine a larve vitali, capaci di superare la metamorfosi; l'incrocio reciproco, *B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂ produce invece embrioni anormali, di cui alcuni si sviluppano in larve più o meno profondamente inibite, incapaci di metamorfosare. Ambedue gli incroci danno « ibridi veri » secondo la terminologia proposta dal Hertwig: cioè ibridi in cui avviene l'anfimissi e la cromatina paterna non viene eliminata dal nucleo dello zigote, come accade in alcuni altri incroci interspecifici fra Anuri.

Risultati simili furono ottenuti anche in alcuni ibridi fra diverse specie di Teleostei, specialmente del genere *Fundulus* (Moenkhaus, Newman) e di Echinodermi (Newman) <sup>(4)</sup>.

Nella primavera del 1930 e in quella del 1931 ebbi occasione di eseguire un buon numero delle ibridazioni suddette e constatai che i risultati, che qui intendo brevemente riassumere, sono, per quanto riguarda l'embriogenesi, perfettamente comparabili a quelli ottenuti con alcune specie di Teleostei e di Echinodermi.

*Incrocio Bufo viridis* ♀ × *Bufo vulgaris* ♂. — Da questo incrocio si ottiene una serie di anomalie che rientrano perfettamente nel quadro delle malforma-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) E. PFLÜGER, « Arch. f. ges. Physiol. », XXIX (1882); XXXII (1883); G. BORN, ibid. XXXII (1883), « Arch. f. mikr. Anat. », XXVII (1886); G. HERTWIG, « Arch. f. mikr. Anat. », XCI (1918).

(4) W. J. MOENKHAUS, « Am. Jour. of Anat. », III (1904); H. H. NEWMAN, « Jour. Exp. Zool. », XVIII, (1915); XX (1923); « Biol. Bull. », XXXII (1917).

zioni ottenibili, negli Anfibi e in altri Vertebrati, con numerosi altri mezzi sperimentali (irradiazione dei gameti o degli embrioni con raggi X o U. V., trattamento con soluzioni saline, anestetici, azione della temperatura, ecc.). Le alterazioni della morfogenesi e della istogenesi presentano una notevole somiglianza in particolare con quelle che si ottengono con i raggi X, e indicate da O. Hertwig col nome di *Radiumkrankheit*.

La massima parte delle uova, dopo la fecondazione con gli spermî stranieri, si orienta, e la segmentazione procede regolarmente, senza apparente ritardo rispetto ai controlli (uova di *B. viridis* normalmente fecondate). Una parte delle blastule che si formano, tuttavia, non mostra neppure un accenno di gastrulazione: dopo uno o due giorni esse muoiono senza che si sia verificato alcun progresso nello sviluppo. In molte uova la gastrulazione avviene in modo affatto anormale e stentato; ne risultano, a seconda del grado di intensità della alterazione del processo, gastrule equatoriali, che per lo più non progrediscono ulteriormente, spine bifide, che danno luogo talvolta a eniembrioni laterali, o embrioni che presentano ulteriore differenziamento, ma con asintassia del blastoporo più o meno grave. La vita di questi embrioni è, naturalmente, limitata, e tutti muoiono in stadî più o meno precoci, benchè alcuni di quelli che non chiudono il blastoporo possano procedere ancora notevolmente nello sviluppo.

In altri embrioni la gastrulazione avviene in modo apparentemente normale, sempre però è ritardata rispetto ai controlli. Alla gastrulazione normale succede tuttavia uno sviluppo che in nessun caso può dirsi perfetto. Alcuni embrioni sono incapaci di chiudere la gronda neurale, che rimane aperta in tutta la sua lunghezza o soltanto nella parte anteriore, più o meno ampiamente (anencefalia). Altri invece completano questo processo e non differiscono esternamente dai controlli se non per l'arretrato sviluppo. Questi formano però girini singolarmente deformati e contorti, già rappresentati dal Hertwig e simili ad alcuni di quelli che si ottengono con l'irradiazione. Si osservano tutti i gradi di inibizione, che colpisce particolarmente il sistema nervoso: dai casi di cervelli massicci e non differenziati a gravi riduzioni dell'encefalo precordale, con anoftalmia, microftalmia, sviluppo asimmetrico degli occhi, accompagnati da riduzioni più o meno gravi di tutta la regione cefalica e del vestibolo orale, fino a casi di inibizione relativamente lieve del telencefalo. A queste inibizioni si accompagnano riduzione del cuore e delle branchie, dei somiti, accorciamento del corpo, ecc. Sempre i girini sono di dimensioni inferiori alla norma, e non di rado presentano grave idropisia. Queste larve si liberano dalle membrane dell'uovo e cadono sul fondo del cristallizzatore in stadî più precoci di quello a cui avviene la schiusa dei controlli. Alcune, le meno inibite, possono vivere fino a 20-25 giorni, ma nessuna si avvia alla metamorfosi.

All'esame istologico l'analogia con la *Radiumkrankheit* si fa anche più manifesta. Il tessuto nervoso è il più gravemente colpito: nelle cellule, e

fra di esse, si depositano masserelle di pigmento; zone necrotiche sono disseminate per tutta la lunghezza del tubo neurale; alcune cellule, con nuclei picnotici, cadono nel lume del tubo e si disfanno. L'epidermide è fragile, presenta numerose cellule in via di disfacimento e si rompe facilmente, specialmente nella regione ventrale, lasciando uscire tuorlo, che intorbida lo spazio perivitellino e poi l'acqua del recipiente. Si osserva notevole riduzione anche delle fibre muscolari, somatiche e cardiache, fra le quali pure si deposita abbondante pigmento. Meno gravemente affetti sembrano il mesenchima, il tessuto della corda (la corda è, in alcuni casi, più grande del normale) e la cartilagine, la quale è pressochè normalmente differenziata negli embrioni meno profondamente inibiti.

L'idea della specificità dell'azione teratogena dei vari agenti, che i primi sperimentatori avevano ammesso, e che spesso ricomparve nei lavori più recenti, è ormai definitivamente abbandonata, perchè si è visto che numerosissimi agenti di diversa natura producono risultati essenzialmente simili. Non fa meraviglia quindi se le inibizioni ottenute con l'ibridazione sono simili a quelle che si possono produrre in molti altri modi. Per quel che riguarda la loro varietà, ricorderemo che si ammette generalmente che tutte le anomalie come quelle su ricordate siano quantitativamente anzichè qualitativamente differenti: a disturbi più gravi corrispondono, in linea generale, anomalie della gastrulazione, più o meno pronunciate, a disturbi sempre meno intensi, inibizioni di vario grado dello sviluppo successivo.

È interessante tuttavia notare la somiglianza dell'azione del radio (che gli autori considerano in certa misura elettiva per la cromatina) con quella di una cromatina estranea. Ma soprattutto è importante il fatto che con il radio (e altri agenti teratogeni) per ogni dose si ottiene prevalentemente un certo tipo di alterazione, e con l'aumentare della dose cresce, sebbene non in modo rigorosamente proporzionale (cfr. Pasquini <sup>(1)</sup>) la gravità delle inibizioni. *Nel caso della ibridazione invece si ottiene una vasta serie di anomalie, che va da alterazioni profonde e precoci dello sviluppo, a casi di sviluppo quasi normale.*

*Incrocio Bufo vulgaris* ♀ × *Bufo viridis* ♂. — Interamente diverso è l'aspetto che offrono le colture degli embrioni di questo incrocio. Anche qui la percentuale delle uova che si orientano non è dissimile da quella dei controlli (*B. vulgaris*) e la segmentazione sincrona con questi. La gastrulazione avviene con molta maggiore regolarità e senza ritardo. Una piccola percentuale di embrioni, tuttavia, presenta qualche anomalia che porta alla morte in stadî precoci; alcune delle larve presentano nanismo e idropisia e muoiono prima della metamorfosi; probabilmente sono aploidi, come ha dimostrato G. Hertwig. La maggior parte delle uova produce invece girini

(1) P. PASQUINI, « Arch. Zool. It. », XV (1931).



vitali, molti dei quali metamorfosano (la mortalità non è sensibilmente diversa da quella dei controlli).

Dopo una ventina di giorni dalla fecondazione, nelle vasche contenenti gli ibridi, alcuni girini avevano assunto proporzioni molto maggiori degli altri ibridi e dei controlli. Tutti erano nelle stesse condizioni di luce e di temperatura, le vasche erano presso a poco egualmente popolate e provviste di pari razioni di cibo (alghe e carne di *Anodonta*). A 5 settimane dalla fecondazione fu misurata la lunghezza totale di 87 girini ibridi, vivi, prove-

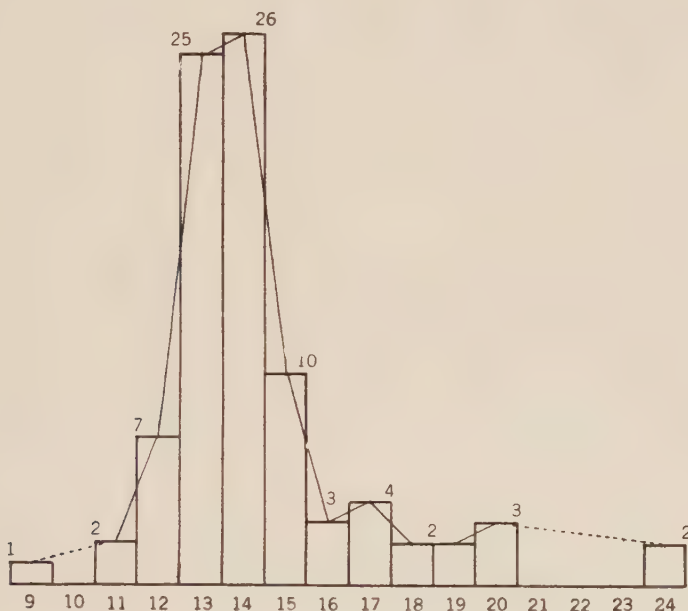


Fig. 1. — Curva della variabilità della statura di 87 girini ibridi fra *Bufo vulgaris* ♀ e *B. viridis* ♂, all'età di cinque settimane. Sulle ascisse lunghezza totale in millimetri, sulle ordinate numero degli individui.

nienti da tre vasche. I risultati sono rappresentati dal grafico (fig. 1) che dimostra come la maggior parte degli individui sia disposta con sufficiente regolarità intorno alla media di circa 14.5 mm. Oltre a un girino insolitamente piccolo, se ne trovano alcuni che superano sensibilmente le dimensioni medie, e due, su questa popolazione di 87 girini scelti a caso, sono relativamente giganteschi (24 mm.). È da osservare che l'asimmetria della curva probabilmente scomparirebbe se si tenesse conto delle larve anormali o inibite (morte nel frattempo) che troverebbero posto lungo il ramo sinistro. Tutti gli individui di questa popolazione provengono da uova di una sola femmina fecondate con spermî di un solo maschio.



I risultati di questo incrocio sono costanti: in diverse serie di esperimenti si sono sempre sviluppati alcuni girini più grandi del normale. La misura dei nuclei in alcuni tessuti (epidermide e parte caudale del midollo spinale), per stabilire se si trattava di casi di poliploidia, non diede risultato positivo; nessuna differenza significativa fu potuta stabilire fra le dimensioni dei nuclei di girini giganteschi e di quelli di statura normale. È probabile quindi che si tratti di casi di accelerazione dello sviluppo, come quelli trovati dal Newman in alcuni incroci di Pesci.

Il risultato di questo incrocio è dunque alquanto diverso da quello della fecondazione normale del rospo comune. I dati statistici sono insufficienti per comparare la curva della variabilità per la statura degli ibridi con quella dei controlli, ma è evidente che in questi ultimi, *oltre a girini che si sviluppano in modo anormale e a quelli che presentano uno sviluppo normale, se ne trovano alcuni che hanno lo sviluppo in qualche modo accelerato, o comunque superiore al normale.*

*Considerazioni generali.* — Varie opinioni sono state espresse sulla causa del diverso risultato degli incroci reciproci. Il Newman, scartata la possibilità che il nucleo estraneo eserciti un'azione tossica sull'uovo, e dopo avere riconosciuta l'importanza della dimensione delle uova e della consistenza e proprietà chimiche del tuorlo, è incline a dare la maggiore importanza al fatto che « in introducing a foreign sperm into an egg, we either accelerate or retard the developmental rate of the egg ». Egli infatti dimostrò che la velocità di sviluppo degli ibridi è ritardata o accelerata rispetto ai controlli: nel primo caso si hanno larve inibite, nel secondo larve anche meglio sviluppate. La relazione fra la velocità di sviluppo e la comparsa di inibizioni è ammessa anche dallo Stockard<sup>(1)</sup> il quale, a proposito dei teratomi ottenuti con vari agenti inibitori, così si esprime: « the primary action of all the treatments is to inhibit the rate of development ».

G. Hertwig<sup>(2)</sup> diede un'altra interpretazione proprio per il caso di questi incroci fra i rospi. Egli ammette che il nucleo secerna enzimi specifici (*artspezifisch*) per la digestione del tuorlo. Misurando il volume dei nuclei e il rapporto nucleo-plasmatico nelle due specie e negli ibridi del secondo incrocio, giunse alla conclusione che questi si trovano in condizioni più favorevoli degli altri perchè la quantità della sostanza cromatica della propria specie (la sola, secondo il Hertwig, che può emettere enzimi capaci di digerire il tuorlo) sarebbe, relativamente al volume del plasma, maggiore di quella posseduta dagli ibridi del primo incrocio.

Indubbiamente un fattore di specificità deve intervenire nelle diverse ibridazioni, e la digestione del tuorlo ha un'importanza che è stata ricono-

(1) C. R. STOCKARD, « Am. Jour. of Anat. », XXVIII (1921).

(2) G. HERTWIG, « Zeit. f. Anat. u. Entwicklungsgesch. », XCII (1930).

sciuta da tutti coloro che hanno studiato gli incroci di Pesci e Anfibi. In questo caso però va tenuto anche presente che lo sviluppo delle due specie di rospi avviene con velocità diversa. A parità di condizioni esterne la segmentazione e la organogenesi sono più lente nel *B. vulgaris* che nel *B. viridis*. Le uova sono più piccole in quest'ultimo, ma, poichè il rapporto nucleo-plasmatico è stato dimostrato eguale nelle due specie, dal lavoro citato del Hertwig, è logico pensare che si tratti di una differenza non dipendente semplicemente dalla dimensione relativa delle uova, ma sintomo di differenze fisiologiche caratteristiche. L'embriogenesi degli ibridi fra *B. viridis* ♀ e *B. vulgaris* ♂ è evidentemente rallentata e dà prodotti anomali; quella degli ibridi dell'incrocio reciproco non sembra, in media, sensibilmente accelerata (probabilmente, in un primo tempo è ritardata) ma alcuni casi di sviluppo accelerato si verificano con certezza.

*Esiste pertanto in questi ibridi una correlazione fra le velocità di sviluppo proprie delle due specie e i risultati della embriogenesi: questa è più o meno profondamente alterata se si introducono spermî della specie a sviluppo più lento nelle uova a sviluppo più rapido, normale o accelerata se si introducono spermî della specie a più rapido sviluppo nelle uova più lente.*

Non si vuol vedere in questo fatto la sola causa del diverso successo dei due incroci, escludendo fattori specifici e la relazione quantitativa fra la sostanza nucleare della propria specie e il tuorlo, ma, poichè in molti altri casi, specialmente fra i pesci, si verificano condizioni simili, è probabile che la relazione fra le velocità di sviluppo caratteristiche delle due specie abbia, per il risultato della ibridazione, un'importanza notevole.

Un altro fatto degno di nota è l'ampia serie di variabilità che si osserva nel processo dello sviluppo di ambedue gli incroci. Con una sola causa, l'ibridazione, che si può supporre agisca in modo uniforme su tutte le uova, si ottengono, nel primo caso, tutti i gradi di inibizione, fino a sviluppo quasi normale, nel secondo, parimenti, tutti i gradi fra sviluppo deficiente, normale e supernormale. Con agenti inibitori di natura chimica o fisica, come si è detto, si ottiene, per ogni dose, prevalentemente un tipo di anomalia; con dosi intermedie fra le estremamente leggere e le fortissime si ha pure una variabilità notevole, che ricorda quella degli ibridi. In questi ultimi, tuttavia, data l'uniformità dello stimolo, sembra poco probabile che la causa di questa ampia variabilità sia da ricercarsi soltanto in fattori contingenti, quali potrebbero essere condizioni d'ambiente o diverso stato di freschezza della uova ecc. Difficilmente si spiegherebbero in tal modo i diversi gradi di anomalie, tutte di così grave momento, e, soprattutto, i casi di sviluppo accelerato, nonchè la notevole costanza dei risultati, nell'uno e nell'altro incrocio. È perciò ragionevole pensare che la causa della variabilità sia da ricercarsi in condizioni inerenti alla costituzione intima dei gameti, e quindi dello zigote. Un'opinione simile è stata espressa dal Newman, il quale sostenne che non si possono interpretare altrimenti che

su basi genetiche la « debolezza » e la « vigoria » delle larve che si ottengono dallo stesso incrocio. Questa ipotesi non si può ritenere dimostrata e manca completamente lo studio statistico, che forse potrebbe illuminarci in proposito, ma è resa assai plausibile dalla costanza dei risultati in ogni singolo incrocio, e dalla analogia dei fenomeni osservati negli ibridi interspecifici di Echinodermi, Pesci, Anfibi.

**Biologia (Batteriologia).** — *La coagulazione del latte per opera del B. typhi e di altri batteri ritenuti inattivi sul latte*<sup>(1)</sup>. Nota di COSTANTINO GORINI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio P. R. PIROTTA.

In precedenti lavori<sup>(3)</sup> ho dimostrato che mediante diversi accorgimenti di cultura si riesce a mettere in luce proprietà coagulanti sul latte in batteri che ne sono ritenuti sprovvisti, specialmente fra alcune specie parassite acidoproteolitiche, le quali coagulano prevalentemente per azione chimasica anzichè per acidificazione.

I principali accorgimenti sono i seguenti:

1° impiego di latte sterilizzato blandamente per tinalizzazione non oltre i 100° C. in guisa da conservargli la sua tinta bianca.

2° aggiunta di sostanze stimolanti (sangue defibrinato, peptone, estratto di carne, acqua di lievito, vitamine del commercio ecc.).

3° forte dose di semente.

4° prolungamento dell'incubazione a temperatura opportuna.

L'applicazione di questi accorgimenti ha già condotto a utili revisioni di giudizio sul comportamento dei batteri nel latte; agli esempi recati in precedenti lavori ne aggiungerò fra i più recenti quelli relativi alla classificazione dei *B. metadissenterici* (Castellani<sup>(4)</sup>) e degli *Streptococchi mastitici* (Minnett-Edwards<sup>(5)</sup>); avendo aumentato la durata dell'incubazione e la dose della semente si è dovuto sopprimere certi generi o tipi che si era creduto di poter distinguere dagli altri in base alla supposta incapacità di coagulare.

Tuttavia, malgrado tutti questi accorgimenti, nel proseguimento delle mie ricerche ho incontrato varietà o meglio ceppi batterici che danno esito negativo o stentato e inconstante.

Recentemente però ho introdotto un perfezionamento che permette di raggiungere lo scopo in modo più semplice e più sicuro. È un perfeziona-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(3) « Rend. R. Acc. Lincei », 26, p. 195 (1917); 4, p. 399 (1926); « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 56, p. 994 (1923); 60, p. 644 (1927).

(4) « Giorn. Batt. Imm. », 2, p. 433 (1927).

(5) « Journ. comp. Path. Ther. », 45, p. 43 (1932).

mento che deriva dalle mie antiche osservazioni sulle chimasi del *B. prodigiosum* (1892-93<sup>(1)</sup>); io avevo allora dimostrato che questo microbo produce chimosina anche in terreni privi di caseina e che uno dei terreni più propizi è l'agar comune. In seguito ho ripetuto quest'osservazione sopra altri batteri acidoproteolitici<sup>(2)</sup>, cosicchè mi sono convinto che la formazione di chimasi non è una funzione di adattamento ma una funzione normale dei batteri, indipendente dalla presenza del latte e della caseina.

In base a ciò ho ideato il seguente processo: prendere delle culture ben sviluppate su agar obliquo, versarvi sopra del latte blandamente sterilizzato fino a ricoprire tutta la patina, rimescolare bene coll'ago di platino la patina nel latte sovrastante, rimettere le culture in termostato a 37-38° C. e tenervele il più a lungo possibile, osservandole giornalmente per l'eventuale coagulazione. Come si vede, in questo processo si trovano riuniti l'abbondanza di semente colla presenza di stimolanti e di chimasi. Si può rinforzare gli stimolanti impiegando dell'agar-sangue o dell'agar-lievito invece dell'agar comune. Con questo processo ho ottenuto la coagulazione del latte da parte di germi che per altra via si erano dimostrati negativi; sono particolarmente degni di nota alcuni tipi di *Streptococchi parassiti*, dei quali quattro provenienti dalla American Type Cultures Collection (*Str. equi* n. 827, *Str. scarlatinae* n. 4014 e *Str. measles* n. 4076 e 4077) due ceppi di *Str. agalactiae* favoriti dal D. Diernhofer della Scuola Superiore Veterinaria di Vienna, un ceppo di *Str. equi* favoriti dal prof. Klimmer della Scuola Superiore Veterinaria di Lipsia, un ceppo di *Str. rheumaticus* favoriti dal dott. Farrell della Lehigh University di Bethlehem, Pennsylvania (Stati Uniti d'America).

Solamente dopo averli sottoposti alla suddetta prova ho potuto accertare che anche questi streptococchi, in conformità alle mie ricerche sul potere acidoproteolitico degli *Streptococchi parassiti*, rapprendono il latte con coagulo chimasico debolmente acido e ridisolventesi, onde essi pure calzano alle mie vedute circa la *capacità coagulante di tutti gli streptococchi*, in appoggio alla dottrina dell'unicità degli *Streptococchi*<sup>(3)</sup>.

Questi risultati mi indussero ad estendere la prova al *B. typhi*, nel quale ho già dimostrato proprietà caseolitiche mediante un processo alquanto complicato e incostante<sup>(4)</sup>. Ho esaminato 12 ceppi di *B. typhi* di diversa provenienza. Tutti coagularono il latte versato su agarculture di 3 giorni a 38° C.; la coagulazione avvenne in capo ad un'incubazione che variò da 8 a 23 giorni a 38° C. e precisamente: due ceppi coagularono dopo 8 giorni, tre dopo 9 giorni, due dopo 11 giorni, due dopo 12 giorni, uno dopo 15, uno dopo 17 e uno dopo 23 giorni. Il coagulo è molliccio, gela-

(1) « Rivista Igiene e Sanità Pubblica », 3, p. 527 (1892); 4, p. 549 (1893).

(2) « Rend. Acc. Pont. Nuovi Lincei », 83, p. 66 (1930).

(3) « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 60, p. 644 (1927).

(4) « Rend. R. Acc. Lincei », 4, p. 399 (1926).



tinoso, alcalino, prettamente di natura presamica; conservato in termostato od anche nell'ambiente esso va lentamente ingiallendo, retraendosi, costipandosi e lasciando fuoruscire del siero giallastro, alcalino. Il germe rimane vitale ancora dopo oltre un mese a 38° C. La differenza nel tempo impiegato per la coagulazione può essere messa in rapporto non solamente colla diversa natura del ceppo, ma anche col diverso sviluppo della agarcultura prima dell'aggiunta del latte, il che influisce sia sul numero delle cellule sia sulla quantità di chimasi presente; ciò emerge dalle prove comparative fatte con culture di diversa età del medesimo ceppo. Superfluo avvertire che le culture parallele eseguite come d'ordinario in latte non coagularono nemmeno dopo due mesi di incubazione. Ho accertato la presenza di chimasi nelle agarculture di *B. typhi* col medesimo metodo usato per il *B. prodigiosum*, stemperando in glicerina la raschiatura delle culture e verificandone il potere coagulante sopra latte fresco a 40° C.

Ho esteso la prova ad altri germi parassiti che sono considerati inattivi sul latte, quali il *B. Morgani* dell'intestino e il *B. lypolyticum* delle mammelle; ho ottenuto esito positivo con entrambi. Sopra due ceppi di *B. Morgani*, uno coagulò dopo 17 giorni, l'altro dopo 25 giorni di incubazione; sopra due ceppi di *B. lypolyticum* uno coagulò dopo 11 giorni, l'altro dopo 18 giorni di incubazione.

Tutti i coaguli erano molli con reazione alcalina e andavano gradatamente ridisciogliendosi.

L'azione caseolitica di questi germi è tanto più significativa in quanto si tratta di specie che al pari del *B. typhi* e degli *Streptococchi succitati* non fondono la gelatina; si ripete quanto io ho già dimostrato da tempo (1907-1910<sup>(1)</sup>) nei riguardi di altri batteri, (*B. minimus mammae* G. seu *B. pyogenes bovis*; *Mammococcus-Caseococcus* G.), che cioè l'azione proteolitica dei batteri sulla gelatina è indipendente dall'azione proteolitica sulla caseina. Soggiungerò però di avere pure dimostrato che il filtrato sterile di culture caseolitiche ha spiegato azione fluidificante sulla gelatina; per cui non si può concludere ancora per una specificità di enzimi.

Riserbandomi di continuare questo ordine di ricerche, ne traggio fin d'ora argomento per rafforzare i risultati delle mie precedenti ricerche sulla produzione della chimasi batterica, e cioè:

- 1° che essa è diffusa fra i batteri parassiti;
- 2° che essa non costituisce una funzione di adattamento ma una funzione normale dei batteri, che è indipendente dalla presenza di latte e caseina;
- 3° che essa è propria anche di batteri che sono comunemente considerati inattivi sul latte nelle culture ordinarie (*B. typhi*, *B. morgani*, *B. lypolyticum*);

(1) « Rend. R. Ist. Lomb. », 40, p. 947 (1907); 41, p. 122 (1908); « Rend. R. Acc. Lincei », 19, p. 150 (1910).



4° che essa è propria anche di batteri che non fondono la gelatina, (*Streptococchi*, *B. typhi*, *B. morgani*, *B. typhimurium*) per cui le attività proteolitiche dei batteri sulla gelatina e sulla caseina sono fra loro indipendenti.

CONCLUSIONE. — Con un nuovo semplice procedimento culturale, consistente nel versare del latte blandamente sterilizzato sopra agarculture ben sviluppate, si riesce ad ottenere la coagulazione per opera del *B. typhi* e di altri batteri ritenuti inattivi sul latte.

**Fisiologia.** — *Azione dei vapori delle essenze vegetali e degli aromi animali sull'eccitabilità riflessa midollare* <sup>(1)</sup>. Nota di M. MIROLO, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una Nota precedente <sup>(3)</sup> mi sono occupato dell'azione inibitrice sullo sviluppo di alcuni batterii (colibacillo, stafilococco piogeno aureo, b. piociano), esercitata dai vapori di varie essenze vegetali, ed ho segnalato il comportamento differente dei vapori degli aromi animali, che non ostacolano affatto il normale sviluppo microbico. Ho voluto, con le presenti ricerche, studiare gli effetti degli stessi vapori di origine vegetale ed animale sull'attività riflessa del midollo spinale isolato e sopravvivate di *Bufo vulgaris* (preparato centrale Baglioni).

Di alcune proprietà farmacodinamiche delle essenze vegetali (non allo stato di vapori) si è interessato Binz <sup>(4)</sup>, il quale ha indagato l'azione anti-convulsivante delle essenze di valeriana, di camomilla, di cumino, di *eucalyptus*, sulla rana e su animali a sangue caldo, concludendo che l'intensità di questa azione dipende dalla dose e dalla natura delle essenze impiegate; in piccole quantità queste provocano aumento dell'eccitabilità riflessa, la quale però è solo transitoria, essendo subito seguita da uno stato depressivo. Anche Cadéac e Meunier <sup>(5)</sup> hanno fatto uno studio comparativo sull'azione fisiologica di alcune essenze di origine vegetale (di anice, di coriandro, di cannella, di limone, di garofano, di mirra, di melissa, di Neroli, ecc.), osservando quasi sempre azioni paralizzanti, precedute o no (per piccole dosi) da ipereccitabilità nervosa.

Mancano esperienze fisio-farmacodinamiche sull'azione dei vapori delle essenze vegetali sugli organi isolati, nonchè sull'azione dei vapori degli aromi animali.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

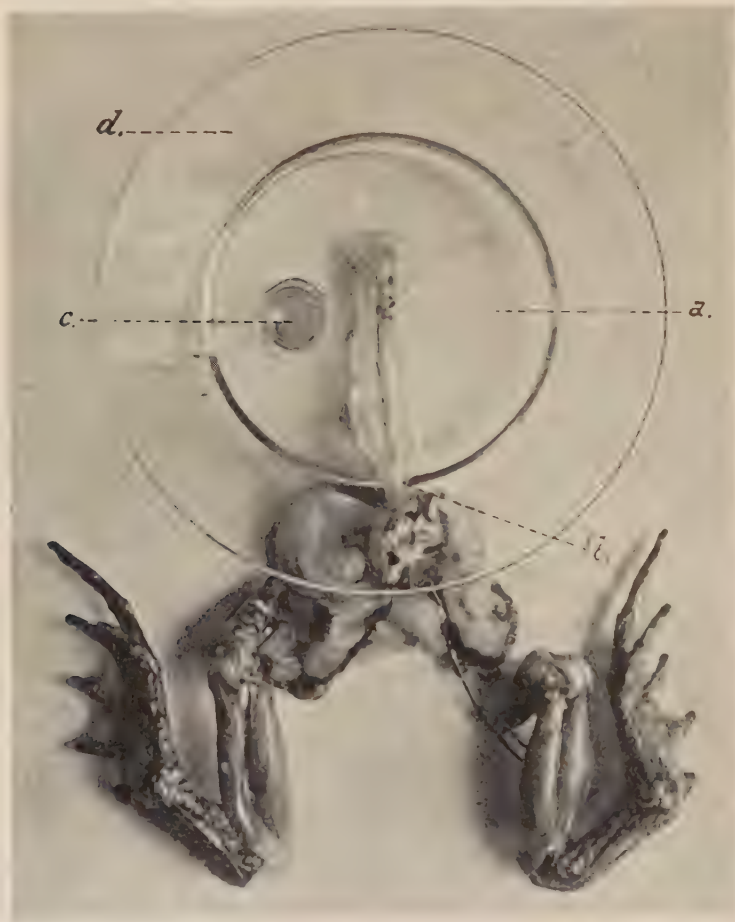
(2) Nella seduta del 1° maggio 1932.

(3) MIROLO, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », VII, 220 (1932).

(4) BINZ, « Arch. f. exp. Path. u. Pharm. », V, 109 (1875); VIII, 501 (1878).

(5) CADÉAC e MEUNIER, « Lyon Médical » (1899); ID. ID., « Rev. hyg. et pol. sanit. », XIII, 5, 208, 306; XIV, 659.

Nelle mie ricerche ho impiegato le essenze di bergamotto, di tremen-  
tina, di pino siberico e di mugo (mugolio o olio etereo di *Pinus pumillo*);  
degli aromi animali ho usato lo zibetto (in sostanza), il castoreo, l'ambra  
grigia ed il muschio Tonkino (prodotti originali). Il neurasse del preparato  
veniva adagiato su una listerella di ovatta (imbevuta di sol. di NaCl).



al 0,7% e di acqua ossigenata), posta sul fondo di una capsulina Petri *a* (v. fig.), del diametro di 4 cm., dell'altezza di 1 cm. e della capacità di cc. 19. Si faceva in modo che la cauda equina poggiasse sui bordi di una scanalatura *b* della capsulina; il resto del preparato trovavasi al di fuori, adagiato su batuffoli di cotone imbevuti di sol. fisiologica. Stabilito il grado iniziale di eccitabilità dei singoli preparati (mediante stimolazione meccanica — ogni 5' — dei tratti di cute), si poneva dentro la capsulina Petri un bicchierino *c* della capacità di cc. 0,4, contenente quantità varie dell'essenza vegetale, dei cui vapori si voleva sperimentare l'azione sul midollo spinale. Poichè l'ambra grigia, il castoreo ed il muschio Tonkino erano in sol. al-

coolica (rispettivamente al 3, al 50 ed al 3%), ponevo direttamente nella capsulina Petri cc. 1-2 della soluzione, di cui lasciavo evaporare l'alcool a bagno-maria, in modo che al fondo del recipiente rimanesse il residuo dell'aroma animale; in questa capsulina col residuo adagiavo il neurasse del preparato. Sia nell'uno che nell'altro caso la capsulina veniva chiusa con un vetro di orologio *d*, stipando la scanalatura del bordo con ovatta (bagnata di sol. fisiologica) che avvolgeva la cauda equina: si costituiva in tal modo, attorno all'asse cerebro-spinale, un ambiente confinato, in cui i vapori potevano concentrarsi e raggiungere il massimo grado di tensione. Dalle variazioni della intensità dello stimolo meccanico, necessaria per ottenere una contrazione riflessa dell'arto o dei due arti del preparato, si deducevano le modificazioni dell'eccitabilità riflessa midollare. Tutte le volte che si stabiliva la paralisi dei due arti, il preparato era sottratto all'azione dei vapori, posto in un cristallizzatore, trattato con  $H_2O_2$  e collocato in ambiente umido e fresco, allo scopo di osservarne l'eventuale reviviscenza.

Le conclusioni, tratte dalle numerose esperienze eseguite in proposito, sono le seguenti:

I vapori delle essenze vegetali sperimentate, anche in piccola concentrazione, si comportano come tossici per il midollo spinale di *Bufo v.*, nel senso che ne fanno diminuire, più o meno rapidamente, l'eccitabilità riflessa, inducendo la paralisi dei due arti del preparato in un tempo relativamente breve (in media 50'—1<sup>h</sup>); solo per concentrazioni minime dei vapori la paralisi può essere preceduta da aumento dell'eccitabilità riflessa, che però è sempre lieve e di breve durata. La paralisi non dipende dalla mancanza di ossigeno attorno ai centri, sia perchè il midollo trovasi in presenza di  $H_2O_2$ , sia perchè è stato precedentemente dimostrato (Baglioni, Mitolo) che un ambiente costituito di solo idrogeno o di solo azoto induce paralisi del preparato centrale in un periodo di tempo non superiore ai 45'; esiste inoltre la prova di controllo offertaci dall'azione differente dei vapori animali (v. dopo). Se, appena sopravvenuta l'ineccitabilità del preparato, esso si sottrae all'azione dei vapori e lo si trasferisce in ambiente umido ed ossigenato, si può avere, ma non sempre, la graduale ricomparsa dell'attività riflessa, che non raggiunge mai il grado iniziale; se invece si lasciano trascorrere 10' o più dallo stabilirsi della paralisi, il midollo spinale non è più capace, anche nelle migliori condizioni di ambiente, di riacquistare la perduta eccitabilità riflessa.

Al contrario, i vapori degli aromi animali sperimentati si comportano, rispetto al neurasse di *Bufo v.*, o come forti eccitanti (zibetto), o come deboli eccitanti (ambra grigia e castoreo), o come indifferenti (muschio Tonkino). Non si sono mai avuti fatti di paralisi ed il periodo di ipereccitabilità è stato massimo per lo zibetto, minimo per l'ambra grigia. È da notare che l'aumento dell'eccitabilità riflessa si è sempre mantenuto nei limiti fisiologici: mai si sono verificate convulsioni a tipo tetanico o clonico.



## INDICE DEL VOLUME XV, SERIE VI. — RENDICONTI

1932. Primo Semestre

### INDICE PER AUTORI

#### A

- ABETTI G. — « Altezza della cromosfera nel 1931 ». 258.
- AGAMENNONE G. — « Pendolo orizzontale ultrapotente a registrazione meccanica ». 382.
- ID. — « La riflessione delle onde sismiche agli antipodi causa di nuovi terremoti ». 729.
- ID. — « La presenza di onde lente nella fase preliminare di taluni sismogrammi ». 876, 960.
- ALIPPI T. — « Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa ». 457.
- ALLEGRETTI L. — « La struttura della riga 6708 del litio osservata in emissione ». 876.
- ANDREATTA G. — « Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica ». 994.
- ANDREOLI G. — « Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi. - I. Problemi variazionali ». 218, 272.
- ID. — « Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi. - II. Formazione e proprietà della coppia di varietà reciproche ». 218, 340.
- ANDRUETTO G. — « Le formule di Saint-Venant per gli spazi curvi a tre dimensioni ». 214.
- ANDRUETTO G. — « Le formule di Saint-Venant per le varietà  $V_n$  a curvatura costante ». 792.
- ANELLI M. — « Ricoprimento di terreni pliocenici nell'Appennino Reggiano ». 478.
- ANGELETTI M. — Vedi CORBELLINI A.
- ANTONIANI C. e ZANELLI F. — « Ricerche nel gruppo delle fitosterine. Sulle sterine dell'olio di vinaccioli ». 284.
- ARMELLINI G. — « Sopra l'incremento dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse decrescenti, con applicazioni alle orbite delle stelle binarie ». 701.

#### B

- BACCAREDDA M. — Vedi NATTA G.
- BARBIERI G. A. e TETTAMANZI A. — « Contributo alla conoscenza dei composti del cromo bivalente ». 877.
- ID., ID. — « Nuovi composti complessi del cianuro di argento col cianuro di sodio ». 887, 965.
- BARBIERI U. — « Stazione astronomico-geodetica eseguita nel vertice di 1° ordine Bric Torniola, nel luglio 1928 ». 669.
- BARONI A. — « Sull'esistenza dei cloruri politionici. Determinazione dell'indice di rifrazione delle soluzioni di zolfo nei cloruri di zolfo ». 234, 305.
- BERNSTEIN V. — « Sulla crescita delle funzioni olomorfe di tipo esponenziale ». 30.
- ID. — « Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet ». 948.



- BERTOLINI F. — «La autotomia dell'apparato digerente e la sua rigenerazione nelle Oloturie, come fenomeno spontaneo e normale». 765, 893.
- BETTI M. e PRATESI P. — «Costituzione chimica e potere rotatorio. Derivati delle aldeidi cloro- e bromo-benzoiche». 509.
- BIGAZZI R. — «Sopra una costante strutturale relativa ai passaggi di stato». 976.
- BLANC G. A. — «Persistenza di struttura anisotropa nella silice derivante dall'attacco della leucite con acidi». 189.
- BOCCIARELLI D. — «Ricerche sulla radioattività del potassio». 568, 686.
- BOGGIO T. — «Alcune formule vettoriali negli spazi curvi a tre dimensioni». 189.
- Id. — «Sopra un teorema di Siacci per il moto lungo una curva gobba». 721.
- BOMPIANI E. — «Sul contatto di due superficie». 43, 116.
- BONI A. — «Il Miocene del M. Vallassa». 893, 981.
- BONINO G. B. e CELLA P. — «Spettro Raman della chinolina e manifestazioni del legame Carbonio-Azoto». 235, 385.
- Id. — «Spettro Raman di alcuni derivati dell'anilina». 568.
- Id. — «Sullo spettro Raman della  $\Delta_2$  diidronaftalina». 572.
- BORTOLOTTI E. — «Deformazioni di specie superiore e sistemi di forme per una  $V_m$  in  $R_n$ ». 536, 603.
- BOTTINI O. — «Influenza dei cationi di scambio sulla ascesa capillare dell'acqua nel terreno». 883.
- BROGGI U. — «Sullo sviluppo di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n \left( \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \right)^n \right]$$

in serie di potenze crescenti di  $x$ ». 122.

- Id. — «Sulle equazioni differenziali lineari complete a coefficienti costanti». 514.
- Id. — «Una generalizzazione degli sviluppi in serie delle funzioni determinanti». 536, 615.
- Id. — «Serie di fattoriali ed equazioni alle differenze». 707.
- BRUNELLI P. E. — «Intorno ad alcuni valori

singolari delle velocità critiche degli alberi». 43.

- BRUSCAGLIONI R. — «Sulla forma delle frange d'interferenza ottenute da onde affette da astigmatismo puro con reticoli ad orientamento qualunque». 70.
- BURGATTI P. — «Di una classificazione dell'equazioni lineari del second'ordine alle derivate ordinarie fondata sulle relazioni ricorrenti». 490.

## C

- CACCIOPPOLI R. — «Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche». 713.
- CAGNASSO A. — Vedi CAMBI L.
- CALDONAZZO B. — «Osservazione sui tensori quintupli emisotropi». 840.
- CAMBI L. e DEVOTO G. — «L'azione di alcune sostanze organiche nella deposizione elettrolitica dello zinco». 27.
- CAMBI L., SZEGÖ L. e CAGNASSO A. — «Sul comportamento magnetico dei complessi. — IV. N, N-Dipropil-ditiocarbammati ferrici». 266.
- Id., Id. e Id. — «Sul comportamento magnetico dei complessi. — V. Di-butilditiocarbammati ferrici». 329.
- CAMBI L. e SZEGÖ L. — «Sui solfosali di rame e ferro». 599.
- CAMPEDELLI L. — «Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine». 203.
- Id. — «Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine». 358.
- Id. — «Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine». 536.
- CAPOULADE J. — «Sur les arcs frontières rendus impropres par les singularités des coefficients dans le problème de Dirichlet pour les équations du second ordre et du type elliptique à deux variables». 813, 844.
- CARPANESE T. — «Granato, vesuviana, ilmenite e titanite del Monte Rosso di Verra (Gruppo del Monte Rosa)». 591, 694.

- CASSINA U. — « Sul pendolo di lunghezza variabile ». 950.
- CELLA P. — Vedi BONINO G. B.
- CHECCHIA-RISPOLI G. — « "Sanfilippaster", nuovo genere di Echinide del Cretaceo superiore ». 235, 313.
- CHERUBINO S. — « Su di una proprietà delle curve intuitive sghembe ». 357, 424.
- CIBRARIO M. — « Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di second'ordine di tipo misto ». 536, 619.
- CIORANESCU N. — « La détermination d'une fonction harmonique par des conditions initiales globales ». 638.
- CISOTTI U. — « Moto con scia di un profilo flessibile ». 165.
- ID. — « Moto con scia di un profilo flessibile; azioni dinamiche ». 253.
- ID. — « Sui tensori doppi a divergenza unica ». 835.
- CLEMENTE P. — « Nuove formule di miglioramento per le soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine ». 870, 925.
- COLLA S. — « Ricerche sul movimento degli stami in alcune berberidacee. — Azione di stimoli sottolimali multipli a bassa frequenza ». 766, 829.
- COLONNETTI G. — « A proposito della influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa ». Nota I. 549.
- ID. — « A proposito della influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa ». Nota II. 558, 646.
- CONFORTO F. — « Considerazioni sugli impulsi nei corpi elastici isotropi ». 55, 130.
- ID. — « Sugli impulsi nei corpi elastici isotropi ». 558, 649.
- CONSIGLIO A. — « Ostacolo ellittico girevole, investito da una corrente piana irrotazionale ». 669, 724.
- CONTI G. — « Contributo allo studio della variazione della latitudine ». 381, 453.
- CORBELLINI A. e PIZZI C. — « Sulla stereoisomeria dei derivati 2, 2' - disostituiti del difenile ». 235, 287.
- CORBELLINI A. e ANGELETTI M. — « Sulla stereoisomeria dei derivati 2,2' - disostituiti del difenile ». 887, 968.
- COTRONEI G. — « Costituzione zoologica e trapianti. Ricerche tra Anuri e Urodeli. Considerazioni ». 236.
- ID. — « Osservazioni preliminari sui trapianti di abbozzi di cuore tra Anuri e Urodeli ». 901.
- CRENNA M. — « Sulle congruenze di Ribaucour deformabili ». 362.
- CRINÒ B. — Vedi ROSSI B.
- CROCCO G. A. — « Di una condizione di sicurezza nell'avvitamento dei velivoli ». 5.
- CURZI M. — « Contributo alla conoscenza della biologia e della sistematica degli stipiti dello "Sclerotium Rolfii" ». 241.

## D

- D'ANCONA U. — « La fibra muscolare striata varia di volume durante la contrazione? ». 765, 908.
- DANIN Z. — « Sul contenuto gassoso dei cenobii di "Rivularia polyotis (J. Ag.) Hauck" ». 317.
- ID. — « Ricerche sul contenuto gassoso di alcune alghe. — Sui gas contenuti in "Enteromorpha compressa J. Ag." ». 766, 831.
- DA RIOS L. S. — « Cilindri rotori autorotanti ». 952.
- DE CARLI F. — « Solubilità del gluconato di calcio in presenza di fosfato sodico e di acido arsenioso ». 579.
- ID. — « Proprietà delle soluzioni di cloruro di calcio ed urea ». 584.
- ID. — « I composti dell'urea con i bromuri alcalino-terrosi ». 747.
- DEL CHIARO A. — « Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz ». 949.
- DE MIRA FERNANDES A. — « Sul problema brachistocrono di Zermelo ». 47.
- ID. — « Sulla teoria unitaria dello spazio fisico ». 720, 797.
- DESIO A. — « Sulla presenza dell'Eocene nel Fezzan Orientale (Tripolitania) ». 827.
- DEVOTO G. — « Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi. — VII. Costante dielet-

- trica e momento elettrico in soluzione acquosa». 471.
- DEVOTO G. — «La suscettibilità magnetica delle uree, delle isouree e della solfamida». 888, 973.
- ID. — Vedi CAMBI L.
- DRAGONE-TESTI G. — «Un nuovo metodo microchimico per la separazione della cellulosa nelle membrane vegetali». 992.
- DUBREIL-JACOTIN M. L. — «Sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes». 814.
- DU VAL P. — «Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche». 219, 276.
- ID. — «Osservazioni sulle superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche». 345.

## F

- FAMIANI V. e ZAGAMI V. — «Raffronti tra il valore ricostruttivo di alcuni legumi e quello del grano». 976.
- FAMIANI V. — Vedi anche ZAGAMI V.
- FANO G. — «Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli». 3.
- FANTAPPIÈ L. — «Nuova dimostrazione della formula fondamentale per i funzionali analitici lineari». 850.
- FRANCESCHI O. — «Studio proiettivo dell'intorno di una superficie». 865.
- FUBINI G. — «Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs ed uno del Severi». 499.

## G

- GALLINO L. — Vedi OCCHIALINI A.
- GARELLI F. e RACCIU G. — «Il trifenilfosfato come solvente in crioscopia». 976.
- ID., ID. — «Il fosfato trifenilico come solvente crioscopico». 981.
- GATTI D. — Vedi MASCARELLI L.
- GEYMONAT L. — «Un'osservazione su di un Teorema di Carathéodory per le funzioni armoniche». 856.

- GHERMANESCO M. — «Sur l'équation de Laplace». 870, 932.
- GIORGIO G. — «Nuove idee sulla teoria di relatività». 177.
- ID. — «Su alcuni sviluppi nuovi del calcolo operatorio funzionale». 501.
- GOLDBERGER S. — Vedi MADON F. V.
- GOMES R. L. — «Sur l'existence de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche». 453, 533.
- ID. — «Sur les limites de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche». 642.
- GORINI C. — «La coagulazione del latte per opera del B. typhi e di altri batteri ritenuti inattivi sul latte». 908, 1000.
- GRAFFI D. — «Gli invarianti adiabatici come metodo di integrazione approssimata di equazioni differenziali». 657.
- GUGINO E. — «Sulla curvatura geodetica delle linee di uno spazio riemanniano ad  $n$  dimensioni». 610.

## H

- HAIMOVICI M. e POPA E. — «Corrispondenza per piani tangenti paralleli». 949.
- HAMBURGER H. — «La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — I. Remarques sur la théorie générale de la transformation de Ribaucour». 870, 936.
- ID. — «La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — II. Application de la transformation de Ribaucour à la représentation sphérique et à quelques autres problèmes». 870.
- HOSTINSKY B. — «Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires». 949.

## I

- INFELD L. — «Remarques sur le problème de la théorie unitaire des champs». 55, 157.

## J

- JOLLES Z. — «Sopra le diazoresine». Nota I. 235, 292.
- ID. — «Sopra le diazoresine». Nota II. 297, 395.

JUCCI C. e MANUNTA C. — « Sulla sostanza colorante dei bozzoli dei bachi da seta di razza verde giapponese ». 405, 473.

## K

KOLMOGOROFF A. — « Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. (Un problema di Bruno de Finetti) ». 357, 805.

ID. — « Ancora sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo ». 866.

KOURENSKY M. — « Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes ». 284, 348.

KRALL G. — « Intorno agli effetti asintotici delle maree sul moto dei corpi celesti. — I. Generalità e problema dei 2 corpi ». 219.

ID. — « Intorno agli effetti asintotici delle maree sul moto dei corpi celesti. — II. Problema dei 3 corpi ». 225, 371.

ID. — « Mete lontane del moto di un sistema planetario ». 558, 664.

## L

LABOCCETTA L. — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — I. Somministrazione delle funzioni puntiformi ». 949.

ID. — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — II. Riduzione a tipi normali e integrali fondamentali ». 949.

ID. — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — III. Funzioni periodiche ». 949.

LAKHOVSKY G. — « Le onde cosmiche e l'oscillazione cellulare ». 316, 403.

LAMPARIELLO G. — « Sopra un'equazione alle derivate parziali del 4° ordine ». 35.

ID. — « Sull'instabilità dei vortici elicoidali ». 432.

LA ROSA M. — « Sulla pretesa realtà della contrazione di Lorentz e sulla determinazione del moto assoluto della Terra ». 502.

LEVI-CIVITA T. — « Teoremi di unicità e di esistenza per le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso prossimo alla forma circolare ». 409.

LOMBARDI D. — « Osservazioni sulla struttura del nucleo nelle cellule della larva di "Cricotopus sylvestris F." ». 161.

LOMBARDI L. — « Sopra un Voltmetro assoluto per la misura di grandi differenze di potenziale ». 173.

LOMBARDINI M. — « Sul calcolo della circuitazione nei moti dell'atmosfera ». 381, 459.

## M

MADON F. V. e GOLDBERGER S. — « La curva glicemica adrenalina nella fatica e il rapporto potassio calcio ». 301.

MAMBRIANI A. — « Sulla sommabilità delle serie doppie di Fourier, di funzioni discontinue ». 715.

MANIÀ B. — « Sopra un teorema di esistenza nel calcolo delle variazioni ». 809.

MANUNTA C. — Vedi JUCCI C.

MAROTTA D. e ROSANOVA G. — « Sulla struttura dei derivati C. sostituiti dell'acido barbiturico ». 681, 753.

MARTIN E. — « Metodo per il calcolo d'orbita di una binaria visuale ». 874, 955.

MASCARELLI L. e GATTI D. — « Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. — XI. Nuovi derivati del 2-metil-difenile ed influenza del CH<sub>3</sub> sulle reazioni dell'NH<sub>2</sub> in 2' ». 89.

MASOTTI A. — « Relazione fra le curvature di due linee corrispondenti in una rappresentazione conforme ». 519.

ID. — « Un teorema di univocità relativo all'equazione di Poisson ». 630.

MATTIOLI G. D. — « Sulla riduzione di rango dei sistemi canonici mediante integrali generici ». 357, 437.

MELCHIORI RANGHIASCI G. — Vedi OCCHIALINI A.

MILLOSEVICH F. — Commemorazione del Socio Ferruccio Zambonini. 767.

MIRANDA C. — « Sulla sommazione col metodo di Poisson delle serie di Hermite ». 197.



- MIRGUET J. — « Quelques nouvelles notions infinitesimales directes ». 357, 429.
- MITOLO M. — « Azione dei vapori delle essenze vegetali e degli aromi animali sull'eccitabilità riflessa midollare ». 766, 1003.
- MOISIL C. — « Sur la composition principale des groupes continus infinis ». 219.
- MOISSEIEV N. — « Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare ». 55, 135.
- ID. — « Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare. — II. Casi particolari notevoli ». 225, 377.
- ID. — « Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare. — III. Caso generale di una agitazione incoerente ». 225, 443.
- MOLTONI E. — « Elenco degli uccelli riportati dalla "Missione Desio nel Deserto Libico" ». 398.
- MONTALENTI G. — « Sull'embriogenesi degli ibridi fra "Bufo vulgaris" e "Bufo viridis" ». 994.
- MONTEROSSO B. — « Studi cirripedologici — VII. Eurianilità e anabiosi in "Chthamalus stellatus" Ranzani ». 699, 756.
- OCCHIALINI A. e GALLINO L. — « Uno spinterometro riproducibile per spettroscopia quantitativa ». 470, 559.
- OCCHIALINI A. e MELCHIORI RANGHIASCI G. — « Un metodo semplificato di misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali ». 875.

## P

- PALOZZI G. — « Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale ». 543.
- PAMPANINI R. — « Piante raccolte in Libia dalla "Missione Desio (1931)" ». 405, 483.
- PASCAL M. — « Sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a se stesso. — I. Formola fondamentale e proprietà che se ne deducono ». 871.
- PATERNÒ E. — « Azione del carbonato di soda sulla cellulosa ». 11.
- ID. — « Cellulosa esaurita ». 17.
- ID. — « Ossi-cellulosa e sua identità con la  $\beta$ -cellulosa e la cellodestrina ». 20.
- ID. — « Azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa ». 107.
- ID. — « Sulla maturazione della sodio-cellulosa ». 113.
- ID. — « La così detta cellulosa rigenerata ». 114.
- ID. — « Sul xantogenato di cellulosa e la viscosa ». 181.
- ID. — « Cellulosa solubile o peptonizzata ». 184.
- ID. — « Composizione della seta artificiale ». 186.
- ID. — « La crioscopia ed il peso molecolare dei polimeri dei carboidrati ». 260.
- ID. — « La cellulosa nel reattivo di Schweitzer ». 262.
- ID. — « Cellodestrina, amiloide e pentosani ». 263.
- PELOSI L. — « Sul parallelismo di Levi-Civita ». 219, 280.
- PETRI L. — « Di un metodo fotoelettrico per mettere in evidenza le radiazioni mitogenetiche del Gurwitsch ». 919.
- PETRUCCI G. — « Treni d'onde emessi ad intervalli di tempo costanti ». 140.
- N
- NATTA G. e PIRANI R. — « Soluzioni solide per precipitazione ed isomorfismo tra complessi del platino e del tellurio te-travalente. — I. Struttura dei cloroplatinati di cesio e di rubidio ». 92.
- NATTA G. e BACCAREDDA M. — « Antimoniati minerali di calcio. (Atopite, romeite, ocre di antimonio calcifere) ». 304, 389.
- NOBILE V. — « Sulle leggi di forza centrale corrispondenti ad assegnate traiettorie e sopra un caso particolare notevole ». 706, 781.
- O
- OBRECHKOFF N. — « Sur une généralisation de la sommation de M. Borel des séries divergentes ». 39.



- PICCARDI G. e SBERNA A. — « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — II. Sulla ricerca del lantanio ». 83.
- ID., ID. — « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — III. Sulla ricerca dell'ittrio ». 235, 309.
- ID., ID. — « Spettri molecolari e analisi spettroscopica. — IV. Sulla ricerca dello scandio ». 577.
- PICONE M. — « Maggiorazione dell'errore d'approssimazione nel metodo d'integrazione Cauchy-Lipschitz dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie ». 720, 859.
- ID. — « Equazione integrale traduce il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine ». 870, 942.
- PINCHERLE L. — « Su una serie perturbata dello spettro dell'alluminio ionizzato ». 965.
- PIRANI R. — Vedi NATTA G.
- PIZZI C. — Vedi CORBELLINI A.
- PLACINTEANU J. I. — « Les équations de mouvement de trois corps à masses variables ». 52.
- ID. — « Sur l'équilibre entre matière et énergie rayonnante ». 225, 681.
- POCHETTINO A. — « Sull'effetto Hallwachs dei composti di elementi a duplice valenza ». 505.
- POPA E. — Vedi HAIMOVICI M.
- PRATESI P. — Vedi BETTI M.
- PYCHA Z. — « Sulla relatività del microcosmo ». 724, 820.

## R

- RACCIU G. — Vedi GARELLI F.
- REDINI R. — « Sulla geologia del M. Pisano ». 893, 986.
- REY PASTOR J. — « Sulla topologia dei domini di uno spazio ad  $n$  dimensioni ». 524.
- ROCHER P. — « Sur les lignes de plus grande pente de la fonction de Green ». 357, 528.
- ROSANOVA G. — Vedi MAROTTA D.
- ROSENBLATT A. — « Sur les mouvements

laminaires des liquides visqueux incompressibles ». 381, 553.

- ROSSI A. — « La struttura cristallina del praseodimio ». 235, 298.
- ROSSI B. — « Calcolo dell'azione del campo magnetico terrestre sopra una radiazione corpuscolare generata nell'atmosfera ». 62.
- ID. — « Sugli effetti secondari della radiazione corpuscolare penetrante ». 734.
- ROSSI B. e CRINÒ B. — « Le anomalie di assorbimento della radiazione penetrante ». 741.

## S

- SACCHETTI M. — « Intorno ad alcuni "Zygo saccharomyces" ». 762.
- SAKELLARIOU N. — « Sur le calcul des variations ». 130, 209.
- SANDONNINI C. — « Trasposizioni nel nucleo del benzolo ». 99.
- SANSONE G. — « Sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$  ». 125.
- ID. — « Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$  ». 130, 194.
- SBERNA A. — Vedi PICCARDI G.
- SERINI R. — « Il fenomeno Doppler per le corde vibranti ». 226.
- SERRA G. — « Su di una nuova specie di "Schizaster" ». 755, 888.
- SEVERI F. — « Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa ». 487.
- SIGNORINI A. — « Alcune proprietà di media nella Elastostatica ordinaria ». 88, 151.
- SOMMERFELD A. — « Integrazione asintotica dell'equazione differenziale di Thomas-Fermi ». 706, 788.
- SONA L. — « Superficie ortobariche di un corpo ». 353.
- STELLA A. — « Su un interessante ammasso ferro-titanifero dell'Alto Egitto nel Deserto Arabico ». 336.
- STRANEO P. — « Intorno alla teoria unitaria

della gravitazione e dell'elettricità. — IV. Discussione e perfezionamento della teoria precedente ». 77.

STRANEO P. — « Nuova teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità a geometrizzazione assoluta ». 462.

ID. — « I tensori energetici nella teoria unitaria a geometrizzazione assoluta ». 563.

ID. — « Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta ». 965.

SUPINO G. — « Sul problema di Clebsch ». 366.

ID. — « Sopra la deformazione delle lastre ». 381, 448.

SZANTROCH Z. — « Ricerche sulle sostanze grasse intracellulari in vari tessuti coltivati in vitro ». 904.

SZEGÖ L. — Vedi CAMBI L.

## T

TERNI T. — « Lo sviluppo della pinna degli urodeli, in base a ricerche morfologiche e sperimentali ». 896.

TETTAMANZI A. — Vedi BARBIERI G. A.

TODESCO G. — « Verifica sperimentale del-

l'assorbimento selettivo delle onde Hertziane provocato da un gas elettronico in campo magnetico ». 89, 144.

TONELLI L. — « Un teorema di calcolo delle variazioni ». 417.

## V

VIOLA G. — « Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa ». 55.

ID. — « La periodicità della temperatura media annua in rapporto a quella delle macchie solari ». 462, 674.

VIOLA T. — « Funzioni a variazione limitata continue verso destra ». 568, 626.

## Z

ZAGAMI V. e FAMIANI V. — « Raffronti tra il valore alimentare di alcuni legumi e quello di alcuni cereali ». 161, 229.

ZAGAMI V. — Vedi anche FAMIANI V.

ZANELLI F. — Vedi ANTONIANI C.

ZEULI M. — « Sopra una generalizzazione del centro della sfera osculatrice ». 635.

N. P.

## INDICE PER MATERIE

### A

- Astronomia.** — « Altezza della cromosfera nel 1931 ». ABETTI G. 258.
- « Sopra l'incremento dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse decrescenti, con applicazioni alle orbite delle stelle binarie ». ARMELLINI G. 701.
  - « Contributo allo studio della variazione della latitudine ». CONTI G. 381, 453.
  - « Metodo per il calcolo d'orbita di una binaria visuale ». MARTIN E. 874, 955.

### B

- Biologia.** — « Costituzione zoologica e trapianti. Ricerche tra Anuri e Urodeli. Considerazioni ». COTRONEI G. 236.
- « Osservazioni preliminari sui trapianti di abbozzi di cuore tra Anuri e Urodeli ». ID. 901.
  - « Contributo alla conoscenza della biologia e della sistematica degli stipiti dello "Sclerotium Rolfsii" ». CURZI M. 241.
  - « Sul contenuto gassoso dei cenobii di "Rivularia polyotis (J. Ag.) Hauck" ». DANIN Z. 317.
  - « La coagulazione del latte per opera del *B. typhi* e di altri batteri ritenuti inattivi sul latte ». GORINI C. 908, 1000.
  - « Le onde cosmiche e l'oscillazione cellulare ». LAKHOVSKY G. 316, 403.
  - « Osservazioni sulla struttura del nucleo nelle cellule della larva di "*Cricotopus sylvestris* F." ». LOMBARDI D. 161.
  - « Studi cirripedologici. VII. Eurianilità e anabiosi in "*Chthamalus stellatus*" Ranzani ». MONTEROSSO B. 699, 756.
  - « Di un metodo fotoelettrico per mettere in evidenza le radiazioni mitogenetiche del Gurwitsch ». PETRI L. 919.

- Biologia.** — « Intorno ad alcuni "*Zygosaccharomyces*" ». SACCHETTI M. 762.
- « Ricerche sulle sostanze grasse intracellulari in vari tessuti coltivati in vitro ». SZANTROCH Z. 904.
- Bollettino bibliografico.** — 105, 249, 407, 597, 778, 915.
- Botanica.** — « Un nuovo metodo microchimico per la separazione della cellulosa nelle membrane vegetali ». DRAGONE-TESTI G. 992.
- « Piante raccolte in Libia dalla "Missione Desio (1931)" ». PAMPANINI R. 405, 483.

### C

- Chimica.** — « Ricerche nel gruppo delle fitosterine. Sulle sterine dell'olio di vinnaccioli ». ANTONIANI C. e ZANELLI F. 284.
- « Contributo alla conoscenza dei composti del cromo bivalente ». BARBIERI G. A. e TETTAMANZI A. 877.
  - « Nuovi composti complessi del cianuro di argento col cianuro di sodio ». ID. 887, 965.
  - « Sull'esistenza dei cloruri politionici. Determinazione dell'indice di rifrazione delle soluzioni di zolfo nei cloruri di zolfo ». BARONI A. 234, 305.
  - « Costituzione chimica e potere rotatorio. Derivati delle aldeidi cloro- e bromobenzoiche ». BETTI M. e PRATESI P. 509.
  - « Sopra una costante strutturale relativa ai passaggi di stato ». BIGAZZI R. 976.
  - « Persistenza di struttura anisotropa nella silice derivante dall'attacco della leucite con acidi ». BLANC G. A. 189.
  - « Spettro Raman della chinolina e mani-

festazioni del legame Carbonio-Azoto». BONINO G. B. e CELLA P. 235, 385.

**Chimica.** — « Spettro Raman di alcuni derivati dell'anilina ». Id. 568.

- « Sullo spettro Raman della  $\Delta_2$  diidronaftalina ». Id. 572.
- « Influenza dei cationi di scambio sulla ascesa capillare dell'acqua nel terreno ». BOTTINI O. 883.
- « L'azione di alcune sostanze organiche nella deposizione elettrolitica dello zinco ». CAMBI L. e DEVOTO G. 27.
- « Sul comportamento magnetico dei complessi. - IV. N, N-Dipropil-ditiocarbammati ferrici ». CAMBI L., SZEGÖ L. e CAGNASSO A. 266.
- « Sul comportamento magnetico dei complessi. - V. Di-butil-ditiocarbammati ferrici ». Id., Id., Id. 329.
- « Sui solfosali di rame e di ferro ». CAMBI L. e SZEGÖ L. 599.
- « Sulla stereoisomeria dei derivati 2, 2' - disostituiti del difenile ». CORBELLINI A. e PIZZI C. 235, 287.
- « Sulla stereoisomeria dei derivati 2, 2' - disostituiti del difenile ». CORBELLINI A. e ANGELETTI M. 887, 968.
- « Solubilità del gluconato di calcio in presenza di fosfato sodico e di acido arsenioso ». DE CARLI F. 579.
- « Proprietà delle soluzioni di cloruro di calcio ed urea ». Id. 584.
- « I composti dell'urea con i bromuri alcalino terrosi ». Id. 747.
- « Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi. - VII. Costante dielettrica e momento elettrico in soluzione acquosa ». DEVOTO G. 471.
- « La suscettibilità magnetica delle uree, delle isouree e della solfammide ». Id. 888, 973.
- « Il trifenilfosfato come solvente in crioscopia ». GARELLI F. e RACCIU G. 976.
- « Il fosfato trifenilico come solvente crioscopico ». Id., Id. 981.
- « Sopra le diazoresine ». Nota I. JOLLES Z. 235, 292.
- « Sopra le diazoresine ». Nota II. Id. 297, 395.

**Chimica.** — « Sulla sostanza colorante dei bozzoli dei bachi da seta di razza verde giapponese ». JUCCI C. e MANUNTA C. 405, 473.

- « Sulla struttura dei derivati C. sostituiti dell'acido barbiturico ». MAROTTA D. e ROSANOVA G. 681, 753.
- « Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. - XI. Nuovi derivati del 2-metil-difenile ed influenza del  $\text{CH}_3$  sulle reazioni dell' $\text{NH}_2$  in 2' ». MASCARELLI L. e GATTI D. 89.
- « Soluzioni solide per precipitazione ed isomorfismo tra complessi del platino e del tellurio tetravalente. - I. Struttura dei cloroplatinati di cesio e di rubidio ». NATTA G. e PIRANI R. 92.
- « Antimoniati minerali di calcio. (Atopite, romeite, ocre di antimonio calcifere) ». NATTA G. e BACCAREDDA M. 304, 389.
- « Azione del carbonato di soda sulla cellulosa ». PATERNÒ E. 11.
- « Cellulosa esaurita ». Id. 17.
- « Ossi-cellulosa e sua identità con la  $\beta$ -cellulosa e la cello destrina ». Id. 20.
- « Azione dell'ossigeno sulla sodio-cellulosa ». Id. 107.
- « Sulla maturazione della sodio-cellulosa ». Id. 113.
- « La così detta cellulosa rigenerata ». Id. 114.
- « Sul xantogenato di cellulosa e la viscosa ». Id. 181.
- « Cellulosa solubile o peptonizzata ». Id. 184.
- « Composizione della seta artificiale ». Id. 186.
- « La crioscopia ed il peso molecolare dei polimeri dei carboidrati ». Id. 260.
- « La cellulosa nel reattivo di Schweitzer ». Id. 262.
- « Cello destrina, amiloide e pentosani ». Id. 263.
- « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. - II. Sulla ricerca del lantanio ». PICCARDI G. e SBERNA A. 83.
- « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. - III. Sulla ricerca dell'ittrio ». Id., Id. 235, 309.

- Chimica.** — « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — IV. Sulla ricerca dello scandio ». PICCARDI G. e SBERNA A. 577.
- « La struttura cristallina del praseodimio ». ROSSI A. 235, 298.
- « Trasposizioni nel nucleo del benzolo ». SANDONNINI C. 99.

**Commemorazioni.** — Commemorazione del Socio FERRUCCIO ZAMBONINI. MILLOSEVICH F. 767.

## F

- Fisica.** — « La struttura della riga 6708 del Litio osservata in emissione ». ALLEGRETTI L. 876.
- « Ricerche sulla radioattività del potassio ». BOCCIARELLI D. 568, 686.
- « Sulla forma delle frange d'interferenza ottenute da onde affette da astigmatismo puro con reticoli ad orientamento qualunque ». BRUSCAGLIONI R. 70.
- « Nuove idee sulla teoria di relatività ». GIORGI G. 177.
- « Remarques sur le problème de la théorie unitaire des champs ». INFELD L. 55, 157.
- « Sulla pretesa realtà della contrazione di Lorentz e sulla determinazione del moto assoluto della Terra ». LA ROSA M. 502.
- « Sopra un Voltmetro assoluto per la misura di grandi differenze di potenziale ». LOMBARDI L. 173.
- « Uno spinterometro riproducibile per spettroscopia quantitativa ». OCCHIALINI A. e GALLINO L. 470, 559.
- « Un metodo semplificato di misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali ». OCCHIALINI A. e MELCHIORI RANGHIASCI G. 875.
- « Treni d'onde emessi ad intervalli di tempo costanti ». PETRUCCI G. 140.
- « Su una serie perturbata dello spettro dell'alluminio ionizzato ». PINCHERLE L. 965.
- « Sur l'équilibre entre matière et energie rayonnante ». PLACINTEANU J. I. 225, 681.

**Fisica.** — « Sull'effetto Hallwachs dei composti di elementi a duplice valenza ». POCHETTINO A. 505.

- « Calcolo dell'azione del campo magnetico terrestre sopra una radiazione corpuscolare generata nell'atmosfera ». ROSSI B. 62.
- « Sugli effetti secondari della radiazione corpuscolare penetrante ». ID. 734.
- « Le anomalie di assorbimento della radiazione penetrante ». ROSSI B. e CRINÒ B. 741.
- « Il fenomeno Doppler per le corde vibranti ». SERINI R. 226.
- « Alcune proprietà di media nella Elastostatica ordinaria ». SIGNORINI A. 88, 151.
- « Integrazione asintotica dell'equazione differenziale di Thomas-Fermi ». SOMMERFELD A. 706, 788.
- « Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità. — IV. Discussione e perfezionamento della teoria precedente ». STRANEO P. 77.
- « Nuova teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità a geometrizzazione assoluta ». ID. 462.
- « I tensori energetici nella teoria unitaria a geometrizzazione assoluta ». STRANEO P. 563.
- « Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta ». ID. 965.
- « Verifica sperimentale dell'assorbimento selettivo delle onde Hertziane provocato da un gas elettronico in campo magnetico ». TODESCO G. 89, 144.

- Fisiologia.** — « Ricerche sul movimento degli stami in alcune berberidacee. — Azione di stimoli sottolimali multipli a bassa frequenza ». COLLA S. 766, 829.
- « La fibra muscolare striata varia di volume durante la contrazione? ». D'ANCONA U. 765, 908.
- « Ricerche sul contenuto gassoso di alcune alghe. — Sui gas contenuti in "Enteromorpha compressa j Ag" ». DANIN Z. 766, 831.
- « Raffronti tra il valore ricostruttivo di alcuni legumi e quello del grano ». FAMIANI V. e ZAGAMI V. 976.



**Fisiologia.** — « La curva glicemica adrenalinica nella fatica e il rapporto potassio calcio ». MADON F. V. e GOLDBERGER S. 301.

- « Azione dei vapori delle essenze vegetali e degli aromi animali sull'eccitabilità riflessa midollare ». MITOLO M. 766, 1003.
- « Raffronti tra il valore alimentare di alcuni legumi e quello di alcuni cereali ». ZAGAMI V. e FAMIANI V. 161, 229.

## G

**Geodesia.** — « Stazione astronomico-geodetica eseguita nel vertice di 1° ordine Bric Torniola, nel luglio 1928 ». BARBIERI U. 669.

**Geofisica.** — « Pendolo orizzontale ultra-potente a registrazione meccanica ». AGAMENNONE G. 382.

- « La riflessione delle onde sismiche agli antipodi causata di nuovi terremoti ». ID. 729.
- « La presenza di onde lente nella fase preliminare di taluni sismogrammi ». ID. 876, 960.
- « Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa ». ALIPPI T. 457.
- « Sul calcolo della circuitazione nei moti dell'atmosfera ». LOMBARDINI M. 381, 459.
- « Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa ». VIOLA G. 55.
- « La periodicità della temperatura media annua in rapporto a quella delle macchine solari ». ID. 462, 674.

**Geologia.** — « Ricoprimento di terreni pliocenici nell'Appennino Reggiano ». ANELLI M. 478.

- « Il miocene del M. Vallassa ». BONI A. 893, 981.
- « Sulla presenza dell'Eocene nel Fezzan Orientale (Tripolitania) ». DESIO A. 827.
- « Sulla geologia del M. Pisano ». REDINI R. 893, 986.

## M

**Matematica.** — « Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi. - I. Problemi variazionali ». ANDREOLI G. 218, 272.

- « Coppie reciproche di  $V_2$ : legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi. - II. Formazione e proprietà della coppia di varietà reciproche ». ID. 218, 340.
- « Le formule di Saint-Venant per gli spazi curvi a tre dimensioni ». ANDRUETTO G. 214.
- « Le formule di Saint-Venant per le varietà  $V_n$  a curvatura costante ». ID. 792.
- « Sulla crescita delle funzioni olomorfe di tipo esponenziale ». BERNSTEIN V. 30.
- « Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet ». ID. 948.
- « Alcune formule vettoriali negli spazi curvi a tre dimensioni ». BOGGIO T. 189.
- « Sul contatto di due superficie ». BOMPIANI E. 43, 116.
- « Deformazioni di specie superiore e sistemi di forme per una  $V_m$  in  $R_n$  ». BORTOLOTTI E. 536, 603.
- « Sullo sviluppo di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n \left( \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \right)^n \right]$$

in serie di potenze crescenti di  $x$  ». BROGGI U. 122.

- « Sulle equazioni differenziali lineari complete a coefficienti costanti ». ID. 514.
- « Una generalizzazione degli sviluppi in serie delle funzioni determinanti ». ID. 536, 615.
- « Serie di fattoriali ed equazioni alle differenze ». ID. 707.
- « Di una classificazione dell'equazioni lineari del second'ordine alle derivate ordinarie fondata sulle relazioni ricorrenti ». BURGATTI P. 490.

**Matematica.** — « Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche ». CACCIOPOLI R. 713.

- « Osservazione sui tensori quintupli emisotropi ». CALDONAZZO B. 840.
- « Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine ». CAMPEDELLI L. 203.
- « Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine ». ID. 358.
- « Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine ». ID. 536.
- « Sur les arcs frontières rendus impropres par les singularités des coefficients dans le problème de Dirichlet pour les équations du second ordre et du type elliptique à deux variables ». CAPOULADE J. 813, 844.
- « Su di una proprietà delle curve intuitive sghembe ». CHERUBINO S. 357, 424.
- « Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di second'ordine di tipo misto ». CIBRARIO. M. 536, 619.
- « La détermination d'une fonction harmonique par des conditions initiales globales ». CIORANESCU N. 638.
- « Sui tensori doppi a divergenza unica ». CISOTTI U. 835.
- « Nuove formule di maggiorazione per le soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine ». CLEMENTE P. 870, 925.
- « Sulle congruenze di Ribaucour deformabili ». CRENNNA M. 362.
- « Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz ». DEL CHIARO A. 949.
- « Sulla teoria unitaria dello spazio fisico ». DE MIRA FERNANDES A. 720, 797.
- « Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche ». DU VAL P. 219, 276.
- « Osservazioni sulle superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche ». ID. 345.
- « Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli ». FANO G. 3.

**Matematica.** — « Nuova dimostrazione della formula fondamentale per i funzionali analitici lineari ». FANTAPPIÈ L. 850.

- « Studio proiettivo dell'intorno di una superficie ». FRANCESCHI O. 865.
- « Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs ed uno del Severi ». FUBINI G. 499.
- « Un'osservazione su di un Teorema di Carathéodory per le funzioni armoniche ». GEYMONAT L. 856.
- « Sur l'équation de Laplace ». GHERMANESCO M. 870, 932.
- « Su alcuni sviluppi nuovi del calcolo operatorio funzionale ». GIORGI G. 501.
- « Sur l'existence de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche ». GOMES R. L. 453, 533.
- « Sur les limites de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche ». ID. 642.
- « Sulla curvatura geodetica delle linee di uno spazio riemanniano ad  $n$  dimensioni ». GUGINO E. 610.
- « Corrispondenza per piani tangenti paralleli ». HAIMOVICI M. e POPA E. 949.
- « La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. - I. Remarques sur la théorie générale de la transformation de Ribaucour ». HAMBURGER H. 870, 936.
- « La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. - II. Application de la transformation de Ribaucour à la représentation sphérique et à quelques autres problèmes ». ID. 870.
- « Sur l'intégration des transformations fonctionnelles lineaires ». HOSTINSKY B. 949.
- « Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. (Un problema di Bruno de Finetti) ». KOLMOGOROFF A. 357, 805.
- « Ancora sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo ». ID. 866.
- « Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre

- avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes ». KOURENSKY M. 284, 348.
- Matematica.** — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. - I. Sommazione delle funzioni puntiformi ». LABOCETTA L. 949.
- « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. - II. Riduzione a tipi normali e integrali fondamentali ». ID. 949.
- « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. - III. Funzioni periodiche ». ID. 949.
- « Sopra un'equazione alle derivate parziali del 4° ordine ». LAMPARIELLO G. 35.
- « Teoremi di unicità e di esistenza per le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso prossimo alla forma circolare ». LEVI-CIVITA T. 409.
- « Sulla sommabilità delle serie doppie di Fourier, di funzioni discontinue ». MAMBRIANI A. 715.
- « Sopra un teorema di esistenza nel calcolo delle variazioni ». MANIÀ B. 809.
- « Relazione fra le curvature di due linee corrispondenti in una rappresentazione conforme ». MASOTTI A. 519.
- « Un teorema di univocità relativo all'equazione di Poisson ». ID. 630.
- « Sulla sommazione col metodo di Poisson delle serie di Hermite ». MIRANDA C. 197.
- « Quelques nouvelles notions infinitesimales directes ». MIRGUET J. 357, 429.
- « Sur la composition principale des groupes continus infinis ». MOISIL C. 219.
- « Sur une généralisation de la sommation de M. Borel des séries divergentes ». OBRECHKOFF N. 39.
- « Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale ». PALOZZI G. 543.
- « Sul parallelismo di Levi-Civita ». PELOSI L. 219, 280.
- « Maggiorazione dell'errore d'approssimazione nel metodo d'integrazione Cauchy-Lipschitz dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie ». PICONE M. 720, 859.
- « Equazione integrale traduce il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine ». ID. 870, 942.
- Matematica.** — « Sulla topologia dei domini di uno spazio ad  $n$  dimensioni ». REY PASTOR J. 524.
- « Sur les lignes de plus grande pente de la fonction de Green ». ROCHER P. 357, 528.
- « Sur le calcul des variations ». SAKEL-LARIOU N. 130, 209.
- « Sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$  ». SANSONE G. 125.
- « Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$  ». ID. 130, 194.
- « Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa ». SEVERI F. 487.
- « Superficie ortobariche di un corpo ». SONA L. 353.
- « Un teorema di calcolo delle variazioni ». TONELLI L. 417.
- « Funzioni a variazione limitata continue verso destra ». VIOLA T. 568, 626.
- « Sopra una generalizzazione del centro della sfera osculatrice ». ZEÜLI M. 635.
- Meccanica.** — « Sopra un teorema di Siacci per il moto lungo una curva gobba ». BOGGIO T. 721.
- « Intorno ad alcuni valori singolari delle velocità critiche degli alberi ». BRUNELLI P. E. 43.
- « Sul pendolo di lunghezza variabile ». CASSINA U. 950.
- « Moto con scia di un profilo flessibile ». CISOTTI U. 165.
- « Moto con scia di un profilo flessibile; azioni dinamiche ». ID. 253.
- « A proposito della influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa ». Nota I. COLONNETTI G. 549.
- « A proposito della influenza dello sforzo di taglio sulla freccia di una trave inflessa ». Nota II. ID. 558, 646.
- « Considerazioni sugli impulsi nei corpi elastici isotropi ». CONFORTO F. 55, 130.



- Meccanica.** — «Sugli impulsi nei corpi elastici isotropi». CONFORTO F. 558, 649.
- «Ostacolo ellittico girevole, investito da una corrente piana irrotazionale». CONSIGLIO A. 669, 724.
- «Di una condizione di sicurezza nell'avvitamento dei velivoli». CROCCO G. A. 5.
- «Cilindri rotorii autorotanti». DA RIOS L. S. 952.
- «Sul problema brachistocrono di Zermelo». DE MIRA FERNANDES A. 47.
- «Sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes». DUBREIL-JACOTIN M. L. 814.
- «Gli invarianti adiabatici come metodo di integrazione approssimata di equazioni differenziali». GRAFFI D. 657.
- «Intorno agli effetti asintotici delle maree sul moto dei corpi celesti. — I. Generalità e problema dei 2 corpi». KRALL G. 219.
- «Intorno agli effetti asintotici delle maree sul moto dei corpi celesti. — II. Problema dei 3 corpi». ID. 225, 371.
- «Mete lontane del moto di un sistema planetario». ID. 558, 664.
- «Sull'instabilità dei vortici elicoidali». LAMPARIELLO G. 432.
- «Sulla riduzione di rango dei sistemi canonici mediante integrali generici». MATTIOLI G. D. 357, 437.
- «Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare». MOISSEIEV N. 55, 135.
- «Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare. — II. Casi particolari notevoli». ID. 225, 377.
- «Intorno alla legge di resistenza al moto dei corpi in un mezzo pulviscolare. — III. Caso generale di una agitazione incoerente». ID. 225, 443.
- «Sulle leggi di forza centrale corrispondenti ad assegnate traiettorie e sopra un caso particolare notevole». NOBILE V. 706, 781.
- «Sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a se stesso. — I. For-

mola fondamentale e proprietà che se ne deducono». PASCAL M. 871.

- Meccanica.** — «Les équations du mouvement de trois corps à masses variables». PLACINTEANU J. I. 52.
- «Sulla relatività del microcosmo». PYCHA Z. 724, 820.
- «Sur les mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles». ROSENBLATT A. 381, 553.
- «Sul problema di Clebsch». SUPINO G. 366.
- «Sopra la deformazione delle lastre». ID. 381, 448.

- Mineralogia.** — «Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica». ANDREATTA G. 994.
- «Granato, vesuviana, ilmenite e titanite del Monte Rosso di Verra (Gruppo del Monte Rosa)». CARPANESE T. 591, 694.
- «Su un interessante ammasso ferro-titanifero dell'Alto Egitto nel Deserto Arabico». STELLA A. 336.

## P

- Paleontologia.** — «“Sanfilippaster”, nuovo genere di Echinide del Cretaceo superiore». CHECCHIA RISPOLI G. 235, 313.
- «Su di una nuova specie di “Schizaster”». SERRA G. 755, 888.

**Personale accademico.** — 104, 247, 406, 596, 777.

**Premi in corso d'assegnazione.** — 323.

**Presentazione di libri.** — 104, 247, 406, 596, 777, 913.

**Presentazione di Note e Memorie.** — 104, 247, 406, 596, 777, 914.

**Presentazione di plichi suggellati.** — 104, 913.

## Z

**Zoologia.** — «La autotomia dell'apparato digerente e la sua rigenerazione nelle

Oloturie, come fenomeno spontaneo e normale». BERTOLINI F. 765, 893.

**Zoologia.** — «Elenco degli uccelli riportati dalla "Missione Desio nel Deserto Libico"». MOLTONI E. 398.

— «Sull'embriogenesi degli ibridi fra "Bufo

vulgaris" e "Bufo viridis"». MONTALENTI G. 994.

**Zoologia.** — «Lo sviluppo della pinna degli urodeli, in base a ricerche morfologiche e sperimentali». TERNI T. 896.





